昭和57年度（問　題）

1. ある定常人口の社会で，毎年の死亡数は4,000であり，毎年の出生率は2％である。また，年齢25歳までの人口は総人口の40％に等しく，かつ，25歳未満で死亡する人の死亡時の平均年齢は5歳である。

(1) 出生時の平均余命　(2) 25歳以上の総人口　(3) 毎年25歳に達する人の数

(4) 25歳以上の総人口の平均死亡率

を求めよ。ここに，出生率とはその年の中央の総人口に対するその年の出生数の比である。

2. 死亡率を変更した時，定期保険において（保険金年末払）

(1) $\Delta P' = \dfrac{1}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{D'_{x+k}}{D'_x} v\ \Delta q_{x+k}\ (1 - {}_{k+1}V)$,　　$\Delta_t V = \dfrac{1}{D'_{x+t}} \sum_{k=0}^{t-1} D'_{x+k} \{\Delta P - v\,\Delta q_{x+k}\ (1 - {}_{k+1}V)\}$

を証明せよ。

(2) 変更前死亡率 $\{q_{x+t}\}$ を粗死亡率（安全割増前），変更後死亡率 $\{q'_{x+t}\}$ を安全割増後の死亡率とする。このとき ΔP，$\Delta_t V$ の意味を言葉で説明せよ。

3. 保険期間 n の連続払の変額保険で，保険金，保険料とも変額する場合，死亡保険金を F_t，満期保険金を F_n

$F_t = F_0 e^{\int_0^t (\delta'_s - \delta)\,ds}$ ：保険金の変額価格（$F_0 = 1$）　δ ：予定利力（一定），　δ'_t ：実際利力

$\overline{V}_t$ ：養老保険（保険金1，保険期間 n）の責任準備金，　$\overline{V}'_t$ ：変額保険の責任準備金

$\overline{P}$ ：養老保険の保険料（一定），　$\overline{P}'_t$ ：変額保険の保険料

として　$\overline{P}'_t = \overline{P} \cdot e^{\int_0^t (\delta'_s - \delta)\,ds}$ という関係があるとき

$\overline{V}'_t = \overline{V}_t \cdot e^{\int_0^t (\delta'_s - \delta)\,ds}$

を証明せよ。

4. 保険金期末払の年払終身保険において，純保険料式責任準備金 V_t が

$$V_t = \frac{hP^r_t - kv + kP^s_t}{P^r_t - k}$$

と表わされるとき，q_{x+t} を求め，V_t を q_{x+t}，h，k のみを用いて示せ。

また，$q_{x+t} = \dfrac{P^r_t - k}{P^r_t - c}$　のとき，年払純保険料 P は　$P = v - h + c$　となることを示せ。

ここに，P^r_t，P^s_t はそれぞれ，危険保険料，蓄積保険料を示すものとする。

5. ある二重脱退残存表で，$q_x^{(1)}$ は常に0.05，$q_{40}^{(2)}$ は0.005，$x \geqq 40$ に対して $d_x^{(2)}$ は一定とする。

この表の最終年齢を求めよ。必要ならば，つぎの数値を用いよ。

$\log_{10} 5 = 0.69897$，$\log_{10} 1.1 = 0.04139$，$\log_{10} 9.5 = 0.97772$，$\log_{10} 9.95 = 0.99782$

昭和57年度（解答例）

1\. $l_0 = 4,000$ （＝定常人口社会の毎年の死亡数＝毎年の出生数）

$$\frac{l_0}{T_0} = 2\%$$ （＝毎年の出生率）

$$\therefore \quad T_0 = 200,000$$

(1) $\mathring{e}_0 = \dfrac{T_0}{l_0} = 50$

$T_0 - T_{25} = T_0 \times 40\%$ より

(2) $T_{25} = 120,000$

$$\frac{T_0 - T_{25} - 25 l_{25}}{l_0 - l_{25}} = 5$$ （＝25歳未満で死亡する人の死亡時の平均年齢）

これより　$80,000 - 25 l_{25} = 20,000 - 5 l_{25}$　従って

(3) $l_{25} = 3,000$

(4) 25歳以上の総人口の平均死亡率 $= \dfrac{l_{25}}{T_{25}} = 0.025$

2\. (1) ${}_tV' + P' = vq'_{x+t} + vp'_{x+t} \cdot {}_{t+1}V'$　よって

$${}_tV + \varDelta_t V + P + \varDelta P = v(q_{x+t} + \varDelta q_{x+t}) + v(p_{x+t} + \varDelta p_{x+t})({}_{t+1}V + \varDelta_{t+1}V)$$

ここで　${}_tV + P = vq_{x+t} + vp_{x+t} \cdot {}_{t+1}V$　に注意すると，上式は

$$\varDelta_t V + \varDelta P = v \cdot \varDelta q_{x+t} + v(\varDelta p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V + p'_{x+t} \cdot \varDelta_{t+1}V)$$

