保険数学II（問題）

1．n年満期養老保険（保険金年末払）において、P、${}_tV$ は予定利率i、予定死亡率q による年払純保険料およびt年度末純保険料式責任準備金とする。 同様に、P'、${}_tV'$ は予定利率i'、予定死亡率q' による年払純保険料およびt年度末純保険料式責任準備金とする。

いま、

$$(P'-P)(1+i')-\{(q'_{x+t}-q_{x+t})(1-{}_{t+1}V)-({}_tV+P)(i'-i)\}$$

がすべてのtに対して定数であるという。

このとき、${}_tV$ と ${}_tV'$ の間にどのような関係が成り立つか。（20点）

2．次の給付を行なう親子連生保険（保険料全期払、保険金即時払）の年払純保険料および純保険料式責任準備金を求めよ。

なお、予定死亡率は子供、父親、母親とも同一とし、契約時年齢は子供x歳、父親y歳、母親z歳、保険期間n年とする。

（1）子供が死亡した場合、死亡日までの経過年数t（端数月切り上げ）により $(t/n)\cdot S$（Sは保険金額）を支払い保険契約は消滅する。

（2）子供が満期まで生存した場合、満期保険金Sを支払う。

（3）父親が死亡した場合、死亡保険金Sを支払い、かつ、その後の保険料は免除し、また、保険料払込応当日に子供の生存を条件に 0.1Sの年金を保険期間中支払う。

（4）母親が死亡した場合、死亡保険金 0.5Sを支払う。（20点）

3．死亡に対しては保険金1、経過tでの解約に対しては返戻金W_tを即時に支払うn年満期の保険を考える。

このとき、

（1）死亡率の他に解約率も保険料の計算に折り込んだ場合のx歳加入の一時払保険料を$\mathbb{P}$とするとき、$\mathbb{P}$を死力（μ_{x+t}）、解約による瞬間脱退力（ω_{x+t}）、利力（δ）を用いて表わせ。

（2）$W_t=\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}}^{\,1}$ とすると、$\mathbb{P}=\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\,1}$ となることを（1）を用いて計算によって示せ。

ここで、$\bar{A}$は死亡率及び利率のみを計算基礎とする給付現価を表わす。（20点）

4．次の(1) ～ (8)にあてはまる算式を所定の解答用紙に記入せよ。（20点）

ℓ_x^{aa} をx歳の健康者数、ℓ_x^{ii} をx歳の要介護者数とするとき、

$$\ell_x^{aa}+\ell_x^{ii}=\ell_x$$

である。 次に、${}_np_x^{i}$ をx歳の要介護者のn年後の生存確率とすれば、x歳の要介護者 ℓ_x^{ii} のうち、n年後の生存者数は、$\boxed{\quad(1)\quad}$ である。

また、x歳の ℓ_x のうち、n年後の生存者数は ℓ_{x+n} である。 従ってx歳の健康者 ℓ_x^{aa} のうち、n年後の生存者数は $\boxed{\quad(2)\quad}$ である。

いま、${}_np_x^{a}$ をx歳の健康者のn年後の生存確率とすれば、

$${}_np_x^{a}=\boxed{\quad(3)\quad}$$

一方、$\ell_{x+n}=\ell_x\cdot{}_np_x$ であるから、この式は

$${}_np_x^{a}=\boxed{\quad(4)\quad}$$

となる。

ここで、次のように年金現価を定義する。

$\ddot{a}_x^{a}$ ： x歳の健康者が生存する限り支払われる年始払年金の年金現価

$\ddot{a}_x^{i}$ ： x歳の要介護者が生存する限り支払われる年始払年金の年金現価

$\ddot{a}_x^{aa}$ ： x歳の健康者が健康である期間中支払われる年始払年金の年金現価

a_x^{ai} ： x歳の健康者が要介護者となった年末から生存中支払われる年末払年金の年金現価

以上の定義から

$$\ddot{a}_x^{a} = \sum_{n=0}^{\omega-x} v^n \; {}_n p_x^{a} = \boxed{(5)} \cdot \ddot{a}_x - \boxed{(6)} \cdot \ddot{a}_x^{i} \quad \text{----} \ (A)$$

また、

$$a_x^{ai} = \ddot{a}_x^{a} - \ddot{a}_x^{aa} \quad \text{----------------} \ (B)$$

