昭和52年度（問　題）

〔午前の部〕

1. 平均値 μ_1，分散 σ_1^2 の母集団 π_1 からとられた大きさmの標本の標本平均を$\overline{X}$とし，平均値 μ_2，分散 σ_2^2 の母集団 π_2 からとられた大きさnの標本の標本平均を$\overline{Y}$とする。いま，平均値の差 $\mu_1-\mu_2$の推定量として $\overline{X}-\overline{Y}$ をとるとき，全体の標本の大きさ$N=m+n$ が一定であるという条件のもとで，分散をできるだけ小さくするには，m，nをどのように選べばよいか。

2. 指数分布 $f(x;\lambda)=\lambda e^{-\lambda x}$　　$(x \geqq 0)$ に従う母集団から一つの標本をとり出して，$x=2$という値を得た。信頼係数90%でλの信頼区間を求めよ。

   必要ならば $\log_e 0.95=-0.05$，　$\log_e 0.05=-3.00$ を用いてよい。

3. 母集団分布は正規分布 $N(m,\sigma^2)$ とし，σ^2 は既知とする。有意水準0.01による仮説 $m=m_0$ の右側検定で，$m=m_0+\sigma/4$ のときに第２種の誤りの確率が 0.05 となるように標本の大きさを定めよ。

   なお，Zが $N(0,1)$ に従うとき $P(Z>2.33)\fallingdotseq 0.01$，$P(Z<-1.65)\fallingdotseq 0.05$ である。

〔午後の部〕

4. 硬貨をn回投げてx回表が出たとき，表が出る確率pを推定するものとする。表の出る回数を表わす確率変数をXとするとき，pの不偏推定量は $\hat{p}=\dfrac{X}{n}$ に限られることを示せ。

5. x_1，x_2 はそれぞれ Poisson分布 $\mathrm{Po}(\lambda_1)$，$\mathrm{Po}(\lambda_2)$（ここに λ_1，λ_2 は未知）に従う互いに独立な確率変数 X_1，X_2 の実現値とする。

   (i) $X_1+X_2=r$（定数）という条件のもとで，X_1 の条件つき分布を求めよ。

   (ii) 次に，$r=6$ のもとで実現値が $x_1=4$，$x_2=2$ である場合，仮説 $2\lambda_1=\lambda_2$ を有意水準５％で検定せよ。

昭和52年度（解答例）

1. まず $\bar{X}-\bar{Y}$ の分散 $V(\bar{X}-\bar{Y})$ を求める。題意より，

$$V(\bar{X})=\frac{{\sigma_1}^2}{m},\qquad V(\bar{Y})=\frac{{\sigma_2}^2}{n}$$

であることと，X と Y との独立性より，

$$\begin{aligned}V(\bar{X}-\bar{Y})&=V(\bar{X})+V(\bar{Y})\\&=\frac{{\sigma_1}^2}{m}+\frac{{\sigma_2}^2}{n}\\&=\frac{{\sigma_1}^2}{m}+\frac{{\sigma_2}^2}{N-m}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(1)\qquad(\because\ N=m+n)\end{aligned}$$

である。

この分散を最小にする m を求めるために(1)式を m で微分すると，

$$\frac{\partial V(\bar{X}-\bar{Y})}{\partial m}=-\frac{{\sigma_1}^2}{m^2}+\frac{{\sigma_2}^2}{(N-m)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(2)$$

(2)式を0にするような m が求める m である。

$$\therefore\quad\frac{{\sigma_1}^2}{m^2}=\frac{{\sigma_2}^2}{(N-m)^2}$$

両辺の正の平方根をとると，

$$\frac{\sigma_1}{m}=\frac{\sigma_2}{N-m}$$

$$\therefore\quad m=\frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}N$$

これから，

$$n=\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}N$$

$$答\begin{cases}m=\dfrac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}N\\[2ex]n=\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}N\end{cases}$$

2. 90%の信頼区間を求めるために，左右５％の棄却域を求める。

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^a f(x\,;\lambda)\,dx = 0.05 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1) \\ \displaystyle\int_b^\infty f(x\,;\lambda)\,dx = 0.05 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2) \end{cases}$$

を満たす a， b を求めると，

$$P_r(a \leqq X \leqq b) = 0.90 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

となる。

ところで，

$$\int f(x\,;\lambda)\,dx = \int \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= -e^{-\lambda x}$$

