昭和53年度（問　題）

1. 容器の中に，1からNまでの番号のついたボールが入っている。1個抜取っては元に戻すというランダムな復元抜取りをn回繰返したときの最大番号をXとする。このとき，Xの平均値$E(X)$を求め，Nが大なるとき，近似的に

$$E(X) \approx \frac{n}{n+1} N$$

となることを示せ。

2. 1からnまでの番号をつけたカードをランダムに並べる。カードの番号とカードの置かれている順番とが一致するカードの枚数を表わす確率変数をS_nとするとき，S_nの平均値と分散を求めよ。

3. XとYを，互に独立でいずれも次の確率密度関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} \ (x > 0) \\ 0 \quad (x \leqq 0) \end{cases}$$

をもつ確率変数とするとき，

$$U = X + Y, \qquad V = \frac{X}{X+Y}$$

とすれば，UとVは互に独立な確率変数となることを示せ。

4. 指数分布に従う確率変数Xの積率母関数または特性関数を求め，これを用いてXの平均値と分散を求めよ。

5. 確率変数Xの分布関数を$F(x)$とするとき，確率変数$F(X)$の確率密度関数を求めよ。ただし，$F(x)$は狭義単調増加かつ連続とする。

昭和53年度（解答例）

1.　$X \leqq k$ は，n 個の番号のいずれもが k 以下であることを示すから

$$P(X \leqq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

である。従って，

$$p_k \equiv P(X = k) = P(X \leqq k) - P(X \leqq k-1)$$

$$= \frac{1}{N^n}\{k^n - (k-1)^n\}$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{N} k p_k = \frac{1}{N^n}\sum_{k=1}^{N}\{k^{n+1} - k(k-1)^n\}$$

$$= \frac{1}{N^n}\sum_{k=1}^{N}\{k^{n+1} - (k-1)^{n+1} - (k-1)^n\}$$

$$= \frac{1}{N^n}\{N^{n+1} - \sum_{k=1}^{N}(k-1)^n\}$$

$$= N\left\{1 - \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k-1}{N}\right)^n \frac{1}{N}\right\}$$

$$\approx N\left(1 - \int_0^1 x^n\,dx\right) = N\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = N\frac{n}{n+1}$$

2.　$X_k = \begin{cases} 1, & \text{番号}k\text{ のカードが}k\text{ 番目にあるとき} \\ 0, & \text{番号}k\text{ のカードが}k\text{ 番目にないとき} \end{cases}$

で確率変数 X_k を定義すると，

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n$$

であることは明らかである。さて，

$$P(X_k = 1) = \frac{1}{n}\ , \quad P(X_k = 0) = \frac{n-1}{n}$$

であるから，

$$E(X_k) = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$E(X_k^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{n} + 0^2 \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

また，積　$X_i X_j\ (i \neq j)$ の値は 1 または 0 で，1 となるのは X_i，X_j のどちらもが 1 となるときである。その確率は　$\dfrac{1}{n(n-1)}$ であるから，

$$E(X_i X_j) = \frac{1}{n(n-1)}$$

従って，

$$E(S_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

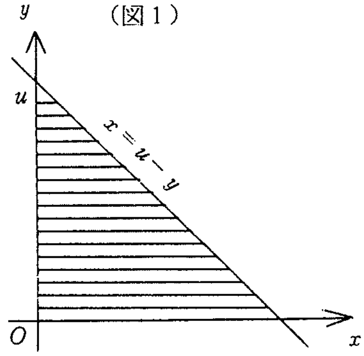
$$\begin{aligned} V(S_n) &= E(S_n^2) - \{E(S_n)\}^2 \\ &= E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^2 - 1 \\ &= E(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j) - 1 \\ &= E(X_1^2) + E(X_2^2) + \cdots + E(X_n^2) + \sum_{i \neq j} E(X_i X_j) - 1 \\ &= n \cdot \frac{1}{n} + n(n-1) \cdot \frac{1}{n(n-1)} - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

3. U，V，(U, V) の分布関数をそれぞれ $G_1(u)$，$G_2(v)$，$G(u, v)$ とするとき，$G(u, v) = G_1(u) G_2(v)$（＊）　が成立つことを示せばよい。

さて，$u > 0$　のとき，

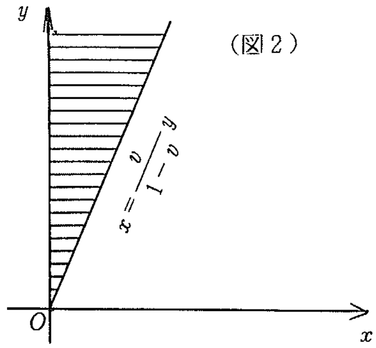
$$\begin{aligned} G_1(u) &= P(U \leqq u) = P(X + Y \leqq u) \\ &= \iint_{x+y \leqq u} f(x) f(y)\, dx dy \\ &= \int_0^u dy \int_0^{u-y} dx e^{-x} e^{-y} \\ &= \int_0^u dy (e^{-y} - e^{-u}) \\ &= 1 - e^{-u} - u e^{-u} \end{aligned}$$

