昭和 48 年度　(問題)

午前の部

1. 災害発生率 q の災害保険がある。この保険の被保険者 n 人からなる群団があり，各被保険者の保険金は同額で，1とする。この群団全体の収支でみて，保険会社が損失を受ける確率が α ($0<\alpha<1$) であるような純保険料 P を，正規分布近似で求めよ。

2. t 時間の間に来る客の数 X が平均 $t\lambda$ のポアソン分布にしたがうとする。

(a) t 時間の間に x 人の来客を観側したとして，最尤法によって，λ の推定量 $\hat{\lambda}$ を求めよ。

(b) 上で求めた $\hat{\lambda}$ の不偏性を証明せよ。

(c) 上で求めた $\hat{\lambda}$ について，次の式 (クラメル・ラオの不等式に関連した式) が成り立つことを証明せよ。

$$\mathrm{var}\,\hat{\lambda} = \frac{1}{E\left(\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\log f\,(X,\ \lambda)\right)^2\right)}$$

ここに，$f(x,\ \lambda)=P(X=x)$ とし，また，Eは期待値，var は分散を表わす記号とする。

3. (a) 関数 $I(u.\ \alpha,\ \beta)$ を，

$$I(u,\ \alpha,\ \beta) = \frac{(\alpha+\beta+1)!}{\alpha!\,\beta!}\int_0^u t^{\alpha}(1-t)^{\beta}dt$$

と定義すれば，$0<p<1$，$q=1-p$ として，

$$\sum_{u=\upsilon}^{n}\binom{n}{\upsilon}p^{\upsilon}q^{n-\upsilon} = I(p,\ x-1,\ n-x)$$

$$\sum_{\upsilon=0}^{x}\binom{n}{\upsilon}p^{\upsilon}q^{n-\upsilon} = 1 - I(p,\ x,\ n-x-1)$$

が成立することを証明せよ。

(b) 上の関数 $I(u,\ \alpha,\ \beta)$ の表 (不完全ベーター関数表) が与えられているとする。

いま，不良率 p が未知な無限母集団から，大きさ n の標本 (小標本) をとり出したときのその中の不良品の個数を X とする。

〔問〕

(b 1) 不良率pが，どのような数値以下であれば，不良品の個数Xがx個以上出る確率が0.025以下におさまるか，そのような数値$p_1(x)$を，与えられた$I(u, \alpha, \beta)$の表から求める方法を示せ。

(b 2) 不良率pが，どのような数値以上であれば，不良品の個数Xがx個以下しか出ない確率が0.025 以下におさまるか，そのような数値$p_2(x)$を，同じく$I(u, \alpha, \beta)$の表から求める方法を示せ。

(c) 不良品の個数Xの実現値がxであるとき，不良率pの最尤推定量を用いて，両側0.025点をとって作ったpの信頼区間は，$(p_1(x), p_2(x))$となることを証明せよ。

午後の部

4. (a) 大きさNの有限母集団$\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_N\}$から，大きさ$n$の標本$X_1, X_2, \cdots\cdots X_n$をとり出す。

$$\overline{X}=\frac{X_1+\cdots\cdots+X_n}{n}$$

とおいたとき，次の事項を証明せよ。

(a 1) $\overline{X}$は母集団平均

$$\mu=\frac{a_1+\cdots\cdots+a_N}{N}$$

の不偏推定量である。

(a 2) $\overline{X}$の分散は，次の式で与えられる。

$$\mathrm{var}\,\overline{X}=\frac{N-n}{N-1}\;\frac{\sigma^2}{n}$$

ここに，σ^2は母集団分散

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(a_i-\mu)^2$$

とする。

(b) 大きさNの有限母集団πを，L個の層（たがいに共通部分のない部分集団）$\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_L$に分割する。$\pi_i$ $(i=1, \cdots\cdots, L)$は，N_i個の元

$a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots, a_{iN_i}$

からなるとする。

層π_iから大きさn_iの標本

$$X_{i1},\ X_{i2},\ \cdots\cdots,\ X_{in_i}$$

を抽出する。

$$\overline{X}=\sum_{i=1}^{L}\frac{N_i}{N}\cdot\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}$$

