昭和 45 年度　（問題）

午前の部

1. 被保険者の群団A，Bはそれぞれ1万人からなっていて，1年間の死亡者数は各々90人，110人だった。AとBの死亡率には有意水準5％で差があるといえるか。

注1. $\int_0^{1.96} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \fallingdotseq 0.475$

注2. 死亡率が未知であるから死亡者数の分散も未知であるが，適当に推定したものを正しい値と仮定してよい。

2. ある事象Eが生起してから次に生起するまでの時間Tが指数分布

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

をするとき，事象Eが一定時間内に生起する回数Nはポアッソン分布をすることを示せ。

3. 正規分布の平均値μが判っているとき，分散σ^2の最尤推定量を求めよ。

午後の部

4. X_1, X_2 …, X_n を独立な確率変数とし，それらの平均値はm（未知），分散はσ^2（既知）とする。nは十分大きいものとして，次の問に答えよ。

ただし，

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

とせよ。

〔問〕

(1) 信頼度を99％以上として，平均値mの区間推定を，チェビシェフの不等式を用いて行え。（注1参照）

(2) 同じことをガットマンの不等式を用いて行え。（注2参照）

(3) 同じことを，Z_nが（中心極限定理にもとづき）ガウス分布に従うと見なした上で行え。ただし，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2.6} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0.495$$

注1. チェビシェフの不等式：

$$P\left\{|X_i - m| < \xi\sigma\right\} \geqq 1 - \frac{1}{\xi^2} \qquad (\xi > 0)$$

注2. ガットマンの不等式：

$$P\left\{(Z_n - m)^2 \leqq \frac{S^2}{n-1} + \sigma^2\sqrt{\frac{2(\xi^2-1)}{n(n-1)}}\right\} > 1 - \frac{1}{\xi^2}$$

ここに $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Z_n)^2$ であるが，nが大きいことから

$S^2 \fallingdotseq E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$ および $n \fallingdotseq n-1$ なる条件を用いてよろしい。

5. 不等式

$$x + 3y + 4z \leqq 6$$

$$2x + y + 3z \leqq 4.5$$

を満足する$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ のうち，$x + y + z$ を最大にするx，y，z の値を求めよ。（図解による方法によって求めても差し支えない。）

昭和 45 年度　（解答）

午前の部

1.　群団A，Bの死亡率を各々q_1，q_2とし，帰無仮説をH_0：$q_1 = q_2$とする。

H_0が正しいとき，A，B各群団の死亡者数を各々確率変数X_1，X_2とすれば，$X_1 - X_2$の分布は，平均値0，分散$2Nq(1-q)$の正規分布で近似できる。ただし，$N = 10{,}000$，$q = q_1 = q_2$とする。

ここで，qの推定値を$\bar{q} = \dfrac{90+110}{10{,}000\times 2} = 0.01$

とすれば，標準偏差σの推定値を

$$\sqrt{2\times 10{,}000\times 0.01\times 0.99} = \sqrt{198} \fallingdotseq 14$$

とすることができる。

そこで，有意水準5%で両側検定を行えば，H_0の棄却域は

$$|X_1 - X_2| > 14\times 1.96 \fallingdotseq 27$$

で，$|90-110| = 20$であるから，仮説H_0は棄却できない。従って，死亡率に差があると結論することはできない。

2.　微少時間$\triangle t$内にEが生起する確率は$\lambda\cdot\triangle t$と考えてよい。

$$\because P(0 < T \leqq \triangle t) = F(\triangle t) - F(0) = 1 - e^{-\lambda\cdot\triangle t}$$

$$= 1 - \left\{1 + \frac{-\lambda\cdot\triangle t}{1!} + \frac{(-\lambda\triangle t)^2}{2!} + \cdots\right\}$$

$$= \lambda\cdot\triangle t + {}_0(\triangle t)$$

よって，Eが一定時間t内にn回生起する確率を$P_t(n)$とすると，次式が成立する。

$$P_{t+\triangle t}(n+1) = P_t(n)\cdot\lambda\cdot\triangle t + P_t(n+1)\cdot(1-\lambda\cdot\triangle t)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}P_t(n+1) = \lambda\cdot P_t(n) - \lambda\cdot P_t(n+1) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (1)$$

一方，　$P_t(0) = e^{-\lambda t}$ ……………… (2)

$\because$ $P_t(0) = P(T>t) = 1-P(T \leqq t) = 1-F(t)$

$= 1-(1-e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$

従って，(2)の初期条件の下で(1)なる線型常微分方程式を解いて得た $P_t(n)$ がポアッソン分布に従うことを示せばよい。

$P_t(n) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ とおくと

$$\frac{d}{dt} P_t(n+1) = \frac{d}{dt} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-\lambda t} = \lambda \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t} - \lambda \cdot \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{-\lambda t}$$

