〔問〕

# 昭和48年度　（問題）

## 午前の部

1.　${}_{2n}V_x = 1 - \prod_{t=0}^{n-1} (1 - {}_2V_{x+2t})$ を証明せよ。

2.　次の各式を証明せよ。

(1)　$\int_0^{w-x} {}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt = 1$

(2)　$\int_0^1 (\mu_{x+t} + \delta)\,dt = -\log v\,p_x$

3.　$x$ 歳契約 $n$ 年満期の保険がある。$t$ 年度の死亡には $(1+r)^t$ を保険年度末に，満期まで生存の場合は $(1+r)^n$ を支払うものとする。この保険の年払平準純保険料を $P^{(i,\,r)}_{x:\overline{n}|}$ とする。

$P^{(i,\,r)}_{x:\overline{n}|} = k\,P^{(i)}_{x:\overline{n}|}$ ならば

$A^{(j)}_{x:\overline{n}|} = k\,A^{(i)}_{x:\overline{n}|}$　$\left(j = \dfrac{i-r}{1+r}\right)$

となることを示せ。ここに $i$，$j$ は計算に使用する利率を示すものとする。

## 午後の部

4.　実利率を $i$，名称利率を $j$，利力を $\delta$ とするとき，次の関係式の係数 $A_0$，$A_1$，$A_2$，$A_3$，$B_0$，$B_1$，$B_2$，$B_3$ を求めよ。

$$i = A_1\delta + A_2\delta^2 + A_3\delta^3 + \cdots\cdots$$
$$= B_1 j + B_2 j^2 + B_3 j^3 + \cdots\cdots$$

5.　$a_x \leqq \dfrac{p_x}{q_x + i}$ を証明せよ。

ただし，$p_x \geqq p_{x+t}$（$t = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）とする。

6. $q'_{x+t} = (1+k)\,q_{x+t} - k \qquad (0 \leqq t \leqq n-1)$

$\quad i' = (1+k)\,i + k$

なる関係があるとき，次式を証明せよ。

(1) $\ddot{a}'_{x:\overline{n|}} - \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 0$

(2) $P'_{x:\overline{n|}} - P_{x:\overline{n|}} = -\dfrac{k}{1+k} \cdot v$

ここに，$a'_{x:\overline{n|}}$，$P'_{x:\overline{n|}}$ は予定利率 $i'$，予定死亡率 $q'_x$ による，$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$，$P_{x:\overline{n|}}$ は予定利率 $i$，予定死亡率 $q_x$ による年金現価および平準純保険料をそれぞれ表わすものとする。

# 昭和48年度　（解答）

## 午前の部

1.　一般に ${}_{k}V_{x+t}=1-\dfrac{\ddot{a}_{x+t+k}}{\ddot{a}_{x+t}}$ なる関係があるので，

${}_{2}V_{x+2t}=1-\dfrac{\ddot{a}_{x+2t+2}}{\ddot{a}_{x+2t}}$ となる。

したがって $1-{}_{2}V_{x+2t}=\dfrac{\ddot{a}_{x+2t+2}}{\ddot{a}_{x+2t}}$

$$\prod_{t=0}^{n-1}(1-{}_{2}V_{x+2t})=\frac{\ddot{a}_{x+2}}{\ddot{a}_{x}}\cdot\frac{\ddot{a}_{x+4}}{\ddot{a}_{x+2}}\cdots\cdots\frac{\ddot{a}_{x+2n}}{\ddot{a}_{x+2n-2}}=\frac{\ddot{a}_{x+2n}}{\ddot{a}_{x}}$$

$$\therefore 1-\prod_{t=0}^{n-1}(1-{}_{2}V_{x+2t})=1-\frac{\ddot{a}_{x+2n}}{\ddot{a}_{x}}={}_{2n}V_{x}$$

