昭和60年度（問題）

1. 次の(1)〜(10)までについて，それぞれ五つの選択肢の中から，正しいものを一つ選んで，所定の解答用紙に，例えば(A)とか(D)のように記号で記入せよ。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(40点)

(1) 次の関係式のうち成り立たないものはどれか。

(A) $\ddot{a}_x = 1 + a_x$　　(B) ${}_{n|}a_x = a_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$　　(C) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$

(D) ${}_{n|}\ddot{a}_x = {}_{n-1|}a_x$　　(E) ${}_{n|m}\ddot{a}_x = {}_{n-1|m}a_x$

(2) 終身保険の年払純保険料 $P_x = 0.0500$ であるとき $P_x^{(12)}$ は次のうちどれか。但し $v = 0.942$。

(A) 0.0535　　(B) 0.0532　　(C) 0.0529　　(D) 0.0526　　(E) 0.0523

(3) 2種類の期末払確定年金AおよびBがある。それぞれの年金額は次のとおり。

支払年度	A	B
1年度〜10年度	1	k
11年度〜20年度	2	0
21年度〜40年度	1	k

これら年金AとBの現価が等しいとき，k は次のうちどれか。但し $v^{10} = 0.5$。

(A) 1.6　　(B) 1.7　　(C) 1.8　　(D) 1.9　　(E) 2.0

(4) 次のうち正しいものはどれか。ここで死力 μ_x は単調増加するものとする。

(A) $q_{x-1} \leqq \mu_x \leqq \dfrac{1}{\mathring{e}_x}$　　(B) $\dfrac{1}{\mathring{e}_x} \leqq q_{x-1} \leqq \mu_x$　　(C) $q_{x-1} \leqq \dfrac{1}{\mathring{e}_x} \leqq \mu_x$

(D) $\mu_x \leqq q_{x-1} \leqq \dfrac{1}{\mathring{e}_x}$　　(E) $\mu_x \leqq \dfrac{1}{\mathring{e}_x} \leqq q_{x-1}$

(5) 経過 t において，年額 t の割合で支払われる n 年間の連続払確定年金の現価は次のうちどれか。

(A) $\dfrac{1}{\delta^2} - \dfrac{v^n}{\delta^2}$　　(B) $\dfrac{1}{\delta^2} - \dfrac{nv^n}{\delta}$　　(C) $\dfrac{1}{\delta^2} - \dfrac{v^n}{\delta^2} - \dfrac{nv^n}{\delta}$

(D) $\dfrac{1}{\delta^2} - \dfrac{v^n}{\delta^2} + \dfrac{nv^n}{\delta^2}$　　(E) $\dfrac{1}{\delta^2} + \dfrac{v^2}{\delta^2} - \dfrac{nv^n}{\delta}$

(6) 次の式のうち，$A_{x:\overline{n}|}$ を表わす式はどれか。

(A) $v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}$　　(B) $v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n-1}|}$　　(C) $v\ddot{a}_{x:\overline{n-1}|} - a_{x:\overline{n}|}$

(D) $v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x$　　(E) $v\ddot{a}_{x:\overline{n-1}|} - a_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x$

(7) 次の式のうち，${}_tV_x$ を表わす式はどれか。

(A) $1 - \dfrac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x+t}}$　　(B) $\dfrac{A_x - A_{x+t}}{1 - A_{x+t}}$　　(C) $\dfrac{P_{x+t} - P_x}{P_x + d}$

(D) $1 - \dfrac{1}{\ddot{a}_{x+t}}$　　(E) $\dfrac{A_{x+t} - A_x}{1 - A_x}$

(8) $P^{1}_{x:\overline{n}|} = 0.005$，$P_{x:\overline{n}|} = 0.025$，$P_x = 0.015$ のとき ${}_nV_x$ は次のうちどれか。

(A) 0.200　(B) 0.300　(C) 0.400　(D) 0.500　(E) 0.600

(9) $A_x = 0.400$　$\ddot{a}_x = 10.6$ のとき，利率 i は次のうちのどれか。

(A) 4％　(B) 5％　(C) 6％　(D) 7％　(E) 8％

(10) 次の式のうち ${}_{n|}a_{\overline{xy}}$ を表わす式はどれか。

(A) $v^n{}_np_x a_{x+n} + v^n{}_np_y a_{y+n} - v^n{}_np_{xy} a_{x+n:y+n}$　(B) $v^n{}_np_{\overline{xy}} a_{\overline{x+n:y+n}}$