とおくとき，次の事項が成り立つことを，上の(a)の結果を利用して証明せよ。

（b1） $\overline{X}$は母集団πの平均μの不偏推定量である。

（b2） $\overline{X}$の分散は次の式で与えられる。

$$\mathrm{var}\,\overline{X}=\sum_{i=1}^{L}\left(\frac{N_i}{N}\right)^2\frac{N_i-n_i}{N_i-1}\ \frac{\sigma_i^2}{n_i}$$

ここに，σ_i^2 は，層π_iの分散

$$\sigma_i^2=\frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i}(a_{ij}-\mu_i)^2$$

である。ただし，

$$\mu_i=\frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i}a_{ij}$$

5. (a) 確率変数X_1，X_2 ……，X_nが，たがいに独立で，同じ分散σ^2をもつとし，a_i，b_i（$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$）を定数とするとき

$$\mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i X_i,\ \sum_{i=1}^{n}b_i X_i\right)=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}a_i b_i$$

が成り立つことを証明せよ。ここにcovは共分散（Covariance）を表わす記号とする。

(b) ある量Yが，パラメーターx（確率変数ではない）の１次式

$$Y=\beta_0'+\beta_1 x+\varepsilon$$

で表わされるとする。ここに誤差項εは，xの値に関係なく，つねに正規分布$N(0,\sigma^2)$にしたがうものとし，毎回の観測について独立とする。

パラメーターxのn個の値

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n$$

について，各１回ずつ観測した量Yの値をそれぞれ

〔問〕

$Y_1, \ Y_2, \ \cdots\cdots, \ Y_n$

とする。

このとき，回帰係数β_0，β_1は，最小自乗法によって，次の$\hat{\beta}_0$，$\hat{\beta}_1$と推定される。(これは証明しなくてもよい。)

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{x}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$

ここに，

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

このとき，上の(a)の関係を利用して，次の等式を証明せよ。

$$\mathrm{cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \frac{-\sigma^2 \overline{x}}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$

昭和48年度　（解答）

午前の部

1. Xをこの群団からの災害発生件数とする。

Xは2項分布B（n，q）にしたがう。

$\therefore$ E X$=nq$，var X$=npq$　　（$p=1-q$とおいた。）

このことからY$=\dfrac{X-nq}{\sqrt{npq}}$ はmean 0，variance 1であるので，nが大きいとき正規分布

N（0，1）で近似できる。

この群団からの利益は

$$nP-X$$

であるから，

$$\alpha=P(nP-X<0)=(\text{―})$$

ここで，X$=nq+\sqrt{npq}\,$Yを考えて，

$$(\text{―})=P(nP-nq-\sqrt{npq}\,Y<0)$$

$$=P\left(Y>\frac{n(P-q)}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$=P\left(Y>\sqrt{\frac{n}{pq}}(P-q)\right)$$

正規分布表から，$\alpha=P(Y>x_\alpha)$を満足するx_αを探せば，

$$\sqrt{\frac{n}{pq}}(P-q)=x_\alpha$$

$$P=q+\sqrt{\frac{pq}{n}}\,x_\alpha$$

2. (a)　$P(X=x)=e^{-t\lambda}\dfrac{(t\lambda)^x}{x!}$

$$\log P(X=x)=-t\lambda+x(\log\lambda+\log t)-\log x!$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\log P(X=x)=-t+\frac{x}{\lambda}$$

これを0とおいて　$\lambda=\dfrac{x}{t}$

$\therefore \hat{\lambda} = \frac{x}{t}$

(b) $E\hat{\lambda} = E\frac{X}{t} = \frac{\lambda t}{t} = \lambda$

(c) $\mathrm{var}\,\hat{\lambda} = \mathrm{var}\,\frac{X}{t} = \frac{1}{t^2}\mathrm{var}\,X = \frac{t\lambda}{t^2} = \frac{\lambda}{t}$

$f(x,\ \lambda) = P(X = x) = e^{-t\lambda}\frac{(t\lambda)^x}{x!}$

(b)の結果から,

$\frac{\partial}{\partial\lambda}f(x,\ \lambda) = -t + \frac{x}{\lambda}$

$E\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}f(X,\ \lambda)\right)^2 = E\left(-t + \frac{X}{\lambda}\right)^2$

