昭和58年度（問　題）

1.　次の(1)〜(10)までについて，それぞれ五つの選択肢の中から，正しいものを一つ選んで，所定の解答用紙に，たとえば，(A)とか(D)のように，記号で記入せよ。（40点）

(1)　次の式のうちで，${}_tV_x$ を表わしていないのはどれか。

(A)　$A_{x+t}\left(1-\dfrac{P_x}{P_{x+t}}\right)$　　(B)　$1-(P_x+d)\ddot{a}_{x+t}$

(C)　$(P_{x+t}-P_x)\,a_{x+t}$　　(D)　$\dfrac{a_x-a_{x+t}}{1+a_x}$　　(E)　$\dfrac{A_{x+t}-A_x}{1-A_x}$

(2)　死力が定数 k のとき，$\bar{a}_x$は次のどの式で表わされるか。

(A)　$k+\delta$　　(B)　$k-\delta$　　(C)　$\dfrac{\delta}{k}$　　(D)　$\dfrac{1}{k-\delta}$　　(E)　$\dfrac{1}{k+\delta}$

(3)　年始の資産をA，年末の資産をB，年度内に収入した利息をIとするとき，利力 δ は次のどの式で表わされるか。ただし，利力 δ は一定で，資産は一次的に変化するものとする。

(A)　$\dfrac{2I}{A+B-I}$　　(B)　$\dfrac{2I}{A+B}$　　(C)　$\dfrac{2I}{A+B+I}$　　(D)　$\dfrac{I}{A+I}$　　(E)　$\dfrac{I}{A-I}$

(4)　$\ddot{a}_x=10$，$\ddot{a}_{x+t}=9$とするとき，${}_tV_x$ の値は次のどれか。

(A)　0.9　　(B)　0.7　　(C)　0.5　　(D)　0.3　　(E)　0.1

(5)　次の式のうちで，$\dfrac{dD_x}{dx}$ を表わしているのはどれか。

(A)　$-\bar{N}_x$　　(B)　$D_x(\mu_x+\delta)$　　(C)　$-D_x\mu_x+\delta$　　(D)　$-D_x(\mu_x-\delta)$　　(E)　$-D_x(\mu_x+\delta)$

(6)　次の式のうちで，$\dfrac{d}{di}\,a_x$ を表わしているのはどれか。

(A)　$-v\,(Ia)_x$　　(B)　$-(Ia)_x$　　(C)　$v\,(Ia)_x$　　(D)　$-v\,(Ia)_{\infty}$　　(E)　$-\delta\,(Ia)_x$

(7)　次の式のうちで，${}_tP_x^{(m)}$の近似式を与えているのはどれか。

(A)　$\dfrac{{}_tP_x}{1-\frac{m-1}{2m}d}$　　(B)　$\dfrac{{}_tP_x}{1-\frac{m-1}{2m}(P^1_{x:\overline{t}|}+d)}$　　(C)　$\dfrac{{}_tP_x}{1-\frac{m-1}{2m}d-\frac{1}{2}P^1_{x:\overline{t}|}}$

(D)　$\dfrac{{}_tP_x}{1-\frac{m-1}{2m}(P^1_{x:\overline{t}|}-d)}$　　(E)　$\dfrac{{}_tP_x}{1-\frac{m-1}{2m}d+\frac{1}{2}P^1_{x:\overline{t}|}}$

(8)　次の式のうちで，${}_nq_{\overline{xy}}$ を表わしているのはどれか。

(A)　${}_nq_x+{}_nq_y$　　(B)　${}_nq_x+{}_nq_y+{}_nq_{xy}$　　(C)　${}_nq_x+{}_nq_y-{}_nq_{xy}$

(D)　${}_nq_x+{}_nq_y+2\,{}_nq_{xy}$　　(E)　${}_nq_x+{}_nq_y-2\,{}_nq_{xy}$

(9) 次の記述のうちで，μ_xについて正しい内容のものはどれか。

(A) $\mu_x < 0$となることがある。　(B) 常に$0 \leqq \mu_x \leqq 1$である。

(C) 常に$\mu_x < q_x$である。　(D) 常に$\mu_x \leqq 1$とは限らない。

(E) 常に$\mu_x > q_x$である。

(10) $a_x = 12.36$，$A_x = 0.738$のとき，iの値は次のどれか。

(A) 6.0％　(B) 5.5％　(C) 2.0％　(D) 6.5％　(E) 2.5％

2. 次の内容の保険契約にx歳（$x < y$）で加入した契約者（被保険者と同一人とする）の支払うべき年払純保険料と，その契約の保険年度末責任準備金を表わす算式を求めよ。