（図１）



$u \leqq 0$ のときには，$G_1(u)=0$ であることは明らかである。

また，$0<v<1$ のとき，



（図２）

$$G_2(v)=P(V \leqq v)=P\left(\frac{X}{X+Y} \leqq v\right)$$

$$=\iint_{\frac{x}{x+y} \leqq v} f(x)f(y)\,dxdy$$

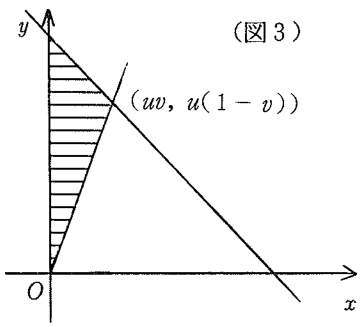
$$=\int_0^\infty dy \int_0^{\frac{v}{1-v}y} dx e^{-x} e^{-y}$$

$$=\int_0^\infty dy (e^{-y}-e^{-\frac{y}{1-v}})=v$$

$v \leqq 0$ のときには $G_2(v)=0$ ，$v \geqq 1$ のときには $G_2(v)=1$ であることは明らかである。

さて，$u>0$ ，$0<v<1$ のとき，

$$G(u,v)=P(U \leqq u,\ V \leqq v)=P\left(X+Y \leqq u,\ \frac{X}{X+Y} \leqq v\right)$$



（図３）

$$=\iint_{\substack{x+y \leqq u \\ \frac{x}{x+y} \leqq v}} f(x)f(y)\,dxdy$$

$$=\int_0^{u(1-v)} dy \int_0^{\frac{v}{1-v}y} dx e^{-x} e^{-y}$$

$$+\int_{u(1-v)}^{u} dy \int_0^{u-y} dx e^{-x} e^{-y}$$

$$=\int_0^{u(1-v)} dy\,(e^{-y}-e^{-\frac{y}{1-v}})$$

$$+\int_{u(1-v)}^{u} dy (e^{-y}-e^{-u})$$

$$=(1-e^{-u}-ue^{-u})v$$

従って，この場合には（＊）が成立つ。

また，$u \leqq 0$ のときには，$G(u, v)=0$，$G_1(u)=0$ であり，$v \leqq 0$ のときには，$G(u, v)=0$，$G_2(v)=0$ であるから，いずれの場合にも（＊）が成立つ。

最後に，$v \geqq 1$ のときには，$G(u, v)=P(X+Y \leqq u)=G_1(u)$，$G_2(v)=1$ であるから，この場合にも（＊）が成立つ。

なお，証明中，(X, Y) の密度関数が $f(x)f(y)$ であることを使ったが，これは，X と Y とが独立であることによる。また，（図１），（図２），（図３）はそれぞれ G_1，G_2, G を求める際の積分範囲を示す。

4. X の密度関数は $f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x \leqq 0 \end{cases}$

従って，X の積率母関数は

$$\phi(\theta)=\int_0^{\infty} e^{\theta x} \lambda e^{-\lambda x}\, dx=\lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-\theta) x}\, dx$$

θ が原点の近傍にあるとき（$|\theta|<\lambda$ のとき），

$$\phi(\theta)=\lambda\left[-\frac{e^{-(\lambda-\theta) x}}{\lambda-\theta}\right]_0^{\infty}=\frac{\lambda}{\lambda-\theta}=1+\frac{\theta}{\lambda}+\frac{\theta^2}{\lambda^2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{\theta^n}{\lambda^n}+\cdots\cdots$$

従って，

$$E(X)=\phi'(0)=\frac{1}{\lambda}, \quad E(X^2)=\phi''(0)=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

5. $Y=F(X)$ の分布関数 G は，

$$G(y)=P(F(X) \leqq y)$$

で与えられる。

$0 \leqq F \leqq 1$ より，$\begin{cases} y<0 \text{ のとき，} G(y)=0 \\ y \geqq 1 \text{ のとき，} G(y)=1 \end{cases}$

また，$0 \leqq y<1$ のとき，F に対する仮定（狭義単調増加かつ連続）より，$F(x)=y$ となる x が $[-\infty,+\infty)$ において唯一つ存在する。

従って，

$$G(y)=P(F(X) \leqq y)=P(F(X) \leqq F(x))$$

$= P(X \leqq x)$ （∵ Fに対する仮定）

$= F(x)$

$= y$

従って，Yは（0，1）上の一様分布に従う。