昭和 45 年度　（問題）

午前の部

1.　次を証明せよ。ただし，$i \fallingdotseq 0$　とする。

(a)　$D_x > \overline{M}_x$

(b)　$\dfrac{dD_x}{dx} < \dfrac{d\overline{M}_x}{dx}$

2.　年利率 i に基づく名称利率 $i^{(m)}$，名称割引率 $d^{(m)}$ ならびに利力 δ に関して，次の関係が成り立つことを示せ。

(a)　$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \lim_{m\to\infty} d^{(m)}$

(b)　$\delta \doteqdot \dfrac{i^{(m)} + d^{(m)}}{2}$

3.　ある団体は年 1 万名の加入がある。加入者は 3 0 歳丁度で加入し，60 歳丁度で脱退する。60 歳未満においては，死亡以外の脱退はないものとする。

(a)　この団体が定常状態に達したとき，この団体の人数を求める算式を示せ。

(b)　この団体がいま定常状態であるとする。現在，30 歳から 40 歳の間で生存している所属員で，60 歳に達するまでに死亡する者の人数を求める算式を示せ。

午後の部

4.　3 0 歳加入 2 0 年満期養老保険(保険金期末払)の 10 年経過時の払済保険金額を求めよ。ただし，$i = 4\%$，$P_{30:\overline{20|}} = .0339$，${}_{10}V_{30:\overline{20|}} = .4010$ とする。この計算にあたっては，解約控除と付加保険料は考えないものとする。

〔問〕

5.　被保険者(x)が被保険者(y)よりも先に死亡したときは，その年度末から毎年額αの生命年金を満期まで支払い，(y)が(x)よりも先に死亡したときは保険金βを即時に支払って契約は消滅するものとする。また，(y)が満期まで生存したときは保険金γを支払うものとする生命保険の年払純保険料を求めよ。

6.　保険期間n年，払込期間k年（$k<n$）の平準年払保険料の逓減定期保険（保険金期末払）において，第t年度の保険金額はB_t，また

$$B_1 \cdot q_x > B_2 \cdot q_{x+1} > \cdots > B_n \cdot q_{x+n-1}$$　（ただし，xは加入年齢を示す。）

のとき

(a)　初年度末責任準備金が正値であれば，すべての期末責任準備金が正値になることを示せ。

(b)　すべての期末責任準備金が負値になることがないとすれば，とり得るkの最大値は

$$N_{x+k} \geqq N_x - \frac{D_x}{B_1 \cdot C_x} \sum_{t=1}^{n} B_t \cdot C_{x+t-1}$$

をみたすkの最大値であることを証明せよ。

昭和45年度　（解答）

午前の部

1\. (a) $$\overline{\mathrm{M}}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \overline{\mathrm{C}}_{x+t}$$

$$= \int_0^{\infty} \mathrm{D}_{x+t} \cdot \mu_{x+t}\, dt$$

$$= \mathrm{D}_x - \delta \overline{\mathrm{N}}_x$$

$$\therefore\ \mathrm{D}_x > \overline{\mathrm{M}}_x$$

(b) $$\frac{d}{dx}\mathrm{D}_x = -\mathrm{D}_x(\mu_x + \delta)$$

$$\frac{d}{dx}\overline{\mathrm{M}}_x = -\mathrm{D}_x\,\mu_x$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}\mathrm{D}_x < \frac{d}{dx}\overline{\mathrm{M}}_x$$

2\. (a) $i^{(m)} = m\left\{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right\},\ d^{(m)} = m\left\{1-(1-d)^{\frac{1}{m}}\right\}$ より

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{(1+i)^{\alpha}-1}{\alpha}$$

$$= \log(1+i)$$

$$= -\log(1-d)$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{1-(1-d)^{\alpha}}{\alpha}$$

$$= \lim_{m\to\infty} d^{(m)}$$

(b) $$e^{\delta} = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m},$$

$$e^{-\delta} = \left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m} \quad \text{より}$$

$$1+\delta+\frac{\delta^{2}}{2!}+\cdots\cdots = 1+i^{(m)}+\frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{2}+\cdots\cdots \qquad (1)$$

$$1-\delta+\frac{\delta}{2!}-\cdots\cdots = 1-d^{(m)}+\frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{2}-\cdots\cdots \qquad (2)$$