(1) 年金開始年齢（y歳）に到達する前に被保険者が死亡した場合，その保険年度末を第一回目として毎年年額２の確定遺族年金を10年間支払う。

(2) 被保険者が年金開始年齢まで生存した場合，年金開始年齢到達時を第一回目として，毎年年額１の10年保証付終身年金（年始払）を支払う。

(3) 保険料払込期間は，年金開始年齢までとする。

（20点）

3. 日本全会社生命表（1972～'76)(男)の利率５％による基数が次のように与えられたとき，同計算基礎による$(IA)_{30}$の値を求めよ。（小数点第５位を４捨５入）

$D_{30} = 22{,}445$　$N_{30} = 409{,}509$　$S_{30} = 6{,}344{,}221$

（20点）

4. 二種類の死亡表の死亡率$\{q_x\}$，$\{q'_x\}$の間につねに

$$q'_x = q_x + \frac{k}{\ddot{a}_{x+1}}$$

なる関係があるとき，

$$P'_x = P_x + \frac{vk}{\ddot{a}_x}$$

が成り立つことを示せ。

ここにP_x，P'_xはそれぞれ$\{q_x\}$，$\{q'_x\}$によって計算された終身保険の保険料とする。

（20点）

昭和58年度（解答例）

1.

問題番号	解 答 欄
(1)	C
(2)	E
(3)	B
(4)	E
(5)	E
(6)	A
(7)	B
(8)	C
(9)	D
(10)	C

正解は上表のとおりであるが，以下問題を再掲すると共に，解法を略記する。

(1) 次の式のうちで，${}_tV_x$ を表わしていないのはどれか。

(A) $A_{x+t}\left(1-\dfrac{P_x}{P_{x+t}}\right)$　　(B) $1-(P_x+d)\ddot{a}_{x+t}$

(C) $(P_{x+t}-P_x)a_{x+t}$　　(D) $\dfrac{a_x-a_{x+t}}{1+a_x}$　　(E) $\dfrac{A_{x+t}-A_x}{1-A_x}$

（解） (C)

$$
{}_tV_x = A_{x+t}-P_x\ddot{a}_{x+t} = A_{x+t}\left(1-\frac{\ddot{a}_{x+t}}{A_{x+t}}P_x\right) = A_{x+t}\left(1-\frac{P_x}{P_{x+t}}\right)
$$

$$
=(1-d\ddot{a}_{x+t})-P_x\ddot{a}_{x+t} = 1-(P_x+d)\ddot{a}_{x+t}
$$

$$
=1-\frac{1}{\ddot{a}_x}\ddot{a}_{x+t} = 1-\frac{1+a_{x+t}}{1+a_x} = \frac{a_x-a_{x+t}}{1+a_x}
$$

$$
=\frac{A_{x+t}-A_x}{1-A_x} \qquad \left(\because\ \ddot{a}_x=\frac{1-A_x}{d}\right)
$$

$$
=P_{x+t}\ddot{a}_{x+t}-P_x\ddot{a}_{x+t} = (P_{x+t}-P_x)(1+a_{x+t})
$$

(2) 死力が定数 k のとき，$\bar{a}_x$ は次のどの式で表わされるか。

(A) $k+\delta$　(B) $k-\delta$　(C) $\dfrac{\delta}{k}$　(D) $\dfrac{1}{k-\delta}$　(E) $\dfrac{1}{k+\delta}$

（解） (E)

$$\bar{A}_x = 1-\delta\bar{a}_x\text{，一方 } \bar{A}_x = \int_0^\infty v^t {}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt = k\int_0^\infty v^t {}_tp_x\,dt = k\bar{a}_x$$

$$\therefore\ k\bar{a}_x = 1-\delta\bar{a}_x \qquad \therefore\ \bar{a}_x = \frac{1}{k+\delta}$$

