昭和 50 年度　（問題）

午前の部

1.　分散 $\sigma^2 = 4$ で平均値 μ が未知の正規分布をする母集団からの独立な１００個の標本の値の和が１３５であった。μ の値を信頼係数0.９５で区間推定しなさい。ただしＺがN（０，１）に従うとき

$P(|Z| \leqq 2) \fallingdotseq 0.95$。

2.　３０才の国民死亡率は $\frac{2}{1000}$ であるという。年令３０才の被保険者2000人がいて，１年間の死亡者数は２人だった。この被保険団体の死亡率は国民死亡率より小さいと，有意水準５％で結論できるか。

3.　有限な平均値および分散をもつ母集団からの n 個の独立な標本の値を X_i，$i = 1, 2 \cdots, n$ とする。

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$　とおくと，$\overline{X}$ は母集団平均 μ の

(1)　不偏推定量である。

(2)　一致推定量である。

ことを示しなさい。

午後の部

３問中２問選択

4.　ｔ年後の国民所得を $y(t)$，消費支出を $C(t)$，投資を $I(t)$ とするとき，これらの間に次の関係式が成り立つとする。

$C(t) + I(t) = y(t)$ ……………………………………… (a)

$C(t) = 0.55\,y(t) + 0.27\,y(t-1)$ ………… (b)

$y(t+1) - y(t) = 0.4\,I(t)$ ……………… (c)

このとき次のことを示しなさい。

(1)　$X(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ C(t) \end{bmatrix}$ とおけば $X(t+1) = \begin{bmatrix} 1.4 & -0.4 \\ 1.04 & -0.22 \end{bmatrix} X(t)$ ………… (α)

〔問〕

(2) $P=\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 13 \end{bmatrix}$とおけば$X(t)=P\begin{bmatrix} 1.08^t & 0 \\ 0 & 0.1^t \end{bmatrix}P^{-1}X(0)$ ………………(e)

(3) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{C(t)}=\frac{5}{4}$　ただし$13y(0)-4C(0)\fallingdotseq 0$とする。

5. 池の中にいる魚の数を推定したい。このため，m匹の魚をとらえてこれに印をつけ池に放ち，のちにn匹の魚をとらえたところ，k匹の魚に印がついていたという。池の中の魚の数を最尤法により推定しなさい。

6. 分散が１の正規分布をする二つの母集団がある。その平均μ_1，μ_2は未知である。各々からの独立な１００個づつの標本の平均値を$\overline{X}_1$，$\overline{X}_2$とする。このとき，仮説$\mu_1=\mu_2$を有意水準５％で検定しなさい。ただしZが標準正規分布N（０，１）に従うとき，$P(|Z|\leqq 2)\fallingdotseq 0.95$

昭和50年度　（解答）

午前の部

1. 各標本の値をX_1，…，X_{100}とすると，

$\overline{X}=\frac{1}{100}\Sigma \times i$は平均$\mu$，分散$\frac{1}{100}$の正規分布をする。したがって

$$Z=\frac{\overline{x}-\mu}{\sqrt{\frac{4}{100}}}=5(\overline{X}-\mu)$$

とおけば，ZはN(0, 1)に従う。したがって$P(-2\leq Z\leq 2)=0.95$

から　$P(-2\leq 5(\overline{X}-\mu)\leq 2)=0.95$

$$P(\overline{X}-\frac{2}{5}\leq\mu\leq\overline{X}+\frac{2}{5})=0.95$$

これからμの信頼区間は$(\overline{X}-\frac{2}{5},\ \overline{X}+\frac{2}{5})=(1.35-0.4,\ 1.35+0.4)$

$=(0.95,\ 1.75)$

となる。

2. 被保険団体の死亡率が国民死亡率と等しいと仮定して，1年間の死亡者が2人以下となる確率を求めてみる。死亡者数Xの確率分布はパラメーター$\frac{2}{1000}\cdot 2000=4$のポワソン分布で近似できるから

$$P(X=0)=e^{-4}\frac{4^0}{0!}=e^{-4}\fallingdotseq 0.02$$

$$P(X=1)=e^{-4}\frac{4^1}{1!}=e^{-4}\cdot 4\fallingdotseq 0.07$$

$$P(X=2)=e^{-4}\frac{4^2}{2!}=e^{-4}\cdot 8\fallingdotseq 0.15$$

$\therefore P(X\leq 2)>0.05$だから被保険団体の死亡率が国民死仁率と等しいという仮説は棄却されない。したがって被保険団体の死亡率が国民死亡率より小さいと結論できない。

3.