(C) $v^n{}_np_{xy} a_{\overline{x+n:y+n}}$　(D) $v^n{}_np_x a_{x+n} + v^n{}_np_y a_{y+n} - v^n{}_np_{\overline{xy}} a_{x+n:y+n}$

(E) $v^n{}_np_x a_{x+n} + v^n{}_np_y a_{y+n} - v^n{}_np_{xy} a_{\overline{x+n:y+n}}$

2. 保険期間 n，死亡保険金1（年末払）なる普通養老保険の年払平準保険料が次の式で表わされるとき，Pを求め，それが年齢に関係しないことを示せ。（20点）

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\dfrac{\ddot{s}_{\overline{\nu}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\right)C_{x+\nu-1}}{N_x - N_{x+n}} + P$$

3. 死亡法則がゴンパーツ・メーカムの法則に従うとき，$l_y = ks^y g^{c^y}$ とかける。

今，l_x，l_{x+n}，l_{x+2n}，l_{x+3n} の4個の値を既知とするとき，c を ${}_np_x$，${}_np_{x+n}$，${}_np_{x+2n}$ を用いて表わせ。また，他の係数 k，s，g の決定手順を説明せよ。

ただし，${}_np_x > {}_np_{x+n} > {}_np_{x+2n}$ とし，$c > 0$ とする。（20点）

4. $l_x = 100 - x$（$0 \leqq x < 100$），利力が δ のとき

(1) $\overline{A}_x$ を求めよ。

(2) 経過 t の死亡給付が $e^{\alpha t}$ である終身保険（保険金即時払）の加入年齢 x における一時払純保険料を求めよ。（20点）

昭和60年度　　（解答例）

1.

問題番号	解答欄
(1)	(B)
(2)	(D)
(3)	(B)
(4)	(A)
(5)	(C)
(6)	(B)
(7)	(E)
(8)	(D)
(9)	(C)
(10)	(A)

正解は上表のとおりであるが，以下問題を再掲するとともに解法を略記する。

(1)　次の関係式のうち成り立たないものはどれか。

(A)　$\ddot{a}_x = 1 + a_x$　(B)　${}_{n|}a_x = a_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$　(C)　$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$

(D)　${}_{n|}\ddot{a}_x = {}_{n-1|}a_x$　(E)　${}_{n|m}\ddot{a}_x = {}_{n-1|m}a_x$

（答）　(B)

$$ {}_{n|}a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x} $$

$$ = \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} $$

$$ = a_x - a_{x:\overline{n}|} $$

(2)　終身保険の年払純保険料 $P_x = 0.0500$ であるとき，$P_x^{(12)}$ は次のうちどれか。但し　$v = 0.942$。

(A)　0.0533　(B)　0.0531　(C)　0.0529　(D)　0.0526　(E)　0.0523

（答）　(D)

$$ P_x^{(m)} = \frac{P_x}{1 - \dfrac{m-1}{2m}(P_x + d)} $$

$m = 12$, $P_x = 0.0500$　$d = 0.058$　より

$P_x^{(12)} = 0.0526$

(3)　2種類の期末払確定年金AおよびBがある。それぞれの年金額は次のとおり。

支払回数	A	B
1回～10回	1	k
11回～20回	2	0
21回～40回	1	k

これら年金AとBの現価が等しいとき，kは次のうちどれか。

但し，$v^{10} = 0.5$。

(A)　1.6　(B)　1.7　(C)　1.8　(D)　1.9　(E)　2.0

（答）　(B)

Aの年金現価とBの年金現価が等しいことから

$$a_{\overline{40|}} + v^{10} a_{\overline{10|}} = k\,(a_{\overline{40|}} - v^{10} a_{\overline{10|}})$$

$$\therefore\quad k = \frac{a_{\overline{40|}} + v^{10} a_{\overline{10|}}}{a_{\overline{40|}} - v^{10} a_{\overline{10|}}}$$

$$= \frac{\dfrac{a_{\overline{40|}}}{a_{\overline{10|}}} + v^{10}}{\dfrac{a_{\overline{40|}}}{a_{\overline{40|}}} - v^{10}}$$

$$\fallingdotseq 1.7$$

(4)　次のうち正しいものはどれか。ここで死力μ_xは単調増加するものとする。

(A)　$q_{x-1} \leqq \mu_x \leqq \dfrac{1}{\mathring{e}_x}$　　(B)　$\dfrac{1}{\mathring{e}_x} \leqq q_{x-1} \leqq \mu_x$