(3) 年始の資産をA，年末の資産をB，年度内に収入した利息をIとするとき，利力 δ は次のどの式で表わされるか。ただし，利力 δ は一定で，資産は一次的に変化するものとする。

(A) $\dfrac{2\mathrm{I}}{\mathrm{A+B-I}}$　(B) $\dfrac{2\mathrm{I}}{\mathrm{A+B}}$　(C) $\dfrac{2\mathrm{I}}{\mathrm{A+B+I}}$　(D) $\dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{A+I}}$　(E) $\dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{A-I}}$

（解） (B)

$$f(t) = \alpha+\beta t \text{ とすると } f(0) = \alpha = \mathrm{A},\ f(1) = \alpha+\beta = \mathrm{B}$$

$$\mathrm{I} = \int_0^1 f(t)\delta\,dt = \delta\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right) = \delta\frac{\mathrm{A+B}}{2} \qquad \therefore\ \delta = \frac{2\mathrm{I}}{\mathrm{A+B}}$$

(4) $\ddot{a}_x = 10$，$\ddot{a}_{x+t} = 9$ とするとき，${}_tV_x$ の値は次のどれか。

(A) 0.9　(B) 0.7　(C) 0.5　(D) 0.3　(E) 0.1

（解） (E)

$${}_tV_x = 1-\frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} = 1-\frac{9}{10} = 1-0.9 = 0.1$$

(5) 次の式のうちで，$\dfrac{d\mathrm{D}_x}{dx}$ を表わしているのはどれか。

(A) $-\bar{\mathrm{N}}_x$　(B) $\mathrm{D}_x(\mu_x+\delta)$　(C) $-\mathrm{D}_x\mu_x+\delta$　(D) $-\mathrm{D}_x(\mu_x-\delta)$　(E) $-\mathrm{D}_x(\mu_x+\delta)$

（解） (E)

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{D}_x}{dx} &= \frac{d}{dx}(v^x l_x) = v^x\frac{dl_x}{dx}+l_x\frac{dv^x}{dx}\\ &= -v^x l_x\mu_x - v^x l_x\delta \qquad \left(\because\ \frac{dv^x}{dx} = v^x\log v = -v^x\delta\right)\\ &= -v^x l_x(\mu_x+\delta)\\ &= -\mathrm{D}_x(\mu_x+\delta)\end{aligned}$$

(6) 次の式のうちで，$\frac{d}{di}a_x$ を表わしているのはどれか。

(A) $-v(\mathrm{I}a)_x$　(B) $-(\mathrm{I}a)_x$　(C) $v(\mathrm{I}a)_x$　(D) $-v(\mathrm{I}a)_\infty$　(E) $-\delta(\mathrm{I}a)_x$

（解） (A)

$$\frac{d}{di}a_x=\frac{d}{di}\left[\sum_{t=1}^{\infty}v^t{}_tp_x\right]=\frac{d}{di}\left[\sum_{t=1}^{\infty}(1+i)^{-t}{}_tp_x\right]$$

$$=\sum_{t=1}^{\infty}-t(1+i)^{-t-1}{}_tp_x=-v\sum_{t=1}^{\infty}tv^t{}_tp_x=-v(\mathrm{I}a)_x$$

(7) 次の式のうちで，${}_t\mathrm{P}_x^{(m)}$ の近似式を与えているのはどれか。

(A) $\dfrac{{}_t\mathrm{P}_x}{1-\dfrac{m-1}{2m}d}$　(B) $\dfrac{{}_t\mathrm{P}_x}{1-\dfrac{m-1}{2m}(\mathrm{P}^1_{x:\overline{t|}}+d)}$　(C) $\dfrac{{}_t\mathrm{P}_x}{1-\dfrac{m-1}{2m}d-\dfrac{1}{2}\mathrm{P}^1_{x:\overline{t|}}}$

(D) $\dfrac{{}_t\mathrm{P}_x}{1-\dfrac{m-1}{2m}(\mathrm{P}^1_{x:\overline{t|}}-d)}$　(E) $\dfrac{{}_t\mathrm{P}_x}{1-\dfrac{m-1}{2m}d+\dfrac{1}{2}\mathrm{P}^1_{x:\overline{t|}}}$

（解） (B)