2.　(1)　$$\int_0^{w-x}{}_tP_x\,\mu_{x+t}\,dt=\int_0^{w-x}{}_tP_x\left(-\frac{1}{\ell_{x+t}}\frac{d\ell_{x+t}}{dt}\right)dt$$

$$=\int_0^{w-x}\frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}\left(-\frac{1}{\ell_{x+t}}\frac{d\ell_{x+t}}{dt}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{\ell_x}\int_0^{w-x}d\ell_{x+t}$$

$$=-\frac{1}{\ell_x}\left[\ell_{x+t}\right]_0^{w-x}=1$$

(2)　$$\int_0^1(\mu_{x+t}+\delta)\,dt=\int_0^1\left(-\frac{d}{dt}\log\ell_{x+t}+\delta\right)dt$$

$$=\left[-\log\ell_{x+t}+\delta t\right]_0^1$$

$$=-\log\ell_{x+1}+\delta+\log\ell_x$$

$$=-\log p_x+\log(1+i)$$

$$=-\log v\,p_x$$

3.　$t$ 年度の死亡に対する死亡保険金の現価は $(1+r)^t\dfrac{C_{x+t-1}}{D_x}$ だから

$$P_{x:\overline{n|}}^{(i,\,r)}=\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\frac{\{(1+r)C_x+(1+r)^2C_{x+1}+\cdots\cdots+(1+r)^nC_{x+n-1}+(1+r)^nD_{x+n}\}}{D_x}$$

$$=\frac{1}{N_x-N_{x+n}}\{(1+r)C_x+(1+r)^2C_{x+1}+\cdots+(1+r)^nC_{x+n-1}+(1+r)^nD_{x+n}\}$$

$$=\frac{1}{N_x-N_{x+n}}\frac{1}{(1+r)^x}\{(1+r)^{x+1}C_x+(1+r)^{x+2}C_{x+1}+\cdots+(1+r)^{x+n}C_{x+n-1}$$

$$+(1+r)^{x+n}D_{x+n}\}$$

ここで $(1+r)^{x+t}C_{x+t-1}=\left(\dfrac{1+r}{1+i}\right)^{x+t}d_{x+t-1}$

$$=\frac{1}{(1-j)^{x+t}}d_{x+t-1}=C_{x+t-1}^{(j)}$$

$$(1+r)^{x+n}D_{x+n}=D_{x+n}^{(j)}$$

であることから

$$\{\quad\}=C_x^{(j)}+C_{x+1}^{(j)}+\cdots\cdots+C_{x+n-1}^{(j)}+D_{x+n}^{(j)}$$

$$=A_{x:\overline{n|}}^{(j)}\cdot D_x^{(j)}$$

$$=A_{x:\overline{n|}}^{(j)}\cdot(1+r)^xD_x$$

したがって

$$P_{x:\overline{n|}}^{(i,\,r)}=\frac{D_x}{N_x-N_{x+n}}A_{x:\overline{n|}}^{(j)}=\frac{A_{x:\overline{n|}}^{(j)}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

一方 $P_{x:\overline{n|}}^{(i)}=\dfrac{A_{x:n}^{(i)}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$

故に $P_{x:\overline{n|}}^{(i,\,r)}=k\,P_{x:\overline{n|}}^{(i)}$ ならば $A_{x:\overline{n|}}^{(j)}=k\,A_{x:\overline{n|}}^{(i)}$

## 午後の部

4.　$i=e^{\delta}-1$

$=\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^m-1$ なる関係式がそれぞれ成りたつ。

$$e^{\delta}=1+\frac{\delta}{1!}+\frac{\delta^2}{2!}+\frac{\delta^3}{3!}+\cdots\cdots$$

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^m=1+\binom{m}{1}\frac{j}{m}+\binom{m}{2}\left(\frac{j}{m}\right)^2+\binom{m}{3}\left(\frac{j}{m}\right)^3+\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore A_0=0 \qquad A_1=1 \qquad A_2=\frac{1}{2} \qquad A_3=\frac{1}{6}$$

$$B_0=0 \qquad B_1=1 \qquad B_2=\frac{m-1}{2m} \qquad B_3=\frac{(m-1)(m-2)}{6m^2}$$