$= \frac{1}{\lambda^2}E(X - \lambda t)^2 = (\text{—})$

$EX = \lambda t$ だから

$(\text{—}) = \frac{1}{\lambda^2}\mathrm{var}\,X = \frac{\lambda t}{\lambda^2} = \frac{t}{\lambda}$

3. (a) 部分積分によって,

$$I(u,\ \alpha,\ \beta) = \frac{(\alpha+\beta+1)!}{\alpha!\beta!}\left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}(1-t)^{\beta}\right]_0^u$$

$$+\frac{(\alpha+\beta+1)!}{\alpha!\beta!}\ \frac{\beta}{\alpha+1}\int_0^u t^{\alpha+1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

$$= \frac{(\alpha+\beta+1)!}{(\alpha+1)!\beta!}u^{\alpha+1}(1-u)^{\beta}$$

$$+\frac{(\alpha+\beta+1)!}{(\alpha+1)!(\beta-1)!}\int_0^u t^{\alpha+1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

$$= \binom{\alpha+\beta+1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}(1-u)^{\beta} + I(u,\ \alpha+1,\ \beta-1)$$

ここで, $u = p$, $\alpha+1 = v$, $\alpha+\beta+1 = n$ とおくと,

$I(p,\ v-1,\ n-v) = \binom{n}{v}p^v q^{n-v} + I(p,\ v,\ n-v-1)$

$a_v = I(p,\ v-1,\ n-v)$ とおくと,

$\binom{n}{v}p^v q^{n-v} = -a_{v+1} + a_v = -\triangle a_v$

$$\therefore \sum_{\upsilon=x}^{n-1} \binom{n}{\upsilon} p^{\upsilon} q^{n-\upsilon} = \Big[-a_{\upsilon}\Big]_{x}^{n} = a_{x} - a_{n}$$

$$a_n = \mathrm{I}(p,\ n-1,\ 0) = \frac{n!}{(n-1)!\,0!}\int_0^p t^{n-1}\,dt$$

$$= p^n$$

$$\therefore \sum_{\upsilon=x}^{n} \binom{n}{\upsilon} p^{\upsilon} q^{n-\upsilon} = a_x = \mathrm{I}(p,\ x-1,\ n-x)$$

次に,

$$\sum_{\upsilon=0}^{x} \binom{n}{\upsilon} p^{\upsilon} q^{n-\upsilon} = 1 - \sum_{\upsilon=x+1}^{n} \binom{n}{\upsilon} p^{\upsilon} q^{n-\upsilon}$$

$$= 1 - \mathrm{I}(p、\ x,\ n-x-1)$$

(b)

(b1)　$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqq x \mid p) = \sum_{\upsilon=x}^{n} \binom{n}{\upsilon} p^{\upsilon} q^{n-\upsilon}$

$= \mathrm{I}(p,\ x-1,\ n-x) \leqq 0.05$

この不等式をみたす最大の p を表から求めればよい。

(b2)　同様に, $1 - \mathrm{I}(p,\ x,\ n-x-1) \leqq 0.05$

すなわち $\mathrm{I}(p,\ x,\ n-x-1) \geqq 0.95$

これをみたす最小の p

(c)　$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x \mid p) = \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x}$

$$\log \mathrm{P}(\mathrm{X}=x \mid p) = \log\binom{n}{x} + x\log p + (n-x)\log(1-p)$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\log \mathrm{P}(\mathrm{X}=x \mid p) = \frac{x}{p} - \frac{n-x}{1-p} = \frac{x-np}{p(1-p)}$$

$\therefore p$ の最尤推定量は $\frac{\mathrm{X}}{n}$

$\frac{\mathrm{X}}{n}$ の両側 $\frac{\varepsilon}{2}$ 点により信頼区間を作るのには, $\frac{\mathrm{X}}{n}$ のかわりにXを使っても同じことである。

Xの上側棄却域は

$$\mathrm{A}_1(p) = \{x : \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqq x \mid p) \leqq 0.025\}$$

Xの下側棄却域は

$$\mathrm{A}_2(p) = \{x : \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqq x \mid p) \leqq 0.025\}$$