終身保険の場合の $\mathrm{P}_x^{(m)}\fallingdotseq\mathrm{P}_x+\frac{m-1}{2m}\mathrm{P}_x^{(m)}\mathrm{P}_x+\frac{m-1}{2m}\mathrm{P}_x^{(m)}d$ において，有限払込であれば死亡年度の保険料損失は保険料払込期間に限るから。また，(A)は ${}_t\mathrm{P}_x^{[m]}$，(C)は ${}_t\mathrm{P}_x^{(m)}$ の近似で，(D)，(E)は(B)と(C)の一部符号を代えたもの。

(8) 次の式のうちで，${}_nq_{\overline{xy}}$ を表わしているのはどれか。

(A) ${}_nq_x+{}_nq_y$　(B) ${}_nq_x+{}_nq_y+{}_nq_{xy}$　(C) ${}_nq_x+{}_nq_y-{}_nq_{xy}$

(D) ${}_nq_x+{}_nq_y+2{}_nq_{xy}$　(E) ${}_nq_x+{}_nq_y-2{}_nq_{xy}$

（解） (C)

${}_nq_{\overline{xy}}={}_nq_x\cdot{}_nq_y=(1-{}_np_x)(1-{}_np_y)=1-({}_np_x+{}_np_y)+{}_np_{xy}=$ (C)

(9) 次の記述のうちで，μ_x について正しい内容のものはどれか。

(A) $\mu_x<0$ となることがある。　(B) 常に $0\leqq\mu_x\leqq1$ である。

(C) 常に $\mu_x<q_x$ である。　(D) 常に $\mu_x\leqq1$ とは限らない。

(E) 常に $\mu_x>q_x$ である。

（解） (D)

明らかに(A)は間違いで，$\mu_x>1$ となることがあるのは良く知られた事実であるから，(B)は間違いで，(D)は正しい。以下で(C)と(E)につき調べる。

$l_x q_x=\int_0^1 l_{x+t}\mu_{x+t}dt$ であり，$l_{x+t}\mu_{x+t}$ が増加・減少に従って $q_x>\mu_x$，$q_x<\mu_x$ である。$\left(\because\right.$ 増加 ⇨ $l_x q_x=\int_0^1 l_{x+t}\mu_{x+t}dt>l_x\mu_x$ ⇨ $q_x>\mu_x$，減少 ⇨ $l_x q_x<l_x\mu_x$ ⇨ $\left.q_x<\mu_x\right)$

ところで，$l_x\mu_x=-\dfrac{dl_x}{dx}$ だから $l_x\mu_x$ の増加・減少は l_x 曲線の凹凸により判定される。従って $q_x>\mu_x$ となることも $q_x<\mu_x$ となることもある。よって，(C)も(E)も間違い。

(10) $a_x=12.36$，$\mathrm{A}_x=0.738$ のとき，i の値は次のどれか。

(A) 6.0％　(B) 5.5％　(C) 2.0％　(D) 6.5％　(E) 2.5％

（解） (C)

$$\mathrm{A}_x=1-d\ddot{a}_x=1-d(1+a_x)$$

$$\therefore\quad v=\frac{1}{1+i}=1-d=1-\frac{1-\mathrm{A}_x}{1+a_x}=\frac{\mathrm{A}_x+a_x}{1+a_x}$$

$$\therefore\quad 1+i=\frac{1+a_x}{\mathrm{A}_x+a_x}=\frac{13.36}{13.098}=1.020003053\qquad\therefore\quad i\fallingdotseq 0.02$$

2. (1) 年払純保険料（Pとおく）

収入 ： $\mathrm{P}\ddot{a}_{x:\overline{y-x|}}$

支出 ： (1)の給付 $\dfrac{2\ddot{a}_{\overline{10|}}}{\mathrm{D}_x}\sum_{t=0}^{y-x-1}C_{x+t}$