ここで　$\varDelta p_{x+t} = -\varDelta q_{x+t}$　なので

$$\varDelta_t V + \varDelta P = v \cdot \varDelta q_{x+t}(1 - {}_{t+1}V) + vp'_{x+t} \cdot \varDelta_{t+1}V$$

両辺に　$v^{x+t} l'_{x+t}\,(t = 0, 1, \cdots, t-1)$　をかけて辺々加えると

$$D'_x \cdot \varDelta_0 V + \varDelta P \cdot \sum_{k=0}^{t-1} D'_{x+k} = \sum_{k=0}^{t-1} D'_{x+k} v \varDelta q_{x+k}(1 - {}_{k+1}V) + D'_{x+t} \cdot \varDelta_t V$$

$\varDelta_0 V = 0$　に注意して

$$\varDelta_t V = \frac{1}{D'_{x+t}} \left\{ \varDelta P \sum_{k=0}^{t-1} D'_{x+k} - \sum_{k=0}^{t-1} D'_{x+k} v \varDelta q_{x+k}(1 - {}_{k+1}V) \right\}$$

ここで $t=n$ とおくと $\Delta_n V=0$，そこで上式より

$$\Delta P=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} D'_{x+k}}\sum_{k=0}^{n-1} D'_{x+k}\, v\Delta q_{x+k}\,(1-{}_{k+1}V)$$

$$=\frac{1}{\ddot{a}'_{x:\overline{n|}}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{D'_{x+k}}{D'_x}\, v\Delta q_{x+k}\,(1-{}_{k+1}V)$$

(2) ΔP： 各保険年度の危険保険金を保険金とし，割増死亡率 Δq を死亡率とする死亡費用に対する平準保険料。

$\Delta_t V$： 各保険年度の危険保険金を保険金とし，割増死亡率 Δq を死亡率とする死亡費用を平準保険料で徴収する場合の責任準備金。

3. 題意により，変額保険について

$$\frac{d(l_{x+\tau}\overline{V}'_\tau)}{d\tau}=l_{x+\tau}\overline{P}'_\tau+\delta'_\tau l_{x+\tau}\overline{V}'_\tau-l_{x+\tau}\mu_{x+\tau}F_\tau$$

が成立するが，これより

$$-\mu_{x+\tau}\overline{V}'_\tau+\frac{d\overline{V}'_\tau}{d\tau}=\overline{P}'_\tau+\delta'_\tau\overline{V}'_\tau-\mu_{x+\tau}F_\tau$$

さらに

$$\frac{d\overline{V}'_\tau}{d\tau}-(\mu_{x+\tau}+\delta'_\tau)\overline{V}'_\tau=\overline{P}'_\tau-\mu_{x+\tau}F_\tau \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

ここで

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\overline{V}'_\tau e^{-\int_0^\tau(\mu_{x+s}+\delta'_s)ds}\right\}$$

$$=e^{-\int_0^\tau(\mu_{x+s}+\delta'_s)ds}\,\frac{d\overline{V}'_\tau}{d\tau}-e^{-\int_0^\tau(\mu_{x+s}+\delta'_s)ds}\,(\mu_{x+\tau}+\delta'_\tau)\overline{V}'_\tau$$

$${}_tp_x=e^{-\int_0^t\mu_{x+s}ds}$$

に注意して

①の両辺に $e^{-\int_0^\tau(\mu_{x+s}+\delta'_s)ds}$ をかけて，0から t まで積分すると

$$\overline{V}_t' \cdot {}_tp_x \cdot e^{-\int_0^t \delta_s' ds} = \int_0^t (\overline{P}_\tau' - \mu_{x+\tau} F_\tau)\ {}_\tau p_x\, e^{-\int_0^\tau \delta_s' ds}\, d\tau \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$F_t = F_0 e^{\int_0^t (\delta_s' - \delta) ds}$， $F_0 = 1$ に注意すると，②は

$$\overline{V}_t' \cdot {}_tP_x \cdot e^{-\int_0^t \delta_s' ds} = \int_0^t P_\tau' \cdot {}_\tau p_x e^{-\int_0^\tau \delta_s' ds}\, d\tau - \int_0^t \mu_{x+\tau} \cdot {}_\tau p_x \cdot e^{-\int_0^\tau \delta ds}\, d\tau$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

さらに $\overline{P}_t' = \overline{P} \cdot e^{\int_0^t (\delta_s' - \delta) ds}$ に注意すると，③は

$$\overline{V}_t' \cdot {}_tp_x \cdot e^{-\int_0^t \delta_s' ds} = \int_0^t \overline{P} \cdot {}_\tau p_x \cdot e^{-\int_0^\tau \delta ds}\, d\tau - \int_0^t \mu_{x+\tau} \cdot {}_\tau p_x \cdot e^{-\int_0^\tau \delta ds}\, d\tau$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