Xの実現値 x が与えられたとき, 求める信頼区間は, その x を棄却域にもっていくよう

なpの集合を，全区間〔0，1〕から除いた区間，すなわち，〔0，1〕から次の2つの区間を除いたものである。

$B_1(x)=\{p : x \in A_1(p)\}$

$B_2(x)=\{p : x \in A_2(p)\}$

ここで，

$B_1(x)=\{p : P(X \geqq x \mid p) \leqq 0.025\}$

$=〔0, p_1(x))$

$B_2(x)=\{p : P(X \leqq x \mid p) \leqq 0.025\}$

$=(p_2(x), 1〕$

午後の部

4. (a) $(\sigma(1), \sigma(2), \cdots\cdots, \sigma(n))$を，$\{1, 2, \cdots\cdots, N\}$からランダムにとった1つの順列とすると，$(\sigma(1), \sigma(2), \cdots\cdots, \sigma(n))$は確率変数（$n$次元の）とみることができる。こうすると，

$X_i = a_{\sigma(i)}$

と解釈できる。$P(N, n)$を$\{1, 2, \cdots\cdots, N\}$から$n$個とった順列の集合とする。

（a 1）　$E\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\,a_{\sigma(i)}=(-)$

ここで，$E\,a_{\sigma(i)}=\sum_{\upsilon=1}^{N} a_{\upsilon} P(\sigma(i)=\upsilon)=(*)$

$\sigma(i)=\upsilon$であるような$\sigma \in P(N, n)$の数は，$\{1, 2, \cdots\cdots, N\}$から$\upsilon$を除いた残りの$N-1$個から，$\sigma(1), \sigma(2), \cdots\cdots, \sigma(n)$の中からすでにきまっている$\sigma(i)$を除いた$n-1$個をとる順列の数${}_{N-1}P_{n-1}$となる。

各1つの順列は，$1/{}_{N}P_{n}$の確率をもつから，

$P(\sigma(i)=\upsilon)={}_{N-1}P_{n-1} \div {}_{N}P_{n}$

$$=\frac{(N-1)\cdots\cdots(N-n+1)}{N(N-1)\cdots\cdots(N-n+1)}=\frac{1}{N}$$

$\therefore (*)=\frac{1}{N}\sum_{\upsilon=1}^{N} a_{\upsilon}=\mu$

$\therefore (-)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu$

(a 2)　$\widetilde{a}_i = a_i - \mu$

$\widetilde{X}_i = X_i - \mu$

とおく。

$$n^2 \operatorname{var} \overline{X} = E\left(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i\right)^2$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i^2 + \sum_{\substack{i \neq j \\ i,\ j \in \{1,\ 2, \cdots,\ n\}}} \widetilde{X}_i \widetilde{X}_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E \widetilde{X}_i^2 + \sum_{\substack{i \neq j \\ i,\ j \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}}} E(\widetilde{X}_i \widetilde{X}_i) = (-)$$

$$E X_i = E \widetilde{a}_{\sigma(i)}^2 = \sum_{\upsilon=1}^{N} \widetilde{a}_\upsilon^2 P(\sigma(i) = \upsilon)$$

$$= \frac{1}{N} \sum \widetilde{a}_\upsilon^2 = \sigma^2$$

$i \neq j$ のとき

$$E(\widetilde{X}_i \widetilde{X}_j) = E(\widetilde{a}_{\sigma(i)} \widetilde{a}_{\sigma(i)})$$

$$= \sum_{\substack{r = s \\ r,\ s \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ N\}}} \widetilde{a}_r \widetilde{a}_s P((\sigma(i),\ \sigma(j)) = (r,\ s)) = (*)$$

ここで，$(\sigma(i),\ \sigma(j)) = (r,\ s)\ (i \neq j,\ r \neq s)$ となる順列 $\sigma \in P(N,\ n)$ の数は，$\{1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N\}$ から r，s を除いた $N-2$ 個から，$\sigma(1)$，$\sigma(2)$，……，$\sigma(n)$ 中すでにきまっている $\sigma(i)$，$\sigma(j)$ を除いた $n-2$ 個をとる順列の数 ${}_{N-2}P_{n-2}$ に等しい。

$$\therefore P((\sigma(i),\ \sigma(j))) = (r,\ s)) = {}_{N-2}P_{n-2} \div {}_{N}P_{n} = \frac{1}{N(N-1)}$$