(2)の給付 $\dfrac{\mathrm{D}_y}{\mathrm{D}_x}\left(\ddot{a}_{\overline{10|}}+\dfrac{\mathrm{D}_{y+10}}{\mathrm{D}_y}\ddot{a}_{y+10}\right)$

$$\therefore\quad \mathrm{P}=\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{y-x|}}}\left\{\frac{2\ddot{a}_{\overline{10|}}}{\mathrm{D}_x}\sum_{t=0}^{y-x-1}C_{x+t}+\frac{\mathrm{D}_y}{\mathrm{D}_x}\left(\ddot{a}_{\overline{10|}}+\frac{\mathrm{D}_{y+10}}{\mathrm{D}_y}\ddot{a}_{y+10}\right)\right\}$$

(2) 保険年度末責任準備金

(a) $t<y-x$

契約者生存 $${}_tV=\frac{2\ddot{a}_{\overline{10|}}}{\mathrm{D}_x}\sum_{k=t}^{y-x-1}c_{x+k}+\frac{\mathrm{D}_y}{\mathrm{D}_{x+t}}\left(\ddot{a}_{\overline{10|}}+\frac{\mathrm{D}_{y+10}}{\mathrm{D}_y}\ddot{a}_{y+10}\right)-\mathrm{P}\ddot{a}_{x+t:\overline{y-x-t|}}$$

契約者死亡（死亡が第 l 保険年度中とする）

$$
{}_tV = \begin{cases} 2a_{\overline{9-(t-l)}|} & t-l < 10 \\ 0 & t-l \geqq 10 \end{cases}
$$

(b) $t \geqq y-x$

契約者生存
$$
{}_tV = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{10-(t-y+x)}|} + \dfrac{D_{y+10}}{D_{y+t}} \ddot{a}_{y+10} & t \leqq y-x+10 \\ \ddot{a}_{x+t} & t > y-x+10 \end{cases}
$$

契約者死亡　${}_tV = 0$

3. $M_x = vN_x - N_{x+1}$ より $R_x = vS_x - S_{x+1}$

また，$S_{x+1} = S_x - N_x$

したがって，

$$
(IA)_{30} = \frac{R_{30}}{D_{30}} = \frac{vS_{30} - S_{31}}{D_{30}} = \frac{N_{30} - (1-v)S_{30}}{D_{30}} = 4.7852
$$

4. $P'_x - P_x = \left(\dfrac{1}{\ddot{a}'_x} - d\right) - \left(\dfrac{1}{\ddot{a}_x} - d\right) = \dfrac{1}{\ddot{a}'_x} - \dfrac{1}{\ddot{a}_x}$

従って，　$\dfrac{1}{\ddot{a}'_x} - \dfrac{1}{\ddot{a}_x} = \dfrac{vk}{\ddot{a}_x}$

すなわち　$\ddot{a}_x = \ddot{a}'_x(1+vk)$　　　　……①

を証明すればよい。

$$\ddot{a}_x = 1 + v p_x \ddot{a}_{x+1} \qquad \cdots\cdots②$$

$$\ddot{a}'_x = 1 + v p'_x \ddot{a}'_{x+1} \qquad \cdots\cdots③$$

と変形できる。

また，　$p_x - p'_x = q'_x - q_x = \dfrac{k}{\ddot{a}_{x+1}}$　　　　……④

④を②に代入して　$\ddot{a}_x = 1 + v(p'_x \ddot{a}_{x+1} + k)$　　　　……⑤

⑤－③　　$\ddot{a}_x - \ddot{a}'_x = v p'_x (\ddot{a}_{x+1} - \ddot{a}'_{x+1}) + vk$

両辺に D'_x を掛けると

$$D'_x(\ddot{a}_x - \ddot{a}'_x) = D'_{x+1}(\ddot{a}_{x+1} - \ddot{a}'_{x+1}) + vkD'_x$$

同様にして

$$D'_{x+1}(\ddot{a}_{x+1}-\ddot{a}'_{x+1}) = D'_{x+2}(\ddot{a}_{x+2}-\ddot{a}'_{x+2})+vkD'_{x+1}$$

$$D'_{x+2}(\ddot{a}_{x+2}-\ddot{a}'_{x+2}) = D'_{x+3}(\ddot{a}_{x+3}-\ddot{a}'_{x+3})+vkD'_{x+2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

辺々加えると

$$D'_x(\ddot{a}_x-\ddot{a}'_x) = vkN'_x$$

$$\therefore\quad \ddot{a}_x-\ddot{a}'_x = vk\ddot{a}'_x$$

すなわち①が証明された。