昭和 50 年度　（問題）

午前の部

1. 死亡表がゴンパーツメーカムの法則に従うとき，$a_{xy}=a_{ww}$ ならば $a_{\overline{xy}}\geqq a_{\overline{ww}}$ になることを示せ。

2. 契約年齢 x 歳，年金開始年齢 y 歳とする。n 年保証付終身年金（年金は期始払）の年払平準保険料および平準純保険料式責任準備金の算式を求めよ。ただし，保険料払込中の死亡に対しては既払込保険料の元利合計（予定利率による。）の½を死亡直後に返還するものとする。

3. 予定利率が最初の k 年間は i %で，以後は i' %であるとき，n 年間払込の終身保険の年払平準保険料および平準純保険料式責任準備金を求めよ。なお，保険金は期末払とする。

午後の部

4. 死亡率を全ての年齢 x に対して $q_x^{(\alpha)}=q_x-\alpha$ と変更した場合，

$$P_{x:\overline{n}|}-P^{(\alpha)}_{x:\overline{n}|}=\frac{v\cdot\alpha}{\ddot{a}^{(\alpha)}_{x:\overline{n}|}}\sum_{t=0}^{n-1}{}_tE_x^{(\alpha)}\left(1-{}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}\right)$$

なることを証明せよ。ただし，$q_x^{(\alpha)}$ を用いた記号を各々 $P^{(\alpha)}_{x:\overline{n}|}$，$a^{(\alpha)}_{x:\overline{n}|}$，${}_tE^{(\alpha)}_x$ とする。

5. ある生命表で，状態(1)からの脱退要因が〔j〕（$j=2,\cdots\cdots m$）あるものとし，$\ell_x^{(1)}$ は x 歳の状態(1)にある人数を示す。

このとき，$\ell^{(1)}_{n+1}\fallingdotseq\ell^{(1)}_n\prod_{j=2}^{m}e^{-\mu^{(j)}_{n+\frac{1}{2}}}$ を示せ。

ただし，$\mu^{(j)}_x$ は（n，$n+1$）で一次式で近似できるものとする。

昭和 50 年度 （解答）

午前の部

1. $a_{xy}=\sum_{t=1}^{\infty} v^t\ {}_tp_{xy}$,　　$a_{\overline{xy}}=\sum_{t=1}^{\infty} v^t\ {}_tp_{\overline{xy}}=\sum_{t=1}^{\infty} v^t({}_tp_x+{}_tp_y-{}_tp_{xy})$

である。

一方，死亡表がゴンパーツ メーカムの法則に従い

$a_{xy}=a_{ww}$ なら，wは均等年齢であり，$p_{xy}=p_{ww}$である。

$$a_{\overline{xy}}-a_{\overline{ww}}=\sum v^t(p_x+p_y-p_{xy})-\sum v^t(2p_w-p_{ww})$$

$$=\sum v^t(p_x+p_y-2p_w)$$

$$=\sum v^t(p_x+p_y-2\sqrt{p_w^2})$$

$$=\sum v^t(p_x+p_y-2\sqrt{p_{xy}})$$

$$(\therefore p_w{}^2=p_w\,p_w=p_{ww}=p_{xy})$$

$$=\sum v^t(\sqrt{p_x}-\sqrt{p_y})^2\geqq 0$$

2. 保険金を１，年払保険料をＰとする。

(1) 収入の現価　$P(N_x-N_{x+n})$

支出の現価　$(D_y\ \ddot{a}_{\overline{n|}}+N_{y+n})+\frac{1}{2}P\sum_{t=0}^{y-x-1}C_{x+t}\ \ddot{S}_{\overline{t+1|}}$　$(\ddot{S}_{\overline{t+1|}}=\sum_{k=1}^{t+1}(1+i)^k)$

$$\therefore P=\frac{D_y\ddot{a}_{\overline{n|}}+N_{y+n}}{(N_x-N_y)-\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{y-x-1}C_{x+t}\ \ddot{S}_{\overline{t+1|}}}$$

(2)(イ)　$x+t_1<y$ なる t_1 につき $\frac{1}{D_{x+t}}\{D_y\ddot{a}_{\overline{n|}}+N_{y+n}+\frac{1}{2}P\sum_{t=t_1}^{y-x-1}C_{x+t}\ \ddot{S}_{\overline{t+1|}}$

$$-P(N_{x+t_1}-N_y)\}$$

(ロ) $y \leq x+t_1 < y+n$ なる t_1 につき，
$$\begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n-x-t_1+y}|} + {}_{n-x-t_1+y/}\ddot{a}_{x+t} & \text{（年金受給者生存中）} \\ \ddot{a}_{\overline{n-x-t_1+y}|} & \text{（年金受給者死亡後）} \end{cases}$$