である。（B）に（A）を代入すると、

$$a_x^{ai} = \boxed{(7)}$$

（7）の式を $N_x = N_x^{aa} + N_x^{ii}$ の関係を用いて表わすと

$$a_x^{ai} = \boxed{(8)}$$

を得る。

ただし、要介護者は健康者に回復することはないものとする。

5．養老保険において、V　は純保険料式責任準備金、V' は全期チルメル式責任準備金とする。

チルメル割合αが、$\alpha > P_{x+1:\overline{n-1|}} - P^{\ 1}_{x:\overline{1|}}$ を満たすとき、${}_tV_{x+1:\overline{n-1|}}$ と ${}_{t+1}V'_{x:\overline{n|}}$ の大小関係を述べよ。（20点）

保険数学Ⅱ　（解答例）

1．両基礎率によるファクラーの式はそれぞれ次式で表わされる。

$$({}_tV+P)(1+i)=q_{x+t}+p_{x+t}\cdot{}_{t+1}V \quad \text{------} \quad ①$$

$$({}_tV'+P')(1+i')=q'_{x+t}+p'_{x+t}\cdot{}_{t+1}V' \quad \text{------} \quad ②$$

${}_tV'={}_tV+\Delta_tV$ とおいて②式に代入すると

$$({}_tV+\Delta_tV+P')(1+i')=q'_{x+t}+p'_{x+t}\cdot({}_{t+1}V+\Delta_{t+1}V) \quad \text{---} \quad ②'$$

②'から① を辺々引いて整理すると

$$(P'-P)(1+i')-\{(q'_{x+t}-q_{x+t})(1-{}_{t+1}V)$$
$$-({}_tV+P)(i'-i)\}=p'_{x+t}\cdot\Delta_{t+1}V-(1+i')\Delta_tV$$

左辺をR_{t+1} とおいて、両辺に$v'D'_{x+t}$を乗じると

$$v'D'_{x+t}R_{t+1}=D'_{x+t+1}\cdot\Delta_{t+1}V-D'_{x+t}\cdot\Delta_tV \quad \text{------} \quad ③$$

③式において、$t=0$から$\tau-1$までを代入すると

$t=0$のとき　$v'D'_x R_1=D'_{x+1}\cdot\Delta_1V-D'_x\cdot\Delta_0V$

$t=1$のとき　$v'D'_{x+1}R_2=D'_{x+2}\cdot\Delta_2V-D'_{x+1}\cdot\Delta_1V$

$t=2$のとき　$v'D'_{x+2}R_3=D'_{x+3}\cdot\Delta_3V-D'_{x+2}\cdot\Delta_2V$

$t=\tau-1$のとき　$v'D'_{x+\tau-1}R_\tau=D'_{x+\tau}\cdot\Delta_\tau V-D'_{x+\tau-1}\cdot\Delta_{\tau-1}V$

これらを辺々加えると

$$v'\sum_{t=0}^{\tau-1}D'_{x+t}R_{t+1}=D'_{x+\tau}\cdot\Delta_\tau V-D'_x\cdot\Delta_0V$$

$\Delta_0V=0$だから、　$v'\sum_{t=0}^{\tau-1}D'_{x+t}R_{t+1}=D'_{x+\tau}\cdot\Delta_\tau V$

$$\therefore\ \Delta_\tau V=\frac{1}{D'_{x+\tau}}\cdot v'\sum_{t=0}^{\tau-1}D'_{x+t}R_{t+1} \quad \text{----} \quad ④$$

同様に、③式において、ｔ＝０からｎ－１までを代入して辺々加えると、

$$v'\sum_{t=0}^{n-1} D'_{x+t}R_{t+1}= D'_{x+n}\cdot\Delta_n V-D'_x\cdot\Delta_0 V$$

$\Delta_n V=\Delta_0 V=0$ だから右辺は０ゆえ、 $\sum_{t=0}^{n-1} D'_{x+t}R_{t+1}=0$

題意より、R_{t+1} はすべてのｔに対して定数であるから $R_{t+1}\equiv 0$

従って④式より $\Delta_t V=0$ となる。

すなわち、両基礎率による責任準備金 ${}_tV$ と ${}_tV'$ は常に等しい。

（以　　上）

２．求める年払純保険料をＰとすると、収入の現価は、条件（１）、（３）より

子供ｘと父親ｙが共存するときに収入されるから、$P\cdot\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}$ である。

次に支出の現価を考えると、次の４式の和である。

（１）の給付の現価は、 $S\cdot\frac{1}{D_x}\cdot\frac{1}{n}(\overline{R}_x-\overline{R}_{x+n}-n\overline{M}_{x+n})$

（２）の給付の現価は、 $S\cdot\frac{D_{x+n}}{D_x}$

（３）の給付の現価は、 $S\cdot\frac{\overline{M}_{x\overset{1}{y}}-\overline{M}_{x+n,\overset{1}{y+n}}}{D_{xy}}+0.1S(\ddot{a}_{x:\overline{n|}}-\ddot{a}_{xy:\overline{n|}})$