だから，(1)式から，

$$1 - e^{-a\lambda} = 0.05$$

$$\therefore \quad e^{-a\lambda} = 0.95$$

$$\therefore \quad a = \frac{0.05}{\lambda}$$

また(2)式より，

$$e^{-b\lambda} = 0.05$$

$$\therefore \quad b = \frac{3}{\lambda}$$

この a， b を用い，(3)式の X に $x = 2$ を代入すると，

$$\frac{0.05}{\lambda} \leqq 2 \leqq \frac{3}{\lambda}$$

$$\therefore \quad 0.025 \leqq \lambda \leqq 1.5$$

これが求める信頼区間である。

答　$0.025 \leqq \lambda \leqq 1.5$

3. 帰無仮説は $H_0\colon m = m_0$， 対立仮説は $H_1\colon m > m_0$ である。大きさ n の標本変量平均を $\overline{X}$ で表わすとき，帰無仮説 H_0 の $\varepsilon = 0.01$ の右側検定では， $\overline{X}$ が $N(m_0, \frac{\sigma^2}{n})$ に従うことから，題意より，

$$P_r\left(\frac{\overline{X}-m_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}>2.33\right)\fallingdotseq 0.01$$

であり，従って $\overline{X}<m_0+2.33\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ のとき H_0 を採る（棄てない）ことになる。

ところで，$m=m_0+\dfrac{\sigma}{4}$ とすると，$\overline{X}$ は $N\left(m_0+\dfrac{\sigma}{4},\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うことになり，そのときの第２種の誤りの起る確率は次のようになる。

$$P_r\left(\overline{X}<m_0+2.33\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=P_r\left(\frac{\overline{X}-(m_0+\frac{\sigma}{4})}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<2.33-\frac{\sqrt{n}}{4}\right)$$

この確率が 0.05 となるのは題意より，

$$2.33-\frac{\sqrt{n}}{4}=-1.65$$

のときである。これより n を求めると，

$$n\fallingdotseq 254$$

答　約 254

4.　$\hat{p}$ が p の不偏推定量であることは明らか。

その一意性を以下で示す。

X の関数 $r(X)$ が p の不偏推定量であるとすると，

$$E(r(X))=p$$

$$\therefore\ \sum_{x=0}^{n} r(x)\,{}_nC_x\,p^x(1-p)^{n-x}=p \qquad (0\leqq {}^{\forall}p\leqq 1)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (1)$$

(1)式で $p=0$ とすると，

$$r(0)=0$$

故に(1)式は，

$$\sum_{x=1}^{n} r(x)\,{}_nC_x\,p^x(1-p)^{n-x}=p \qquad (0\leqq p\leqq 1)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (2)$$

と表わせる。

次に(2)式の両辺を p　$(0<p<1)$ で割ると，

$$\sum_{x=1}^{n} r(x)\,{}_nC_x\,p^{x-1}(1-p)^{n-x}=1$$

$x-1=y$ とおくと，

$$\sum_{y=0}^{n-1} r(y+1)\,{}_nC_{y+1}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{y}=(1-p)^{-(n-1)}$$

$q=\dfrac{p}{1-p}$ とおくと，

$$\sum_{y=0}^{n-1} r(y+1)\,{}_nC_{y+1}\,q^{y}=(1+q)^{(n-1)}$$

$$=\sum_{y=0}^{n-1} {}_{n-1}C_y\,q^{y}$$

両辺を比較して，

$$r(y+1)\,{}_nC_{y+1}={}_{n-1}C_y$$

$$\therefore\ r(x)=r(y+1)$$

$$=\frac{{}_{n-1}C_{x-1}}{{}_nC_x}$$

$$=\frac{x}{n}$$　（証明おわり）

5. (i)　X_1 と X_2 は独立だから Poisson 分布の再生性により，

X_1+X_2 は Poisson 分布 $\mathrm{Po}(\lambda_1+\lambda_2)$ に従う。

$$\therefore\ P_r(X_1+X_2=r)=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^r}{r!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

また，$k=0,1,2,\ldots\ldots,r$ について次式が成り立つ。

$$P_r\{(X_1=k)\cap(X_2=r-k)\}$$

$$=P_r(X_1=k)P_r(X_2=r-k)$$

$$=\frac{\lambda_1{}^k\lambda_2{}^{r-k}}{k!(r-k)!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$$\therefore\ P_r(X_1=k\mid X_1+X_2=r)$$

$$= \frac{P_r\{(X_1 = k) \cap (X_2 = r-k)\}}{P_r(X_1 + X_2 = r)}$$

$$= \frac{r!}{k!(r-k)!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{r-k}$$

よって X_1 の条件付分布は二項分布 $B_i\left(r,\ \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$ である。

(ii) 仮説 $2\lambda_1 = \lambda_2$ が正しいとすると，(i)より，

$$P_r(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = r) = \binom{r}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{r-k}$$

である。いま $r = 6$ で実現値 $k(= x_1) = 4$ であるが，

$$\sum_{k=4}^{6}\binom{6}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{r-k} = \frac{73}{729} \fallingdotseq 0.1 > 0.05$$

となり，実現値 $x_1 = 4$，$x_2 = 2$ は有意水準５％の棄却域に入らない。よって仮説 $2\lambda_1 = \lambda_2$ は棄却されない。