$$\therefore (*) = \sum_{\substack{r \neq s \\ r,\ s \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ N\}}} \widetilde{a}_r \widetilde{a}_s \frac{1}{N(N-1)} = \frac{1}{N(N-1)} \left(\sum_{r=1}^{N} \sum_{s=1}^{N} \widetilde{a}_r \widetilde{a}_s - \sum_{r=1}^{N} \widetilde{a}_r^2\right)$$

$$= \frac{-1}{N(N-1)} \sum_{r=1}^{N} \widetilde{a}_r^2 = -\frac{\sigma^2}{N-1}$$

$$\therefore (-) = \sum_{i=1}^{N} \sigma^2 + \sum_{\substack{i \neq j \\ i,\ j \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}}} \frac{-\sigma^2}{N-1}$$

$$= n \sigma^2 - (n^2 - n) \frac{\sigma^2}{N-1}$$

$$= n\sigma^2 - n(n-1)\frac{\sigma^2}{N-1}$$

$$= n\sigma^2\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

$$= n\sigma^2 \frac{N-n}{N-1}$$

$$\therefore \operatorname{var}\widetilde{X} = \frac{N-n}{N-1}\ \frac{\sigma^2}{n}$$

(b)

$$X_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

$$\widetilde{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \mu_i)$$

とおく。X_1, X_2, ……, X_L はあきらかにたがいに独立。

そうすると,

$$\overline{X} = \sum\frac{N_i}{N}X_i$$

(b 1)　$E\overline{X} = \sum\frac{N_i}{N}EX_i = \sum\frac{N_i\ \mu_i}{N} = \mu$

(b 2)　$\operatorname{var}\overline{X} = \sum\left(\frac{N_i}{N}\right)^2 \operatorname{var}X_i$

(a)の結果から

$$\operatorname{var}X_i = \frac{N_i - n_i}{N_i - 1}\ \frac{\sigma_i^2}{n_i}$$

5. (a) $\widetilde{X}_i = X_i - EX_i$ とかくと,

$$\operatorname{cov}(\sum a_i X_i,\ \sum b_i X_i) = E(\sum a_i \widetilde{X}_i\ \sum b_i \widetilde{X}_i)$$

$$= \sum_{i,j} a_i b_i E(\widetilde{X}_i \widetilde{X}_j) = (\text{—})$$

$i \neq j$ なら, $\widetilde{X}_i$, $\widetilde{X}_j$ はたがいに独立だから,

$$E(\widetilde{X}_i \widetilde{X}_j) = E\widetilde{X}_i \cdot E\widetilde{X}_j = 0$$

$$(\text{—}) = \sum a_i b_i E\widetilde{X}_i^2 = \sum a_i b_i \operatorname{var}\widetilde{X}_i = \sum a_i b_i \sigma^2$$

(b) $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ を Y_1 , ……, Y_n の一次結合の形に書きなおす。

$S^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2$ とおくと，

$$\hat{\beta}_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \bar{x}}{S^2} (Y_i - \bar{Y})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \bar{x}}{S^2} Y_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \bar{x}}{S^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \bar{x}}{S^2} Y_i$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$= \sum \frac{1}{n} Y_i - \sum \frac{\bar{x}(x_i - \bar{x})}{S^2} Y_i$$

$$= \sum \left\{ \frac{1}{n} - \frac{\bar{x}(x_i - \bar{x})}{S^2} \right\} Y_i$$

$$\therefore \operatorname{cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \sigma^2 \sum \frac{x_i - \bar{x}}{S^2} \left\{ \frac{1}{n} - \frac{\bar{x}(x_i - \bar{x})}{S^2} \right\}$$

$$= \frac{\sigma^2}{S^2} \left\{ \sum (x_i - \bar{x}) - \frac{\bar{x}}{S^2} \sum (x_i - \bar{x})^2 \right\}$$