(C)　$q_{x-1} \leqq \dfrac{1}{\mathring{e}_x} \leqq \mu_x$　　(D)　$\mu_x \leqq q_{x-1} \leqq \dfrac{1}{\mathring{e}_x}$

(E)　$\mu_x \leqq \dfrac{1}{\mathring{e}_x} \leqq q_{x-1}$

（答） (A)

$$q_{x-1}=\frac{1}{l_{x-1}}\int_0^1 l_{x-1+t}\mu_{x-1+t}\,dt \leqq \frac{1}{l_{x-1}}\int_0^1 l_{x-1}\mu_x=\mu_x$$

$$\mu_x\mathring{e}_x=\mu_x\int_0^\infty {}_tp_x\,dt=\int_0^\infty {}_tp_x\mu_x\,dt \leqq \int_0^\infty {}_tp_x\mu_{x+t}\,dt=1$$

$$\therefore\quad q_{x-1}\leqq \mu_x \leqq \frac{1}{\mathring{e}_x}$$

(5) 経過 t において，年額 t の割合で支払われる n 年間の連続払確定年金の現価は次のうちどれか。

(A) $\dfrac{1}{\delta^2}-\dfrac{v^n}{\delta^2}$　(B) $\dfrac{1}{\delta^2}-\dfrac{nv^n}{\delta}$　(C) $\dfrac{1}{\delta^2}-\dfrac{v^n}{\delta^2}-\dfrac{nv^n}{\delta^2}$

(D) $\dfrac{1}{\delta^2}-\dfrac{v^n}{\delta^2}+\dfrac{nv^n}{\delta^2}$　(E) $\dfrac{1}{\delta^2}+\dfrac{v^2}{\delta^2}-\dfrac{nv^n}{\delta}$

（答） (C)

求める確定年金現価を a とすると

$$a=\int_0^n tv^t\,dt$$

$$=\left[\frac{tv^t}{\log v}\right]_0^n-\int_0^n\frac{v^t}{\log v}\,dt$$

$$=\frac{nv^n}{\log v}-\left[\frac{v^t}{(\log v)^2}\right]_0^n$$

$$=\frac{1}{\delta^2}-\frac{v^n}{\delta^2}-\frac{nv^n}{\delta}$$

(6) 次の式のうち，$A_{x:\overline{n|}}$ を表わす式はどれか。

(A) $v\ddot{a}_{x:\overline{n|}}-a_{x:\overline{n|}}$　(B) $v\ddot{a}_{x:\overline{n|}}-a_{x:\overline{n-1|}}$　(C) $v\ddot{a}_{x:\overline{n-1|}}-a_{x:\overline{n|}}$

(D) $v\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - a_{x:\overline{n|}} - {}_nE_x$　　(E) $v\ddot{a}_{x:\overline{n-1|}} - a_{x:\overline{n|}} + {}_nE_x$

（答） (B)

(7) 次の式のうち ${}_tV_x$ を表わす式はどれか。

(A) $1-\dfrac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x+t}}$　　(B) $\dfrac{A_x-A_{x+t}}{1-A_{x+t}}$　　(C) $\dfrac{P_{x+t}-P_x}{P_x+d}$

(D) $1-\dfrac{1}{\ddot{a}_{x+t}}$　　(E) $\dfrac{A_{x+t}-A_x}{1-A_x}$

（答） (E)

(8) $P^1_{x:\overline{n|}} = 0.005$　$P_{x:\overline{n|}} = 0.025$　$P_x = 0.015$ のとき ${}_nV_x$ は次のうちどれか。

(A) 0.200　(B) 0.300　(C) 0.400　(D) 0.500　(E) 0.600

（答） (D)

$$P_x = P^1_{x:\overline{n|}} + P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}\ {}_nV_x$$ より

$$ {}_nV_x = \frac{P_x - P^1_{x:\overline{n|}}}{P_{x:\overline{n|}} - P^1_{x:\overline{n|}}}$$

$$= \frac{0.015-0.005}{0.025-0.005}$$

$$= 0.500$$

(9) $A_x = 0.400$　$\ddot{a}_x = 10.6$ のとき，利率 i は次のうちどれか。

(A) 4％　(B) 5％　(C) 6％　(D) 7％　(E) 8％

（答） (C)