（４）の給付の現価は、$0.5S\cdot\frac{\overline{M}_{x\overset{1}{z}}-\overline{M}_{x+n,\overset{1}{z+n}}}{D_{xz}}$

収支相等の原則により、
$$P=\frac{S}{\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}}\left\{\frac{1}{D_x}\cdot\frac{1}{n}(\overline{R}_x-\overline{R}_{x+n}-n\overline{M}_{x+n})+\frac{D_{x+n}}{D_x}+\frac{\overline{M}_{x\overset{1}{y}}-\overline{M}_{x+n,\overset{1}{y+n}}}{D_{xy}}+0.1\cdot(\ddot{a}_{x:\overline{n|}}-\ddot{a}_{xy:\overline{n|}})+0.5\cdot\frac{\overline{M}_{x\overset{1}{z}}-\overline{M}_{x+n,\overset{1}{z+n}}}{D_{xz}}\right\}$$

次に、求める第ｔ保険年度末純保険料式責任準備金をＶとすると、次の４とおりの場合に分けて考える。

1）保険料払込中（子供ｘ、父親ｙ　共存）で、

① 母親Ｚが生存の場合

$$ {}_{t}V = S \cdot \frac{1}{D_{x+t}} \cdot \frac{1}{n} \left(\overline{R}_{x+t} - \overline{R}_{x+n} + t\overline{M}_{x+t} - n\overline{M}_{x+n} \right) + S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} $$

$$ + S \cdot \frac{\overline{M}_{x+t,\overset{1}{y+t}} - \overline{M}_{x+n,\overset{1}{y+n}}}{D_{x+t,y+t}} + 0.1S \cdot \left(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t}|} \right) $$

$$ + 0.5S \cdot \frac{\overline{M}_{x+t,\overset{1}{z+t}} - \overline{M}_{x+n,\overset{1}{z+n}}}{D_{x+t,z+t}} - P \cdot \ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t}|} $$

② 母親Ｚが死亡の場合

$$ {}_{t}V = S \cdot \frac{1}{D_{x+t}} \cdot \frac{1}{n} \left(\overline{R}_{x+t} - \overline{R}_{x+n} + t\overline{M}_{x+t} - n\overline{M}_{x+n} \right) + S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} $$

$$ + S \cdot \frac{\overline{M}_{x+t,\overset{1}{y+t}} - \overline{M}_{x+n,\overset{1}{y+n}}}{D_{x+t,y+t}} + 0.1S \cdot \left(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t}|} \right) $$

$$ - P \cdot \ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t}|} $$

2）保険料払込免除後（子供ｘ生存、父親ｙ死亡）で、

① 母親Ｚが生存の場合

$$ {}_{t}V = S \cdot \frac{1}{D_{x+t}} \cdot \frac{1}{n} \left(\overline{R}_{x+t} - \overline{R}_{x+n} + t\overline{M}_{x+t} - n\overline{M}_{x+n} \right) + S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} $$

$$ + 0.1S \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} + 0.5S \cdot \frac{\overline{M}_{x+t,\overset{1}{z+t}} - \overline{M}_{x+n,\overset{1}{z+n}}}{D_{x+t,z+t}} $$

② 母親Ｚが死亡の場合

$$ {}_tV = S \cdot \frac{1}{D_{x+t}} \cdot \frac{1}{n} \left(\overline{R}_{x+t} - \overline{R}_{x+n} + t\overline{M}_{x+t} - n\overline{M}_{x+n} \right) + S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} $$

$$ + 0.1S \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} $$

（以　　上）

3．(1)　$\bar{P} = \int_0^n e^{-\delta t} \cdot {}_tp_x^{(T)} \cdot (\mu_{x+t} + \omega_{x+t} W_t)\, dt$

ここで　${}_tp_x^{(T)} = e^{-\int_0^t (\mu_{x+\tau} + \omega_{x+\tau})\, d\tau}$

(2)　(1)より

$$ \bar{P} = \int_0^n e^{-\delta t} \cdot {}_tp_x^{(T)} \cdot \mu_{x+t}\, dt + \int_0^n e^{-\delta t} \cdot {}_tp_x^{(T)} \cdot \omega_{x+t} W_t\, dt \quad \text{---- ①} $$

と書ける。

いま、${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+\tau}\, d\tau}$ および ${}_tp_x^{w} = e^{-\int_0^t \omega_{x+\tau}\, d\tau}$ とすると、

$$ {}_tp_x^{(T)} = {}_tp_x \cdot {}_tp_x^{w} \quad \text{-------------------------------- ②} $$

