昭和 49 年度　(問題)

午前の部

1. 養老保険の全期チルメル式責任準備金に関し，次の問に答えよ。

初年度純保険料 (P_1) を初年度の定期保険料 ($v^{\frac{1}{2}} q_x$) としたときのチルメル歩合 (α) を求め，このαによる全期チルメル式責任準備金 ${}_tV_{x:\overline{n}|}^{(\alpha)}$ は，

$$ {}_tV_{x:\overline{n}|}^{(\alpha)} = {}_{t-1}V_{x+1:\overline{n-1}|}^{(NET)} \quad (t \geqq 1) $$

となることを示せ。ここに ${}_tV_{x:\overline{n}|}^{(NET)}$ は，平準純保険料式責任準備金を示す。

2. ア) 次の □ の(1)〜(8)にあてはまる数字を求めよ。

年令	l_x^{aa}	d_x^{aa}	i_x	l_x^{ii}	d_x^{ii}	q_x^{aa}	q_x^{i}	r_x
40	80,000	200	□ (1)	400	□ (2)	＊	.10	＊
41	79,680	□ (3)	□ (4)	□ (5)	□ (6)	.0027	.11	＊
42	79,330	222	□ (7)	□ (8)	81	＊	＊	.0020

イ) 上表から p_{40}^{ai} ${}_2p_{40}^{i}$ を求めよ。

3. 保険金年度末払の n 年満期養老保険において，利率を一定にして死亡率だけを変えたとき，

$$ \triangle {}_0V = \triangle {}_1V = \cdots\cdots = \triangle {}_rV = 0 \quad (r < n) $$

であれば，

$\triangle q_{x+t} \cdot \ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}$ は $0 \leqq t \leqq r-1$ において，t について定数であることを示せ。ここに，責任準備金は平準純保険料式とする。

午後の部

4. 全期払 n 年満期養老保険をある時点で保険料払込を中止したい。払済保険に変更すると払済保険金は A に，延長保険に変更すると生存保険金は B となる。ここで死亡保険金を λ (λ ≦原

〔問〕

保険金）とし残りの財源で生存保険金μを購入したとき，

$$\lambda(\mathrm{A}-\mathrm{B})+\mu(1-\mathrm{A})=f(\mathrm{A},\mathrm{B})$$

となることを示せ。ここに，種類変更の計算は原契約の責任準備金をベースとして計算するものとし，付加保険料は考慮しない。

5. 次のそれぞれについて，給付内容を説明せよ。この給付に対し（x）が生存する限り毎年保険料を払い込むものとして各被保険者の生存，死亡の条件別にt年後の責任準備金を求めよ。

(ア) $\overline{\mathrm{A}}^{3}_{xyz}$

(イ) $\dfrac{\mathrm{D}_{x+n}}{\mathrm{D}_x}\left(\overline{\mathrm{A}}_{x+n}-\overline{\mathrm{A}}_{\overset{1}{x+n}:y}\right)$

6. 次の式の意味を説明し，これより $\dfrac{d\ {}_t\mathrm{V}}{dt}$ を求めよ。

$${}_tp_x\ e^{-\delta t}\ {}_t\mathrm{V}=\overline{\mathrm{P}}\int_0^t e^{-\delta t}\ {}_tp_x\,dt-\int_0^t e^{-\delta t}\ {}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt$$

昭和 49 年度　（解答）

午前の部

1. (i) 平準純保険料を $P_{x:\overline{n}|}$，次年度以降チルメル式純保険料を P_2 とすると次の関係がある。

$$\begin{cases} P_1 + \alpha = P_2 \\ P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = P_2(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1) + P_1 \end{cases}$$

これより

$$P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = P_2\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + (P_1 - P_2)$$

$$= P_2\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \alpha$$

$$\therefore \quad P_2 = P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

一方　$P_1 = v^{\frac{1}{2}}q_x$ であるから，

$$v^{\frac{1}{2}}q_x + \alpha = P_2$$

$$= P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

従って　$\alpha(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1) = (P_{x:\overline{n}|} - v^{\frac{1}{2}}q_x)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = vp_x\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} + 1$ を用いて

$$\alpha\, vp_x\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} = (P_{x:\overline{n}|} - v^{\frac{1}{2}}q_x)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$= P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - v^{\frac{1}{2}}q_x(1 + vp_x\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|})$$

$$= (\bar{A}_{x:\overline{n}|} - v^{\frac{1}{2}}q_x) - v^{\frac{1}{2}}q_x \cdot vp_x\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}$$

$$= vp_x\bar{A}_{x+1:\overline{n-1}|} - v^{\frac{1}{2}}q_x \cdot vp_x\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}$$

$$\therefore \quad \alpha = vp_x(\bar{A}_{x+1:\overline{n-1}|} - v^{\frac{1}{2}}q_x\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|})/vp_x\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}$$

$$= \underline{P_{x+1:\overline{n-1}|} - v^{\frac{1}{2}}q_x}$$

(ii) $_tV^{(\alpha)}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - P_2\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$ $(t \geqq 1)$