(ハ) $y+n \leq x+t_1$ なる t_1 につき，　$\ddot{a}_{x+t_1}$

3.(1) 保険料(P)

$n \leq k$ のとき

収入の現価 ： $\ddot{a}^{(i)}_{x:\overline{n}|}$

給付の現価 ： $A^{1\,(i)}_{x:\overline{k}|} + A^{(i)}_{x:\overline{k}|}{}^{\!\!1} \quad A^{(i')}_{x+k}$

$$\text{よって } P = \frac{A^{1\,(i)}_{x:\overline{k}|} + A^{(i)}_{x:\overline{k}|}{}^{\!\!1} \quad A^{(i')}_{x+k}}{\ddot{a}^{(i)}_{x:\overline{n}|}}$$

$n > k$ のとき

収入の現価 ： $\ddot{a}^{(i)}_{x:\overline{k}|} + A^{(i)}_{x:\overline{k}|}{}^{\!\!1} \quad \ddot{a}^{(i')}_{x+k:\overline{n-k}|}$

給付の現価 ： $A^{1\,(i)}_{x:\overline{k}|} + A^{(i)}_{x:\overline{k}|}{}^{\!\!1} \quad A^{(i')}_{x+k}$

$$\text{よって } P = \frac{A^{1\,(i)}_{x:\overline{k}|} + A^{(i)}_{x:\overline{k}|}{}^{\!\!1} \quad A^{(i')}_{x+k}}{\ddot{a}^{(i)}_{x:\overline{k}|} + A^{(i)}_{x:\overline{k}|}{}^{\!\!1} \quad \ddot{a}^{(i')}_{x+k}}$$

(2) 責任準備金

$n \leq k$ のとき

保険料払込中　$A^{1\,(i)}_{x+t:\overline{k-t}|} + A^{(i)}_{x+t:\overline{k-t}|}{}^{\!\!1} \quad A^{(i')}_{x+k} - P\,\ddot{a}^{(i)}_{x+t:\overline{n-t}|}$

保険料払済後

$t \leq k$ のとき　$A^{1\,(i)}_{x+t:\overline{k-t}|} + A^{(i)}_{x+t:\overline{k-t}|}{}^{\!\!1} \quad A^{(i')}_{x+k}$

$t > k$ のとき　$A^{(i')}_{x+t}$

$n > k$ のとき

保険料払込中

$t \leqq k$ のとき　$A^{(i)\,1}_{x+t:\overline{k-t}|} + A^{(i)}_{x+t:\overline{k-t}|}{}^{\!1}\ A^{(i')}_{x+k}$

$$- P\left(\ddot{a}^{(i)}_{x+t:\overline{k-t}|} + A^{(i)}_{x+t:\overline{k-t}|}{}^{\!1}\ \ddot{a}^{(i')}_{x+k:\overline{n-k}|}\right)$$

$t > k$ のとき　$A^{(i')}_{x+t} - P\ \ddot{a}^{(i')}_{x-t-\overline{n-t}|}$

保険料払済後　$A^{(i')}_{x+t}$

午後の部

4. 責任準備金の再帰方程式を利用して

$$v\,p^{(\alpha)}_{x+t}\ {}_{t+1}V^{(\alpha)} = {}_{t}V^{(\alpha)} + P^{(\alpha)}_{x:\overline{n}|} - v\,q^{(\alpha)}_{x+t} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$v\,(p^{(\alpha)}_{x+t} - \alpha)\ {}_{t+1}V = {}_{t}V + P_{x:\overline{n}|} - v(q^{(\alpha)}_{x+t} + \alpha) \quad \cdots\cdots(2)$$

(2)−(1)を作ると

$$v\,p^{(\alpha)}_{x+t}\ {}_{t+1}V - v\,\alpha\ {}_{t+1}V - v\,p^{(\alpha)}_{x+t}\ {}_{t+1}V^{(\alpha)}$$

$$= {}_{t}V - {}_{t}V^{(\alpha)} + P_{x:\overline{n}|} - P^{(\alpha)}_{x:\overline{n}|} - v\,\alpha$$

$$P_{x:\overline{n}|} - P^{(\alpha)}_{x:\overline{n}|} = v\,\alpha(1 - {}_{t+1}V) - ({}_{t}V - {}_{t}V^{(\alpha)}) + v\,p^{(\alpha)}_{x+t}({}_{t+1}V - {}_{t+1}V^{(\alpha)})$$