よって，$P_t(n) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ は(1)を満足する。また，(2)を満足することも明らかであるから，解の一意性により $P_n(t) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ が所要の解である。従って，$P_t(n)$ は t を一定としたときポアッソン分布に従う。

3.　昭和39年度の数学Ⅱ問題3(i)の解答参照。

午後の部

4.　先づ

$$E(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = m$$

$$V(Z_n) = \sum_{i=1}^{n} V\left(\frac{X_i}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} V(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

である。

(1)　$1-\dfrac{1}{\xi^2} = 0.99$ とするために $\xi = 10$ として

チェビシェフの不等式を Z_n に応用すると

$$P\left\{ | Z_n - m | < \frac{10\sigma}{\sqrt{n}} \right\} \geqq 1 - \frac{1}{10^2} = 0.99$$

故にmは確率0.99 以上で

$$Z_n - \frac{10\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq Z_n + \frac{10\sigma}{\sqrt{n}}$$

となる。

(2) 同じく $\xi = 10$, 更に $S^2 \fallingdotseq \sigma^2$, $n \fallingdotseq n-1$ として Z_n にガッマン不等式を応用すると

$$P\left\{ (Z_n - m)^2 \leqq \frac{\sigma^2}{n} \left(1 + \sqrt{2 \times 99}\right) \right\} > 0.99$$

4を$\sqrt{1+\sqrt{2\times 99}}$ よりも大きい，これに対する近似数として用いて mは確率 0.99 以上で

$$Z_n - \frac{4\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq Z_n + \frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$$

となる。

(3) Z_nを正規化して

$$\frac{Z_n - m}{\sigma\sqrt{n}}$$

とすると，これはN (0, 1)に従うと見てよいから

$$P\left(\left| \frac{Z_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \leqq 2.6 \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2.6}^{2.6} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.99$$

故にmは確率0.99 で

$$Z_n - \frac{2.6\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq Z_n + \frac{2.6\sigma}{\sqrt{n}}$$

となる。

5. (1) $x + 3y + 4z \leqq 6$

(2) $2x + y + 3z \leqq 4.5$

$x + y + z = \lambda$, $x/\lambda = \alpha$, $y/\lambda = \beta$, $z/\lambda = \gamma$ とおくと

$\alpha + \beta + \gamma = 1$

λ, α, β, γを使って(1), (2)を書き直すと,

(1)′

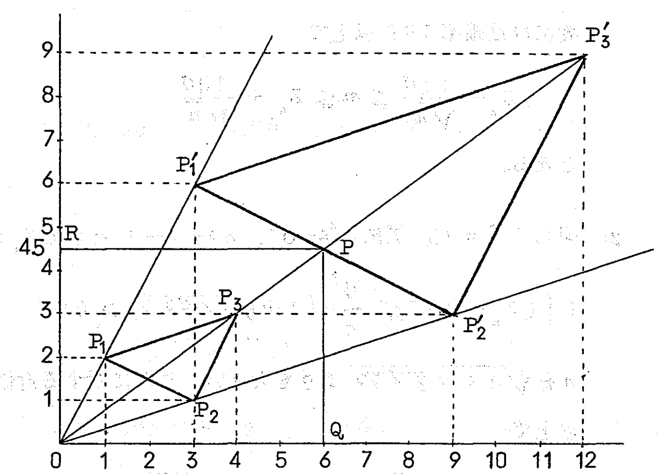
$\lambda(\alpha+3\beta+4\gamma)\leqq 6$

(2)′

$\lambda(2\alpha+\beta+3\gamma)\leqq 4.5$

以下, 図によって解く,

点$(\alpha+3\beta+4\gamma,\ 2\alpha+\beta+3\gamma)$は, $\triangle P_1P_2P_3$ の内部および境界上の点を表わす。



従って, 点$(\lambda(\alpha+3\beta+4\gamma,\ \lambda(2\alpha+\beta+3\gamma))$は, $\triangle P_1P_2P_3$ を原点から放射上にλ倍だけ比例拡大(または縮少)した相似三角形$\triangle P_1'P_2'P_3'$ の内部および境界上の点を表わす(上図参照)。

この$\triangle P_1'P_2'P_3'$の点P' の縦横各座標が点$P(6,\ 4.5)$ のそれより大きくないことからP'は, 長方形OQPR の内部または境界上に存在しなければならない。この条件を満足しながらλを最大にするには, $\triangle P_1'P_2'P_3'$ を長方形OQPR の外側で接するようにすればよい。本問題ではこの接点は図のPとなり(このとき$\lambda=3$), P'の座標をPに一致させるように定めれば所要の解が得られる。図よりPは線分$\overline{P_1'P_2'}$ の中点であるから, $\gamma=0$, $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ となる。これより, $z=0$, $x=y=1.5$ を得る。

答 $x=y=1.5$, $z=0$