然るに $P_2 = P_1 + \alpha$

$= v^{\frac{1}{2}} q_x + (P_{x+1:\overline{n-1}|} - v^{\frac{1}{2}} q_x)$

$= P_{x+1:\overline{n-1}|}$

従って $_tV^{(\alpha)}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x+1:\overline{n-1}|}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$

$= \bar{A}_{(x+1)+(t-1):\overline{(n-1)-(t-1)}|} - P_{x+1:\overline{n-1}|}\,\ddot{a}_{(x+1)+(t-1):\overline{(n-1)-(t-1)}|}$

$= {}_{t-1}V^{(NET)}_{x+1:\overline{n-1}|}$

$\ell^{aa}_{x+1} = \ell^{aa}_x - i_x - d^{aa}_x$

$\ell^{ii}_{x+1} = \ell^{ii}_x + i_x - d^{ii}_x$

$d^{aa}_x = \ell^{aa}_x q^{aa}_x$

$d^{ii}_x = (\ell^{ii}_x + \frac{1}{2} i_x) q^i_x$

$i_x = \ell^{aa}_x \cdot r_x$

(1) 120 (2) 46 (3) 215 (4) 135

(5) 474 (6) 61 (7) 159 (8) 548

$$p^{ai}_{40} = \frac{120 - 120 \times \frac{1}{2} \times 0.1}{80{,}000} = \frac{114}{80{,}000}$$

$$_2p^i_{40} = \frac{400 - 400 \times 0.1 - [400 - 400 \times 0.1] \times 0.11}{400} = \frac{320}{400} = 0.8$$

3. 死亡率q_xに対する年金現価を$\ddot{a}_{x:\overline{t}|}$，変更後死亡率$q'_x$に対する年金現価を$\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}$とし，$k$を定数とする。

$$ {}_tV = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} $$

$\triangle\, {}_tV = 0$ より

$$ \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} \quad \cdots\cdots(1) $$

(1)より $\dfrac{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t}|}} = \dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}}$ （$\equiv 1+k$ とおく）$\cdots\cdots(2)$

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + vp_x \cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}$ であるから $\cdots\cdots(3)$

$0 \leqq t \leqq r-1$ の t に対し (2), (3), より

$$ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = (1+k)\cdot\ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t}|} $$
$$ = (1+k) + (1+k)\cdot v\cdot p'_{x+t}\cdot\ddot{a}'_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} $$
$$ = (1+k) + vp'_{x+t}\cdot\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} \quad \cdots\cdots(4) $$

一方 (3)より

$$ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = 1 + v\cdot p_{x+t}\cdot\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} \quad \cdots\cdots(5) $$

(4), (5) より

$$ v\triangle q_{x+t}\cdot\ddot{a}_{x+x+1:\overline{n-t-1}|} = k $$

$$ \triangle q_{x+t}\cdot\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} = \frac{k}{v} $$

これは t につき定数である。

午 後 の 部

4. 変更時における原契約の責任準備金をVとし，原契約の保険金を1，保険金即時払とする。

（一般性は損われない。）

xを変更時年令，nを変更時から満期までの期間とする。

題意から，

$$ A\cdot\bar{A}_{x:\overline{n}|} = V \quad \cdots\cdots(1) $$

$$ \bar{A}_{x:\overline{n}|} + B\cdot A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = V \quad \cdots\cdots(2) $$

$$\lambda \cdot \bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} + \mu \cdot A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} = V \quad \cdots\cdots(3)$$

が成り立つ。

ここで，$\bar{A}_{x:\overline{n|}} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} + \bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}$ を(1)に代入し，

$$A \cdot \bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} + A \cdot A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} = V \quad \cdots\cdots(1)'$$

(2) より，

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} = V - B \cdot A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} \quad \cdots\cdots(2)'$$

(2)′を(1)′に代入し整理すると，題意より $A \neq 0$ であるから，

$$(1-B) \cdot A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} = \frac{V}{A}(1-A)$$

また，題意より $B \neq 1$ であるから，

$$A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} = V \cdot \frac{1-A}{A(1-B)} \quad \cdots\cdots(4)$$

同様に，

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} = V \cdot \frac{A-B}{A(1-B)} \quad \cdots\cdots(5)$$

(4)，(5) を(3)に代入し，

$$\lambda \cdot V \cdot \frac{A-B}{A(1-B)} + \mu \cdot V \cdot \frac{1-A}{A(1-B)} = V$$

$$\therefore \quad \lambda(A-B) + \mu(1-A) = A(1-B)$$

右辺 $A(1-B)$ は A，B の関数である。従って，これを $f(A, B)$ とすれば，

$$\lambda(A-B) + \mu(1-A) = f(A, B)$$

である。

5.

