昭和46年度　（問題）

午前の部

1.　ある傷害給付特約を付加した被保険者10,000人中，20人が当該給付支給対象者になったとして，この特約に係わる保険事故発生率について，信頼係数95％の近似信頼区間を求めよ。

(注)　$\int_0^{1.96} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0.475$

2.　標準体の被保険者10,000人中の災害死亡者数を12人，標準下体の被保険者2,000人中の災害死亡者数を8人としたとき，災害死亡率についてこれら両グループの間に差異ありと判断してよいか。有意水準5％で検定せよ。

(注)　1.の注に同じ。

3.　n個の2進乱数 $\delta_1, \delta_2, \cdots\cdots, \delta_n$ をとり

$$X = 0.\delta_1\delta_2\cdots\cdots\delta_n \quad (\delta_\nu = 0 \text{ または } 1,\ \nu = 1 \sim n)$$

とおけば，nが十分大きいとき2進数Xは0と1との間において近似的に一様分布をすることを証明せよ。

午後の部

4.　終日運転しているバスがある。任意のバスを0番目のバスとする。

X_k をあるバスの停留所に $k-1$番目のバスが到着してからk番目のバスが到着するまでの時間間隔を表わす確率変数とし，いずれも平均値α^{-1}の指数分布に従っており，かつ，互に独立であるとする。

ある時刻tにこのバス停に到着した客の平均待時間を求めよ。

(注)　$X_1 + \cdots\cdots + X_n$ の確率密度は $g_{n-1}(x) = \alpha \frac{(\alpha x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x}$　$(x > 0)$ である。

〔問〕

次の 5, 6 のいずれかの問題の一つを選択して解答せよ。

5. $m \times m$ 行列 A_1, $m \times k$ 行列 A_2, m 次列ベクトル B, m 次行ベクトル C_1, k 次行ベクトル C_2 が与えられ，かつ，

$|A_1| \neq 0$ で $C_2 - C_1(A_1)^{-1} A_2 < 0$ とし，さらにこの時

$\left.\begin{array}{r}(A_1, A_2)X = B \\ X \geqq 0\end{array}\right\}$ を満たす $m+k$ 次列ベクトル X のうち $(C_1, C_2)X$ を最大ならしめる

X が存在してその解が $\binom{X_1}{0}$ であったとする。ただし，X_1 は m 次列ベクトル。

今，B が $\triangle B$（余り大きくない値）だけ変化した時

(1) 上記の解 X_0 は，$(A_1)^{-1}(\triangle B)$ だけ変化することを示せ。

(2) この時の $(C_1, C_2)X$ の最大値を求めよ。

6. 次の様な支払行列で示されるゲームがある。

		プレーヤーB	
	戦略	R	S
プレーヤーA	P	a_{11}	a_{12}
	Q	a_{21}	a_{22}

プレーヤーAのもつ戦略をP，Q

それぞれの戦略のとられるべき確率を p, q

プレーヤーBのもつ戦略をR，S

それぞれの戦略のとられるべき確率を r, s

とする時，

(1) 最適戦略に対応する p, q, r, s を求めよ。

(2) このゲームの値を求めよ。

昭和46年度　（解答）

午前の部

1.　X_i を $P(X_i=1)=p$，$P(X_i=0)=1-p$ なる二点分布に従う確率変数としたとき，$(\overline{X}-p)\big/\sqrt{p(1-p)/n}$ は近似的に $N(0,\ 1)$ に従うとみてよい。（$\overline{X}=\sum X_i/n$）

不等式。

$$-1.96<(\overline{X}-p)\big/\sqrt{p(1-p)/n}<1.96$$

を解いて $\dfrac{1}{n}$ の項を無視すると

$$\overline{X}-1.96\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})/n}<p<\overline{X}+1.96\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})/n}$$

なる近似信頼区間が得られる。$\overline{X}=20/10{,}000$ とおけば，解

$$0.00115<p<0.00285$$

を得る。

2.　両グループの間に差異なしと仮定すれば，

$$\left(\frac{8}{2{,}000}-\frac{12}{10{,}000}\right)\Big/\sqrt{\frac{8}{2{,}000}\left(1-\frac{8}{2{,}000}\right)\Big/2{,}000+\frac{12}{10{,}000}\left(1-\frac{12}{10{,}000}\right)\Big/10{,}000}$$

は，近似的に，$N(0,\ 1)$ に従う統計量の一つの実現値とみなしてよいから，この値が 1.96 を越えれば仮説を捨て差異ありと判断してよい。上式の計算結果は 1.932 となるので仮説は捨てられず，従って差異ありとはいえない。

3.　$$X=\frac{\delta_1}{2}+\frac{\delta_2}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{\delta_n}{2^n}$$

今，$0<\alpha<\beta\leqq 1$ なる任意の α，β をとるとき，$\alpha<X\leqq\beta$ となる確率は

$$P_r\{\alpha<X\leqq\beta\}=\frac{1}{2^n}\times\left\{\alpha<\frac{\delta_1}{2}+\frac{\delta_2}{2^2}+\cdots+\frac{\delta_n}{2^n}\leqq\beta \text{ を満足する }(\delta_1,\cdots,\delta_n)\text{ の個数}\right\}$$

$$= \frac{1}{2^n} \times \{ 2^n\alpha < N \leqq 2^n\beta \text{ なる整数Nの数} \}$$

$$= \frac{1}{2^n} \times ([2^n\beta] - [2^n\alpha])$$

$$= \frac{1}{2^n} \times \{ (2^n\beta + \theta_1) - (2^n\alpha + \theta_2) \}$$

$$: \ -1 < \theta_1 < 1, \ -1 < \theta_2 < 1$$

$$= (\beta - \alpha) + \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{2^n}$$