$$= \frac{\sigma^2}{S^2} \left\{ -\frac{\bar{x}}{S^2} S^2 \right\}$$

$$= \frac{-\sigma^2 \bar{x}}{S^2}$$

〔参考〕

一般に，$X\check{\beta} = \check{y}$ から，最小自乗法で $\check{\beta}$ を求めるには，

$$X'X\check{\beta} = X'\check{y}$$

を解けばよい（記号を含めて47年解答集 p 49 参照）。

$$\therefore \check{\beta} = (X'X)^{-1} X'\check{y}$$

上の $\check{y}$ のかわりに誤差 $\check{\varepsilon}$ を考えて，$\check{y} + \check{\varepsilon}$ を入れると，$\check{\beta}$ は

$$\check{\beta} = (X'X)^{-1} X'(\check{y} + \check{\varepsilon})$$

とかけ，確率変数となる（ $\check{\varepsilon}$ が確率変数だから）。

$$E\check{\varepsilon}=\check{0} \text{だから}$$

$$E\check{\beta}=(X'X)^{-1}X'\check{y}$$

$$\therefore \check{\beta}-E\check{\beta}=(X'X)^{-1}X'\check{\varepsilon} \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$(\check{\beta}-E\check{\beta})(\overset{>}{\beta}-E\overset{>}{\beta})$ は $(\beta_i-E\beta_i)(\beta_j-E\beta_j)$ を $(i,\ j)$ の要素とする行列になる。

$\therefore E((\check{\beta}-E\check{\beta})(\overset{>}{\beta}-E\overset{>}{\beta}))$ は，$\mathrm{cov}(\beta_i,\beta_j)$ を $(i,\ j)$ の要素とする行列になる。

(1)から

$$E((\check{\beta}-E\check{\beta})(\overset{>}{\beta}-E\overset{>}{\beta}))=E((X'X)^{-1}X'\check{\varepsilon}\overset{>}{\varepsilon}X(X'X)^{-1})$$

$$=(X'X)^{-1}X'E(\check{\varepsilon}\overset{>}{\varepsilon})X(X'X)^{-1}=(-)$$

$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots\cdots,\ \varepsilon_n$ がたがいに独立で $N(0,\ \sigma^2)$ にしたがえば，

$$E(\check{\varepsilon}\overset{>}{\varepsilon})=\begin{pmatrix}\sigma^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma^2\end{pmatrix}=\sigma^2 I$$

（ I は単位行列）

$$\therefore (-)=(X'X)^{-1}X'(\sigma^2 I)X(X'X)^{-1}$$

$$=\sigma^2(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}$$

$$=\sigma^2(X'X)^{-1}$$

すなわち，$\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots\cdots,\ \beta_n$ の covariance からなる matrix は，$\sigma^2(X'X)^{-1}$ となる。

この問題では，$X=\begin{pmatrix}1 & x_1\\ \vdots & \vdots\\ 1 & x_n\end{pmatrix}$ だから

$$X'X=\begin{pmatrix}n & n\bar{x}\\ n\bar{x} & n(S^2+\bar{x}^2)\end{pmatrix}=n\begin{pmatrix}1 & \bar{x}\\ \bar{x} & S^2+x^2\end{pmatrix}$$

ここに，$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i$，$S^2=\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2$

（上の２行２列の要素について説明を加えると，

$$\text{これは}=\sum x_i=\sum((x_i-\bar{x})+\bar{x})^2$$

$$=\sum(x_i-\bar{x})^2+n\bar{x}^2+2\sum\bar{x}(x_i-\bar{x})$$

$$=nS^2+n\bar{x}^2=n(S^2+\bar{x}^2))$$

$$\begin{vmatrix}1 & \bar{x}\\ \bar{x} & S^2+\bar{x}^2\end{vmatrix}=S^2 \text{だから，}$$

$$(X'X)^{-1}=\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\dfrac{S^2+\bar{x}^2}{S^2} & \dfrac{-\bar{x}}{S^2}\\ \\ \dfrac{-\bar{x}}{S^2} & \dfrac{1}{S^2}\end{pmatrix}$$

$$\therefore \mathrm{cov}(\beta_0,\ \beta_1)=\frac{-\bar{x}}{n\,S^2}\ \sigma^2$$

ついでにいうと，

$$\mathrm{var}\,\beta_0 = \frac{S^2+\bar{x}^2}{n\,S^2}\sigma^2$$

$$\mathrm{var}\,\beta_1 = \frac{1}{n\,S^2}$$