両辺に$D^{(\alpha)}_{x+t}$を掛けると

$$(P_{x:\overline{n}|} - P^{(\alpha)}_{x:\overline{n}|})D^{(\alpha)}_{x+t} = v\,\alpha\,D^{(\alpha)}_{x+t}(1 - {}_{t+1}V) - ({}_{t}V - {}_{t}V^{(\alpha)})D^{(\alpha)}_{x+t}$$

$$+ ({}_{t+1}V - {}_{t+1}V^{(\alpha)})D^{(\alpha)}_{x+t+1}$$

両辺を $t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$ まで合計すると

$$(\mathrm{P}_{x:\overline{n|}}-\mathrm{P}^{(\alpha)}_{x:\overline{n|}})\sum_{t=0}^{n-1}\mathrm{D}^{(\alpha)}_{x+t}=v\,\alpha\sum\mathrm{D}^{(\alpha)}_{x+t}(1-{}_{t+1}\mathrm{V})-\sum_{t=0}^{n-1}({}_t\mathrm{V}-{}_t\mathrm{V}^{(\alpha)})\mathrm{D}^{(\alpha)}_{x+t}$$

$$+\sum_{t=0}^{n-1}({}_{t+1}\mathrm{V}-{}_{t+1}\mathrm{V}^{(\alpha)})\mathrm{D}^{(\alpha)}_{x+t+1}$$

然るに，右辺の第二項・第三項については，

$$-\sum_{t=0}^{n-1}({}_t\mathrm{V}-{}_t\mathrm{V}^{(\alpha)})\mathrm{D}^{(\alpha)}_{x+t}+\sum_{t=0}^{n-1}({}_{t+1}\mathrm{V}-{}_{t+1}\mathrm{V}^{(\alpha)})\mathrm{D}^{(\alpha)}_{x+t+1}$$

$$=({}_n\mathrm{V}-{}_n\mathrm{V}^{(\alpha)})\mathrm{D}^{(\alpha)}_{x+n}-({}_0\mathrm{V}-{}_0\mathrm{V}^{(\alpha)})\mathrm{D}^{(\alpha)}_{x}$$

$$=0 \qquad (\because\ {}_n\mathrm{V}={}_n\mathrm{V}^{(\alpha)}=1,\ \ {}_0\mathrm{V}={}_0\mathrm{V}^{(\alpha)}=0)$$

故に $(\mathrm{P}_{x:\overline{n|}}-\mathrm{P}^{(\alpha)}_{x:\overline{n|}})\sum_{t=0}^{n-1}\mathrm{D}^{(\alpha)}_{x+t}=v\,\alpha\sum_{t=0}^{n-1}\mathrm{D}^{(\alpha)}_{x+t}(1-{}_{t+1}\mathrm{V})$

$$\therefore\ \mathrm{P}_{x:\overline{n|}}-\mathrm{P}^{(\alpha)}_{x:\overline{n|}}=\frac{v\,\alpha}{\ddot{a}^{(\alpha)}_{x:\overline{n|}}}\sum_{t=0}^{n-1}{}_t\mathrm{E}_x(1-{}_{t+1}\mathrm{V})$$

5. $\ell^{(1)}_t=\ell^{(1)}_0 e^{-\sum_{j=2}^{m}\int_0^t\mu^{(j)}_t dt}=\ell^{(1)}_0\prod_{j=2}^{m}e^{-\int_0^t\mu^{(j)}_t dt}$ と表わせる。

いま，$t=n$，$t=n+1$ とおくと，それぞれ次のようになる。

$$\ell^{(1)}_n=\ell^{(1)}_0\prod_{j=2}^{m}e^{-\int_0^n\mu^{(j)}_t dt}\ ,\qquad \ell^{(1)}_{n+1}=\ell^{(1)}_0\prod_{j=2}^{m}e^{-\int_0^{n+1}\mu^{(j)}_t dt}$$

従って，$\ell^{(1)}_{n+1}=\ell^{(1)}_0\prod_{j=2}^{m}e^{-\int_0^n\mu^{(j)}_t dt}\prod_{j=2}^{m}e^{-\int_n^{n+1}\mu^{(j)}_t dt}=\ell^{(1)}_n\prod_{j=2}^{m}e^{-\int_n^{n+1}\mu^{(j)}_t dt}$

然るに，$\mu^{(j)}_t$ を $(n,\ n+1)$ で一次式で近似して，$\int_n^{n+1}\mu^{(j)}_t dt=\mu^{(j)}_{n+\frac{1}{2}}$

よって，

$$\ell^{(1)}_{n+1}=\ell^{(1)}_n\prod_{j=2}^{m}e^{-\mu^{(j)}_{n+\frac{1}{2}}}$$