(1) $E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\Sigma Xi\right)=\frac{1}{n}\Sigma E(Xi)=\frac{1}{n}\cdot n\mu$ ここにμは母集団平均。したがって$\overline{X}$はμの不偏推定量である。

(2) $V(\overline{X}) = V(\frac{1}{n}\Sigma X_i)$　　X_i の独立性から

$$V(\frac{1}{n}\Sigma X_i) = \Sigma\left(V(\frac{X_i}{n})\right) = \Sigma\frac{1}{n^2}V(X_i) = \frac{n}{n^2}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

ここに σ^2 は母集団分散。したがってチェビシェフの不等式から

$$P\left(|\overline{X}-\mu| > \frac{k\sigma}{\sqrt{\sigma}}\right) \leqq \frac{1}{k^2}$$ から $\frac{k\sigma}{\sqrt{n}} = \varepsilon$　$k = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon$ とおいて

$$P(|X-\mu| > \varepsilon) \leqq \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}\varepsilon} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon} \to 0 \ (n \to \infty)$$

が任意の ε に対して成立つ。故に $\overline{X}$ は μ の一致推定量である。

午後の部

4. (1) (a), (c)式より

$$y(t+1) = y(t) + 0.4\{y(t) - C(t)\} = 1.4\,y(t) - 0.4\,C(t) \cdots\cdots\cdots (f)$$

(ロ), (ハ)式より

$$C(t+1) = 0.55\,y(t+1) + 0.27\,y(t) = 1.04\,y(t) - 0.22\,C(t) \cdots\cdots (g)$$

よって, $X(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ C(t) \end{bmatrix}$ とおけば　$X(t+1) = \begin{bmatrix} 1.4 & -0.4 \\ 1.04 & -0.22 \end{bmatrix} X(t) \cdots\cdots (h)$

(2) $P\begin{bmatrix} 1.08 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.08 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{13}{49} & -\frac{4}{49} \\ \frac{-4}{49} & \frac{5}{49} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1.4 & -0.4 \\ 1.04 & -0.22 \end{bmatrix}$$

よって

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1.4 & -0.4 \\ 1.04 & -0.22 \end{bmatrix} X(t-1) = \begin{bmatrix} 1.4 & -0.4 \\ 1.04 & -0.22 \end{bmatrix}^2 X(t-2) = \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1.4 & -0.4 \\ 1.04 & -0.22 \end{bmatrix}^t X(0)$$

$$= P\begin{bmatrix} 1.08 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} P^{-1} \quad P\begin{bmatrix} 1.08 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} P^{-1} \cdots\cdots\cdots$$

$$P\begin{bmatrix} 1.08 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} P^{-1} \quad X(0)$$

$$=\mathrm{P}\begin{bmatrix}1.08 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix}^{t}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}(0)=\mathrm{P}\begin{bmatrix}1.08^{t} & 0\\ 0 & 0.1^{t}\end{bmatrix}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}(0)\cdots\cdots(i)$$

(3) $\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}(0)=\begin{bmatrix}\frac{13}{49} & -\frac{4}{49}\\ \frac{-4}{49} & \frac{5}{49}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y(o)\\ c(o)\end{bmatrix}$ とおくと　(i)式より

$$y(\mathrm{t})=5b_1\ (1.08)^{t}+\ 4b_2\ (0.1)^{t}$$

$$\mathrm{C}(\mathrm{t})=4b_1\ (1.08)^{t}+13b_2\ (0.1)^{t}$$

よって　$b_1\fallingdotseq o$　即ち　$13\,y(0)-4\,\mathrm{C}(0)\fallingdotseq 0$　ならば　$\lim_{t\to\infty}\frac{y(\mathrm{t})}{\mathrm{C}(\mathrm{t})}=\frac{5}{4}$