5. $$a_x=v\,p_x+v^2{}_2p_x+v^3{}_3p_x+\cdots\cdots\cdots$$

$$=v\,p_x+v^2p_x\,p_{x+1}+v^3p_x\,p_{x+1}\,p_{x+2}+\cdots\cdots\cdots$$

$p_x \geqq p_{x+t}$ ( $t=1$, 2, 3, ……) だから

$$a_x \leqq v\,p_x+(v\,p_n)^2+(v\,p_x)^3+\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{v\,p_x}{1-v\,p_x}$$

$$=\frac{p_x}{1+i-p_x}=\frac{p_x}{q_x+i}$$

6. $q'_{x+t}=(1+k)\,q_{x+t}-k$ より $(1-q'_{x+t})=(1+k)(1-q_{x+t})$

$i'=(1+k)\,i+k$ より $1+i'=(1+k)(1+i)$

なる関係が成りたつ。

これにより

$$\ell'_{x+t}=(1+k)^t\,\ell_{x+t} \qquad (0\leqq t\leqq n-1)$$

$$v'^{\,x+t}=\frac{v^{x+t}}{(1+k)^{x+t}}$$

となる。したがって,

$$D'_{x+t}=\frac{D_{x+t}}{(1+k)^x}$$

$$C'_{x+t}=v'D'_{x+t}-D'_{x+t+1}$$

$$=v'\frac{D_{x+t}}{(1+k)^x}-\frac{D_{x+t+1}}{1+k}$$

$$=\frac{1}{(1+k)^x}\left(C_{x+t}-\frac{k\,v}{1+k}D_{x+t}\right)$$

(1) $\ddot{a}'_{x:n}{}^{*} = \dfrac{1}{D'_x}\{D'_x + D'_{x+1} + \cdots\cdots + D'_{x+n-1}\}$

$$= \frac{(1+k)^x}{D_x}\left\{\frac{D_x}{(1+k)^x} + \frac{D_{x+1}}{(1+k)^x} + \cdots\cdots + \frac{D_{x+n-1}}{(1+k)^x}\right\}$$

$$= \frac{1}{D_x}\{D_x + D_{x+1} + \cdots\cdots D_{x+n-1}\}$$

$$= \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$\therefore \ddot{a}'_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 0$

(2)

$$P'_{x:\overline{n}|} = \frac{\dfrac{1}{(1+k)^x}\left\{M_x - M_{x+n} - \dfrac{kv}{1+k}(N_x - N_{x+n}) + D_{x+n}\right\}}{\dfrac{1}{(1+k)^x}(N_x - N_{x+n})}$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} - \frac{kv}{1+k}$$

$$= P_{x:\overline{n}|} - \frac{kv}{1+k}$$

$$\therefore P'_{x:\overline{n}|} - P_{x:\overline{n}|} = -\frac{k}{1+k}v$$

6. （別解）

$q'_{x+t} = (1+k)q_{x+t} - k$ より $p'_{x+t} = (1+k)p_{x+t}$ 　　$(0 \leqq t \leqq n-1)$

$i' = (1+k)i + k$ より $1 + i' = (1+k)(1+i)$

$$v' = (1+k)^{-1}v$$

なる関係が成りたつ。

(1) $\ddot{a}'_{x:\overline{n}|} = 1 + \displaystyle\sum_{t=1}^{n-1} v'^t \, {}_tp'_x$

$$= 1 + \sum_{t=1}^{n-1} v'^t \cdot p'_x \cdot p'_{x+1} \cdots\cdots p'_{x+t-1}$$

$$= 1 + \sum_{t=1}^{n-1} (1+k)^{-t} v^t (1+k)^t p_x \cdot p_{x+1} \cdots\cdots p_{x+t-1}$$

$$= 1 + \sum_{t=1}^{n-1} v^t \cdot {}_tp_x$$

$= \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

$\therefore \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 0$

(2) $P'_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} - d'$, $P_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d$ だから

$$
\begin{aligned}
P'_{x:\overline{n}|} - P_{x:\overline{n}|} &= \left(\frac{1}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right) + (d - d') \\
&= d - d' \quad (\because (1)\text{より}\ \ddot{a}'_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|}) \\
&= iv - i'v' \\
&= iv - \{(1+k)i + k\}(1+k)^{-1}v \\
&= iv - iv - k(1+k)^{-1}v \\
&= -\frac{k}{1+k}v
\end{aligned}
$$