よって　$n \to \infty$　のとき

$$P_r \{ \alpha < X \leqq \beta \} \to (\beta - \alpha)$$

となり，nが充分大きいときXは〔0，1〕で一様分布する。

午後の部

4.　待ち時間を　W_t，$S_n = X_1 + \cdots + X_n$　とおく。

$$P(W_t \leqq x) = P(t < S_1 \leqq x+t) + P({}^{\forall}k \geqq 2,\ t > {}^{\forall}y \geqq 0,\ S_{k-1} = y,\ t-y < X_k \leqq x+t-y)$$

$$= e^{-\alpha t} - e^{-\alpha(x+t)} + \sum_{k=2}^{\infty} \int_0^t g_{k-2}(y) \{ e^{-\alpha(t-y)} - e^{-\alpha(x+t-y)} \} dy$$

$$= 1 - e^{-\alpha x} \quad (\because g_0(y) + g_1(y) + \cdots\cdots = \alpha)$$

これより W_t は X_k と同じ指数分布に従うことがわかる。よって $E(W_t) = \alpha^{-1}$

5.　題意より，$(A_1, A_2)\begin{pmatrix} X_0 \\ 0 \end{pmatrix} = B$，　$|A_1| \neq 0$ であるから，

$(A_1)^{-1}$ が存在して，$X_0 = (A_1)^{-1} B$

よって，$CX = C_1 X_0 = C_1 (A_1)^{-1} B$ （元の最大値）

ここで，BをB＋△Bにしたとき，

$$\begin{cases} (A_1, A_2)\ X = B + \triangle B & (①) \\ X \geqq 0 & (②) \end{cases}$$ なる条件下において，

CXを最大ならしめるXが，

$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$，ただし，$X_1$ は m 次列ベクトル

X_2 は K次列ベクトル

であったとする。このとき，上記と同様に，

$A_1X_1 + A_2X_2 = B + \triangle B$ より

$X_1 = (A_1)^{-1}(B + \triangle B) - (A_1)^{-1} A_2X_2$

よって，CXの最大値は，

$C_1X_1 + C_2X_2 = C_1(A_1)^{-1}(B + \triangle B) + (C_2 - C_1(A_1)^{-1}A_2)X_2$

ところが，シンプレックス判定基準により $C_2 - C_1(A_1)^{-1}A_2 < 0$，かつ 条件②より

$X_2 \geqq 0$ であるから

$C\begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq C\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$，　ただし，$X_2 \neq 0$

よって，$X_2 = 0$

したがって，求めるXは

$X^* = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}$，　$X_1 = (A_1)^{-1}(B + \triangle B) = X_0 + (A_1)^{-1} \triangle B$

である。なお，X^* が条件①，②を満たすことはあきらか。

6.　支払行列がサドル点を持つ場合(1)と持たない場合(2)に分けて考える。

(1)　何れかの行又は列の組がその他の行又は列を支配する場合

ⓐ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \vee\!\| & \vee\!\| \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \wedge\!\| & \wedge\!\| \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ⓒ $\begin{pmatrix} a_{11} \geqq a_{12} \\ \\ a_{21} \geqq a_{22} \end{pmatrix}$ ⓓ $\begin{pmatrix} a_{11} \leqq a_{12} \\ \\ a_{21} \leqq a_{22} \end{pmatrix}$ の場合

(2) そうでない場合：行も列も互にその他の行，列を支配しない場合に分けて考察する。

(1) $\left.\begin{array}{l} a_{11} \geqq a_{21} \\ a_{12} \geqq a_{22} \end{array}\right\}$ とすると，戦略Qは，戦略Pに支配される。

従って Player Aは戦略Pを用い，Player Bは min (a_{11}，a_{12})に対応するRかSを用いる。

結局（P，R又はS）が戦略の組として定まり，ゲームの値は min (a_{11}，a_{12}) である。

この場合勿論　$\left.\begin{array}{l} p=1 \quad q=0 \\ r\text{又は}\ s=1\ \text{又は}\ 0,\ r\text{又は}\ s=0\ \text{又は}\ 1 \end{array}\right\}$ の純粋戦略となる。

その他の場合（ⓑ，ⓒ，ⓓ）についても全く同様である。

(2) (1)以外の場合

$$\left.\begin{array}{r} a_{11} r+a_{12} s=a_{21} r+a_{22} s \\ r+s=1 \end{array}\right\} \text{をといて}$$

$$(a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{22})\, r=(a_{22}-a_{12})$$

$$(a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{22}) \neq 0 \quad (\because\ \text{帰びゅう法})$$

$$r=\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}-a_{21}+a_{22}-a_{12}}$$

$$0 \leqq r \leqq 1 \qquad (\because\ \text{帰びゅう法})$$

$$s=\frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}-a_{21}+a_{22}-a_{12}}$$

全く同様にして　$$p=\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}-a_{21}+a_{22}-a_{12}}$$

$$q=\frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}-a_{21}+a_{22}-a_{12}}$$

ゲームの値　$$v=\frac{a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21}}{a_{11}-a_{21}+a_{22}-a_{12}}$$