5. N匹の魚のいる池から，n匹の魚をとったときこの中に印のついている魚がk匹でてくる確率$f(k\ ;\ \mathrm{N})$は

$$f(k\ ;\ \mathrm{N})=\frac{\binom{m}{k}\binom{\mathrm{N}-m}{n-k}}{\binom{\mathrm{N}}{n}}\quad\cdots\cdots\cdots(イ)$$

で与えられる。

(イ)式は　を母数，kを変数と考えれば確率分布をあらわしている。今kが与えられたものとし，未知数　についての関数と考えれば尤度関数$\ell(\mathrm{N})$は,

$$\ell(\mathrm{N})=\frac{\binom{m}{k}\binom{\mathrm{N}-m}{n-k}}{\binom{\mathrm{N}}{n}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(ロ)$$

よって，この式を最大ならしめるNが求める推定値である。

$$\frac{\ell(\mathrm{N})}{\ell(\mathrm{N}-1)}=\frac{\binom{m}{k}\binom{\mathrm{N}-m}{n-k}}{\binom{\mathrm{N}}{n}}\Bigg/\frac{\binom{m}{k}\binom{\mathrm{N}-m-1}{n-k}}{\binom{\mathrm{N}-1}{n}}=\frac{(\mathrm{N}-m)(\mathrm{N}-n)}{(\mathrm{N}-m-n+k)\mathrm{N}}\quad\cdots\cdots\cdots(ハ)$$

なる式を考える。

$\ell(\hat{\mathrm{N}})=\max$ とすると　$\hat{\mathrm{N}}$は

$$\frac{\ell(\hat{\mathrm{N}})}{\ell(\hat{\mathrm{N}}-1)}\geqq 1\quad かつ\quad\frac{\ell(\hat{\mathrm{N}}+1)}{\ell(\hat{\mathrm{N}})}\leqq 1\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(ニ)$$

なる関係をみたす整数である。

㈠式を書き直すと

$$\frac{(\hat{N}-m)(\hat{N}-n)}{(\hat{N}-m-n+k)\hat{N}} \geqq 1 \quad , \quad \frac{(\hat{N}+1-m)(\hat{N}+1-n)}{(\hat{N}+1-m-n+k)(\hat{N}+1)} \leqq 1$$

これを変形すると

$$mn \geqq k\hat{N} \quad , \quad mn \leqq k(\hat{N}+1)$$

即ち　$\dfrac{mn}{k} \geqq \hat{N} \geqq \dfrac{mn}{k} - 1$

よって　$\hat{N} = \left[\dfrac{mn}{k}\right]$　　　但し〔　〕はガウスの記号。

6. 検定すべき仮説 $\mu_1 = \mu_2$ をA，対立仮説として $\mu_1 \neq \mu_2$ を A′とおく。

$\triangle X = \overline{X}_1 - \overline{X}_2$ の分布を考えると，

$E(\triangle X) = E(X_1 - X_2) = \mu_1 - \mu_2$

また，X_1 と X_2 は独立で各々分散 $\frac{1}{100}$ の正規分布をするから，$\triangle X$は分散 $\frac{2}{100}$ の正規分布をする。したがって仮説 $\mu_1 = \mu_2$ が正しいとすれば，$\triangle X$はN$(0, \frac{2}{100})$に従うから，$Z = \frac{\sqrt{2}}{10}\triangle X$とおけばZはN$(0, 1)$に従う。そこで$|Z| > 2$のときAを棄却し，そうでないとき棄却しないことにすれば，これが有意水準5％の検定となる。このときもし $\mu_1 \neq \mu_2$ であれば仮説Aが棄却される確率は5％より大きくなることが明かである。