$A_x = 1-d\ddot{a}_x$　より

$$d=\frac{1-A_x}{\ddot{a}_x}$$

$$=0.0566$$

$$i=\frac{d}{1-d}=0.06$$

(10) 次の式のうち，$n|a_{\overline{xy}}$ を表わす式はどれか。

(A) $v^n{}_np_xa_{x+n}+v^n{}_np_ya_{y+n}-v^n{}_np_{xy}a_{x+n:y+n}$

(B) $v^n{}_np_{\overline{xy}}\,a_{\overline{x+n:y+n}}$ (C) $v^n{}_np_{xy}\,a_{\overline{x+n:y+n}}$

(D) $v^n{}_np_x\,a_{x+n}+v^n{}_np_ya_{y+n}-v^n{}_np_{\overline{xy}}\,a_{x+n:y+n}$

(E) $v^n{}_np_x\,a_{x+n}+v^n{}_np_ya_{y+n}-v^n{}_np_{xy}a_{\overline{x+n:y+n}}$

（答） (A)

$n|a_{\overline{xy}}$

$=v^n{}_np_x(1-{}_np_y)a_{x+n}+v^n{}_np_y(1-{}_np_x)a_{y+n}+v^n{}_np_{xy}a_{\overline{x+n:y+n}}$

$=v^n{}_np_x(1-{}_np_y)a_{x+n}+v^n{}_np_y(1-{}_np_x)a_{y+n}$

$-v^n{}_np_{xy}(a_{x+n}+a_{y+n})+v^n{}_np_{xy}(a_{x+n}+a_{y+n}-a_{x+n:y+n})$

$=v^n{}_np_xa_{x+n}+v^n{}_np_ya_{y+n}-v^n{}_np_{xy}a_{x+n:y+n}$

2.

$$P_{x:n}=\frac{M_x-M_{x+n}+D_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}$$

$$\therefore\ P=\frac{1}{N_x-N_{x+n}}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}C_{x+\nu-1}+D_{x+n}-\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\ddot{s}_{\overline{\nu}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\right)C_{x+\nu-1}\right.$$

$$=\frac{1}{N_x-N_{x+n}}\left\{D_{x+n}+\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\sum_{\nu=1}^{n}\ddot{s}_{\overline{\nu}|}C_{x+\nu-1}\right\}$$

$$=\frac{D_x}{N_x-N_{x+n}}\left\{\frac{D_{x+n}}{D_x}+\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}\cdot D_x}\sum_{\nu=1}^{n}\ddot{s}_{\overline{\nu}|}C_{x+\nu-1}\right\}$$

$$\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}\,D_x}\sum_{\nu=1}^{n}\ddot{s}_{\overline{\nu}|}\,C_{x+\nu-1}$$

$$=\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}D_x}\sum_{\nu=1}^{n}\ddot{s}_{\overline{\nu}|}(v\,D_{x+\nu-1}-D_{x+\nu})$$

$$=\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}D_x}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}(1+\ddot{s}_{\overline{\nu-1}|})\,D_{x+\nu-1}-\sum_{\nu=1}^{n}\ddot{s}_{\overline{\nu}|}\,D_{x+\nu}\right\}$$

$$=\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}\,D_x}\left\{N_x-N_{x+n}-\ddot{s}_{\overline{n}|}D_{x+n}\right\}$$

$$=\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}-\frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$\therefore\quad P=\frac{D_x}{N_x-N_{x+n}}-\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}=\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$$

よってPは年齢に関係しない

3. $l_y=k\cdot s^y\cdot g^{c^y}$ の両辺の対数をとると。

$$\log l_y=\log k+y\log s+c^y\log g$$

題意より，以下の4式が成り立つ。

$$\begin{cases}\log l_x=\log k+x\log s+c^x\log g & \cdots\cdots ① \\ \log l_{x+n}=\log k+(x+n)\log s+c^{x+n}\log g & \cdots\cdots ② \\ \log l_{x+2n}=\log k+(x+2n)\log s+c^{x+2n}\log g & \cdots\cdots ③ \\ \log l_{x+3n}=\log k+(x+3n)\log s+c^{x+3n}\log g & \cdots\cdots ④\end{cases}$$