養老保険についても，②と同様の式が成り立つ。即ち

$$\overline{V}_t \cdot {}_\tau p_x \cdot e^{-\int_0^t \delta ds} = \int_0^t (\overline{P} - \mu_{x+\tau})\, {}_\tau p_x e^{-\int_0^\tau \delta ds}\, d\tau \quad \text{これは}$$

$$= \int_0^t \overline{P} \cdot {}_\tau p_x \cdot e^{-\int_0^\tau \delta ds}\, d\tau - \int_0^t \mu_{x+\tau} \cdot {}_\tau p_x \cdot e^{-\int_0^\tau \delta ds}\, d\tau$$

この式と④をくらべて

$$\overline{V}_t' \cdot {}_tp_x \cdot e^{-\int_0^t \delta_s' ds} = \overline{V}_t \cdot {}_tp_x \cdot e^{-\int_0^t \delta ds}$$

$$\therefore \quad \overline{V}_t' = \overline{V}_t \cdot e^{\int_0^t (\delta_s' - \delta) ds}$$

4. $P_t^r = vq_{x+t}(1 - V_{t+1})$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ①

$P_t^s = vV_{t+1} - V_t$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ②

②より $V_{t+1} = \dfrac{P_t^s + V_t}{v}$，これを①に代入すれば

$P_t^r = q_{x+t}(v - P_t^s - V_t)$ 　これより

$$V_t = v - P_t^s - \frac{P_t^r}{q_{x+t}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

一方 q_{x+t} について解くと

$$q_{x+t} = \frac{P_t^r}{v - P_t^s - V_t}$$ この式に $V_t = \dfrac{hP_t^r - kv + kP_t^s}{P_t^r - k}$ を代入すると

$$q_{x+t}=\frac{P_t^r}{v-P_t^s-\dfrac{hP_t^r-kv+kP_t^s}{P_t^r-k}}$$

$$=\frac{P_t^r(P_t^r-k)}{(v-P_t^s)(P_t^r-k)-hP_t^r+kv-kP_t^s}$$

$$=\frac{P_t^r(P_t^r-k)}{vP_t^r-kv-P_t^rP_t^s+kP_t^s-hP_t^r+kv-kP_t^s}$$

$$=\frac{P_t^r(P_t^r-k)}{P_t^r(v-P_t^s-h)}$$

$$\therefore\quad q_{x+t}=\frac{P_t^r-k}{v-P_t^s-h} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

③, ④よりP_t^r, P_t^s を消去すると

$$V_t = h-\frac{k}{q_{x+t}}$$

$P=P_t^r+P_t^s$ であるが，これを P_t^s について解き，④に代入すると

$$q_{x+t}=\frac{P_t^r-k}{v-(P-P_t^r)-h}$$

$$\therefore\quad q_{x+t}=\frac{P_t^r-k}{P_t^r-(P+h-v)}$$

題意により　$c=P+h-v$　これより

$$P=v-h+c$$

5.

$$d_x^{(1)}=0.05\,l_x$$

$$d_x^{(2)}=d_{40}^{(2)}=0.005\,l_{40} \qquad (x\geqq 40)$$

$$\therefore\quad l_{41}=l_{40}-0.05\,l_{40}-0.005\,l_{40}$$

$$=l_{40}(0.95-0.005)$$

$$l_{42}=l_{40}(0.95-0.005)-0.05\,l_{40}(0.95-0.005)-0.005\,l_{40}$$

$$=l_{40}\{0.95(0.95-0.005)-0.005\}$$

$$l_{43}=l_{40}\{0.95(0.95-0.005)-0.005\}-0.05\,l_{40}\{0.95(0.95-0.005)$$

$$-0.005\} - 0.005\, l_{40}$$

$$l_{43} = l_{40}[\,0.95\,\{0.95\,(0.95-0.005)-0.005\}-0.005\,]$$

$$= l_{40}\{\,0.95^3 - 0.005(1+0.95+0.95^2)\}$$

$$\vdots$$

$$l_{40+t} = l_{40}\{\,0.95^t - 0.005\,(1+0.95+0.95^2+\cdots+0.95^{t-1})\}$$

$$= l_{40}\left(0.95^t - 0.005\times\frac{1-0.95^t}{1-0.95}\right)$$

$l_{40+t} = 0$　とすると

$$0.95^t = 0.005\times\frac{1-0.95^t}{1-0.95}$$

$$0.95^t = 0.1(1-0.95^t)$$

$$0.95^t \times 11 = 1$$

$$t\,log_{10}0.95 = log_{10}\frac{1}{11}$$

$$t = \frac{-1.04139}{0.97772-1}$$

$$= 46.7$$

∴　この表の最終年齢 $= 40+47$

$$= 87$$