(ア) $\bar{A}^{3}_{xyz}$

$(y)(z)$ が先に死亡し，(x) が3番目に死亡したとき保険金を支払う場合の給付の現価

$(x)(y)(z)$ が共存のとき $\quad {}_tV = \bar{A}^{\ \ 3}_{x+t:y+t:z+t} - P \cdot \ddot{a}_{x+t}$

$(x)(y)$ が共存 $\quad (z)$ が死亡のとき $\quad {}_tV = \bar{A}^{\ \ 2}_{x+t:y+t} - P \cdot \ddot{a}_{x+t}$

$(x)(z)$が共存　　(y)が死亡のとき　${}_t\mathrm{V} = \bar{\mathrm{A}}_{\overset{2}{x+t}:z+t} - \mathrm{P}\cdot\ddot{a}_{x+t}$

(x)のみ生存　　${}_t\mathrm{V} = \bar{\mathrm{A}}_{x+t} - \mathrm{P}\cdot\ddot{a}_{x+t}$

その他　　${}_t\mathrm{V} = 0$

ただし　$\mathrm{P} = \dfrac{\bar{\mathrm{A}}_{\overset{3}{x}yz}}{\ddot{a}_x}$

(イ)

$$\frac{\mathrm{D}_{x+n}}{\mathrm{D}_x}\left(\bar{\mathrm{A}}_{x+n} - \bar{\mathrm{A}}_{\overset{1}{x+n}:y}\right) = v^n\int v^t\,{}_{t+n}p_x\cdot(1-{}_tp_y)\,\mu_{x+n+t}\cdot dt$$

(y)の死亡後n年以後に(x)が死亡したとき保険金を支払う場合の給付の現価

(x), (y)が共存のとき，

$$ {}_t\mathrm{V} = \frac{\mathrm{D}_{x+n+t}}{\mathrm{D}_{x+t}}\left(\bar{\mathrm{A}}_{x+n+t} - \bar{\mathrm{A}}_{\overset{1}{x+n+t}:y+t}\right) - \mathrm{P}\cdot\ddot{a}_{x+t}$$

(x)が生存，(y)の死亡後n年以上経過

$${}_t\mathrm{V} = \bar{\mathrm{A}}_{x+t} - \mathrm{P}\cdot\ddot{a}_{x+t}$$

(x)が生存，(y)の死亡後K年経過（$\mathrm{K} < n$）

$${}_t\mathrm{V} = \frac{\mathrm{D}_{x+(n-k)+t}}{\mathrm{D}_{x+t}}\bar{\mathrm{A}}_{x+(n-k)+t} - \mathrm{P}\cdot\ddot{a}_{x+t}$$

または　${}_t\mathrm{V} = {}_{n-k|}\bar{\mathrm{A}}_{x+t} - \mathrm{P}\cdot\ddot{a}_{x+t}$

ただし　$\mathrm{P} = \dfrac{\mathrm{D}_{x+n}}{\mathrm{D}_x}\left(\bar{\mathrm{A}}_{x+n} - \bar{\mathrm{A}}_{\overset{1}{x+n}:y}\right) / \ddot{a}_x$

6. 与式は，生存者が瞬間払保険料$\bar{\mathrm{P}}$を支払い，死亡者には死亡保険金1を即時に支払う保険で，利力δとした場合の過去法による責任準備金を示す。

即ち，生存者が契約当初から期間tまでに払い込んだ保険料$\bar{\mathrm{P}}$を，利力δで利殖したものから，それまでの死亡者に支払われた死亡保険金を利力δで利殖したものを差引いた残額が，その時点での生存者に対する積立金${}_t\mathrm{V}$となることを示す。

与式の両辺をtについて微分すれば，

$$\frac{1}{\ell_x}\cdot\frac{d\ell_{x+t}}{dt}e^{-\delta t}\,{}_t\mathrm{V} - \delta e^{-\delta t}\frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}\,{}_t\mathrm{V} + \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}e^{-\delta t}\frac{d\,{}_t\mathrm{V}}{dt}$$

$$= \overline{P} e^{-\delta t} \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} - e^{-\delta t} \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} \mu_{x+t}$$

$$\therefore \quad e^{-\delta t} \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} \left(\frac{1}{\ell_{x+t}} \frac{d\ell_{x+t}}{dt} {}_t V - \delta {}_t V + \frac{d_t V}{dt} \right)$$

$$= e^{-\delta t} \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} (\overline{P} - \mu_{x+t})$$

$$\therefore \quad -(\mu_{x+t} + \delta) {}_t V + \frac{d_t V}{dt} = \overline{P} - \mu_{x+t}$$

$$\therefore \quad \frac{d_t V}{dt} = (\mu_{x+t} + \delta) {}_t V + \overline{P} - \mu_{x+t}$$