と表わされる。

①式右辺の第１項 $= \int_0^n e^{-\delta t} \cdot {}_tp_x^{(T)} \cdot \mu_{x+t}\, dt$

$$ = \int_0^n e^{-\delta t} \cdot {}_tp_x \cdot {}_tp_x^{w} \cdot \mu_{x+t}\, dt \qquad \text{（②を代入）} $$

$$ = \int_0^n (e^{-\delta t} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}) \cdot {}_tp_x^{w}\, dt \qquad \text{（項の入替）} $$

$$ = \left[\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{t|}} \cdot {}_tp_x^{w} \right]_0^n + \int_0^n \overline{A}^{\,1}_{x:\overline{t|}} \cdot {}_tp_x^{w} \cdot \omega_{x+t}\, dt \qquad \text{（部分積分）} $$

$$ = \overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}} \cdot {}_np_x^{w} + \int_0^n \overline{A}^{\,1}_{x:\overline{t|}} \cdot {}_tp_x^{w} \cdot \omega_{x+t}\, dt \quad \text{------------ ③} $$

一方、題意より $W_t=\overline{A}^{\,1}_{x+t:\overline{n-t|}}$ とすると $\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}}=\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{t|}}+e^{-\delta t}\cdot{}_tp_x\cdot W_t$

が成り立つから、移項すると、 $e^{-\delta t}\cdot{}_tp_x\cdot W_t=\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}}-\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{t|}}$ ------ ④

①式右辺の第2項 $=\int_0^n e^{-\delta t}\cdot{}_tp_x^{(T)}\cdot\omega_{x+t}W_t\,dt$

$=\int_0^n e^{-\delta t}\cdot{}_tp_x\cdot{}_tp_x^{w}\cdot\omega_{x+t}W_t\,dt$ (②を代入)

$=\int_0^n \left(e^{-\delta t}\cdot{}_tp_x\cdot W_t\right)\left({}_tp_x^{w}\cdot\omega_{x+t}\right)dt$ (項の入替)

$=\int_0^n \left(\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}}-\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{t|}}\right){}_tp_x^{w}\cdot\omega_{x+t}\,dt$ (④を代入)

$=\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}}\left[-{}_tp_x^{w}\right]_0^n-\int_0^n\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{t|}}\cdot{}_tp_x^{w}\cdot\omega_{x+t}\,dt$

$=\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}}\left(1-{}_np_x^{w}\right)-\int_0^n\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{t|}}\cdot{}_tp_x^{w}\cdot\omega_{x+t}\,dt$ ------ ⑤

③、⑤より $\bar{P}$ = ③+⑤ = $\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}}$ となることが示された。

(以　上)

4．

l_x^{aa}：x歳の健康者数 → x歳の健康者中、n年後も健康である者

l_x^{aa}：x歳の健康者数 → x歳の健康者中、n年後までに要介護となる者

l_x^{ii}：x歳の要介護者数 → x歳の要介護者中、n年後に生存している者

確率 ${}_np_x^{i}$

$\underbrace{\qquad}_{n年}$

(計) l_x：x歳の生存数　　(計) l_{x+n}：x＋n歳の生存数

番号	最適解
(1)	${}_{n}p_{x}{}^{i} \cdot l_{x}{}^{ii}$
(2)	$l_{x+n} - {}_{n}p_{x}{}^{i} \cdot l_{x}{}^{ii}$
(3)	$\dfrac{l_{x+n} - {}_{n}p_{x}{}^{i} \cdot l_{x}{}^{ii}}{l_{x}{}^{aa}}$
(4)	$\dfrac{l_{x} \cdot {}_{n}p_{x} - {}_{n}p_{x}{}^{i} \cdot l_{x}{}^{ii}}{l_{x}{}^{aa}}$
(5)	$\dfrac{l_{x}}{l_{x}{}^{aa}}$
(6)	$\dfrac{l_{x}{}^{ii}}{l_{x}{}^{aa}}$
(7)	$\dfrac{l_{x}}{l_{x}{}^{aa}}\ddot{a}_{x} - \dfrac{l_{x}{}^{ii}}{l_{x}{}^{aa}}\ddot{a}_{x}{}^{i} - \ddot{a}_{x}{}^{aa}$
(8)	$\dfrac{N_{x}{}^{ii} - D_{x}{}^{ii}\ddot{a}_{x}{}^{i}}{D_{x}{}^{aa}}$

(以　　上)