これから，②−①，③−②，④−③をつくると

$$\begin{cases} \log {}_np_x = n \log s + c^x(c^n - 1) \log g & \cdots\cdots ⑤ \\ \log {}_np_{x+n} = n \log s + c^{x+n}(c^n - 1) \log g & \cdots\cdots ⑥ \\ \log {}_np_{x+2n} = n \log s + c^{x+2n}(c^n - 1) \log g & \cdots\cdots ⑦ \end{cases}$$

これからさらに⑥－⑤，⑦－⑥をつくると

$$\begin{cases} \log \dfrac{{}_np_{x+n}}{{}_np_x} = c^x(c^n - 1)^2 \log g & \cdots\cdots ⑧ \\ \log \dfrac{{}_np_{x+2n}}{{}_np_{x+n}} = c^{x+n}(c^n - 1)^2 \log g & \cdots\cdots ⑨ \end{cases}$$

${}_np_x > {}_np_{x+n} > {}_np_{x+2n}$ より $\dfrac{{}_np_{x+n}}{{}_np_x} < 1$，$\dfrac{{}_np_{x+2n}}{{}_np_{x+n}} < 1$ であり，⑧，⑨の両辺は負値

である。

従って⑨／⑧＝⑩の値が計算でき，かつ⑩の両辺は正値となる。

$$\frac{\log \dfrac{{}_np_{x+2n}}{{}_np_{x+n}}}{\log \dfrac{{}_np_{x+n}}{{}_np_x}} = c^n \qquad \cdots\cdots ⑩$$

$c > 0$ であるから $c = \left(\dfrac{\log \dfrac{{}_np_{x+2n}}{{}_np_{x+n}}}{\log \dfrac{{}_np_{x+n}}{{}_np_x}} \right)^{\frac{1}{n}}$ と表せる。

c がきまると，⑧により log g がきまる。

c，log g がきまると，⑤により log s がきまる。

c，log g，log s がきまると，①により log k がきまる。

以上により順次 g，s，k の値が決定される。 （以上）

4.

(1) $\overline{A}_x=\int_0^{\infty}e^{-\delta t}{}_tp_x\mu_{x+t}\,dt$

ここで ${}_tp_x=\dfrac{l_{x+t}}{l_x}=\dfrac{100-(x+t)}{100-x}$

$$\mu_{x+t}=-\frac{1}{l_{x+t}}\ \frac{d}{dt}\,l_{x+t}$$

$$=-\frac{1}{100-(x+t)}\times(-1)$$

$$=\frac{1}{100-(x+t)}$$

$$\therefore\quad \overline{A}_x=\int_0^{100-x}e^{-\delta t}\,\frac{1}{100-x}\,dt$$

$$=\frac{1}{100-x}\int_0^{100-x}e^{-\delta t}\,dt$$

$$=\frac{1}{100-x}\left[-\frac{e^{-\delta t}}{\delta}\right]_0^{100-x}$$

$$=\frac{1}{100-x}\left(\frac{1}{\delta}-\frac{e^{-\delta(100-x)}}{\delta}\right)$$

$$=\frac{1-e^{-\delta(100-x)}}{(100-x)\delta}$$

(2) 求める一時払保険料を B_x とすると

$$B_x=\int_0^{100-x}e^{-\delta t}\ e^{\alpha t}\ {}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt$$

$$=\int_0^{100-x}e^{(\alpha-\delta)t}\,\frac{1}{100-x}\,dt$$

ⓐ $\alpha\fallingdotseq\delta$ のとき

$$B_x = \frac{1}{100-x}\left[\frac{e^{(\alpha-\delta)t}}{\alpha-\delta}\right]_0^{100-x}$$

$$= \frac{1}{100-x}\ \frac{1}{\alpha-\delta}\left(e^{(\alpha-\delta)(100-x)}-1\right)$$

ⓑ $\alpha=\delta$ のとき

$$B_x = \int_0^{100-x}\frac{1}{100-x}\,dt = \frac{1}{100-x}\Big[\,t\,\Big]_0^{100-x} = 1$$