5．A　$_{t}V_{x+1:\overline{n-1|}} = A_{x+1+t:\overline{n-1-t|}} - P_{x+1:\overline{n-1|}} \cdot \ddot{a}_{x+1+t:\overline{n-1-t|}}$ -------------- ①

$$_{t+1}V'_{x:\overline{n|}} = A_{x+1+t:\overline{n-1-t|}} - \left(P_{x:\overline{n|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\right) \cdot \ddot{a}_{x+1+t:\overline{n-1-t|}} \quad \text{------ ②}$$

と表わされる。

ただし、$0 \leqq t \leqq n-1$とし、、また、$A_{x:\overline{0|}} = 1$、$\ddot{a}_{x:\overline{0|}} = 0$とする。

①から②を辺々引くと

$$_{t}V_{x+1:\overline{n-1|}} - {}_{t+1}V'_{x:\overline{n|}} = \left(P_{x:\overline{n|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} - P_{x+1:\overline{n-1|}}\right) \cdot \ddot{a}_{x+1+t:\overline{n-1-t|}} \quad \text{-- ③}$$

ここで　$\ddot{a}_{x+1+t:\overline{n-1-t|}} \geqq 0$　であるから、　（等号は$t=n-1$のみ）

$$P_{x:\overline{n|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} - P_{x+1:\overline{n-1|}} \quad \text{-- ④}$$

の正負について調べる。

$$④ \times \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \alpha + P_{x:\overline{n|}}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - P_{x+1:\overline{n-1|}}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

$$= \alpha + A_{x:\overline{n|}} - P_{x+1:\overline{n-1|}}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

$$= \alpha + (1 - d\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}}) - \left(\frac{1}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1|}}} - d\right)\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

$$= \alpha + 1 - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1|}}}$$

$$= \alpha + 1 - \frac{1 + v\,p_x\,\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1|}}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1|}}}$$

$$= \alpha + (1 - v\,p_x) - \frac{1}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1|}}}$$

$$=\alpha+(d+v-vp_x)-\frac{1}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1|}}}$$

$$=\alpha+d+vq_x-\frac{1}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1|}}}$$

$$=\alpha-\left(\frac{1}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1|}}}-d-vq_x\right)$$

$$=\alpha-(P_{x+1:\overline{n-1|}}-P^{\ 1}_{x:\overline{1|}}) \quad \text{-----------------------------} ⑤$$

題意の条件より　$\alpha>P_{x+1:\overline{n-1|}}-P^{\ 1}_{x:\overline{1|}}$　であるから、⑤は正である。

従って④は正である。

$$\therefore \ {}_tV_{x+1:\overline{n-1|}}-{}_{t+1}V'_{x:\overline{n|}}>0$$

$$\therefore \ {}_tV_{x+1:\overline{n-1|}}>{}_{t+1}V'_{x:\overline{n|}}$$

（以　　上）

5．B（1）第t保険年度始における年度末将来法責任準備金の現価は

$$v\cdot\frac{l_{x+t}}{l_{x+t-1}}\cdot {}_tV_x^j$$　　と書ける。

また、題意により過去勤務債務が償却されており、かつ、死亡給付および脱退給付は0であるから、これは、年始の積立金${}_{t-1}V_x^j$と年払純保険料${}_tP_x^j$の和に等しい。よって生存保険のファクラーの公式が成り立つことを意味する。

$$\therefore \ v\cdot\frac{l_{x+t}}{l_{x+t-1}}\cdot {}_tV_x^j={}_{t-1}V_x^j+{}_tP_x^j$$

（2）（1）の式を移項すると

$$ {}_tP_x^j = v \cdot \frac{l_{x+t}}{l_{x+t-1}} \cdot {}_tV_x^j - {}_{t-1}V_x^j $$

右辺に題意の条件を代入すると

$$ {}_tP_x^j = v \cdot \frac{l_{x+t}}{l_{x+t-1}} \cdot \frac{D_y}{D_{x+t}} \cdot B^j(x+t) \cdot k \cdot \ddot{a}_y $$

$$ - \frac{D_y}{D_{x+t-1}} \cdot B^j(x+t-1) \cdot k \cdot \ddot{a}_y $$

$$ = \frac{D_y}{D_{x+t-1}} \cdot B^j(x+t) \cdot k \cdot \ddot{a}_y - \frac{D_y}{D_{x+t-1}} \cdot B^j(x+t-1) \cdot k \cdot \ddot{a}_y $$

$$ = \frac{D_y}{D_{x+t-1}} \cdot \{B^j(x+t) - B^j(x+t-1)\} \cdot k \cdot \ddot{a}_y $$

（以　　上）