(1)式より(2)式を減じて2次以上の項を省略すると，

$$\delta \fallingdotseq \frac{i^{(m)}+d^{(m)}}{2}$$

3\. (a) $$\frac{10{,}000}{\ell_{30}}\left(T_{30}-T_{60}\right)$$

ここに， $T_{x}=\int_{x}^{\infty}\ell_{y}\,dy$

(b) $$\frac{10{,}000}{\ell_{30}}\int_{30}^{40}\int_{0}^{60-y}\ell_{y+t}\cdot\mu_{y+t}\,dt\,dy = \frac{10{,}000}{\ell_{30}}\int_{30}^{40}\left[-\ell_{y+t}\right]_{t=0}^{t=60-y}dy$$

$$= \frac{10{,}000}{\ell_{30}}\int_{30}^{40}\left(\ell_{y}-\ell_{60}\right)dy$$

$$= \frac{10{,}000}{\ell_{30}}\left[-T_{y}-y\,\ell_{60}\right]_{y=30}^{y=40}$$

$$= \frac{10{,}000}{\ell_{30}}\left(T_{30}-T_{40}-10\,\ell_{60}\right)$$

午 後 の 部

4.　払済保険金を ${}_{10}W_{30:\overline{20|}}$ とすると，

$$ {}_{10}W_{30:\overline{20|}} \cdot A_{40:\overline{10|}} = {}_{10}V_{30:\overline{20|}} \quad より $$

$$ {}_{10}W_{30:\overline{20|}} = \frac{{}_{10}V_{30:\overline{20|}}}{A_{40:\overline{10|}}} $$

$$ = \frac{{}_{10}V_{30:\overline{20|}}}{1-d\,\ddot{a}_{40:\overline{10|}}} $$

$$ = \frac{{}_{10}V_{30:\overline{20|}}}{1-d\,\ddot{a}_{30:\overline{20|}}(1-{}_{10}V_{30:\overline{20|}})} $$

$$ = \frac{{}_{10}V_{30:\overline{20|}}}{1-d\,\dfrac{1-{}_{10}V_{30:\overline{20|}}}{P_{30:\overline{20|}}+d}} $$

$$ = \frac{P_{30:\overline{20|}}+d}{P_{30:\overline{20|}}+d\,{}_{10}V_{30:\overline{20|}}}\ {}_{10}V_{30:\overline{20|}} $$

$$ = \frac{0.0339+0.0385}{0.0339+0.4010\times0.0385}\times 0.4010 $$

$$ = 0.5884 $$

5.　年払純保険料をPとすると，

収入の現価；　$P \cdot \ddot{a}_{xy:\overline{n|}}$

支払の現価；　$\alpha(a_{y:\overline{n|}} - a_{xy:\overline{n|}}) + \beta \bar{A}^{\ 1}_{xy:\overline{n|}} + \gamma\ {}_nE_y$

$$ \therefore\ P = \frac{\alpha(a_{y:\overline{n|}} - a_{xy:\overline{n|}}) + \beta \bar{A}^{\ 1}_{xy:\overline{n|}} + \gamma\ {}_nE_y}{\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}} $$

(a) $t \leqq k$ なる t につき

$$ {}_tV = \frac{1}{D_{x+t}} \left[P_x (D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+t-1}) - (B_1 C_x + B_2 C_{x+1} + \cdots + B_t C_{x+t-1}) \right] $$

$$ = \frac{1}{D_{x+t}} \left[(P_x \cdot D_x - B_1 \cdot C_x) + (P_x D_{x+1} - B_2 \cdot C_{x+1}) + \cdots + (P_x \cdot D_{x+t-1} - B_t \cdot C_{x+t-1}) \right] $$

$$ = \frac{1}{D_{x+t}} \sum_{i=1}^{t} (P_x \cdot D_{x+i-1} - B_i \cdot C_{x+i-1}) $$

$$ = \frac{1}{D_{x+t}} \sum_{i=1}^{t} D_{x+i-1} \left(P_x - B_i \frac{C_{x+i-1}}{D_{x+i-1}} \right) $$

然るに条件 $\dfrac{D_{x+1}}{D_x} {}_1V = P_x - B_1 \dfrac{C_x}{D_x} > 0$

および $B_1 \dfrac{C_x}{D_x} > B_2 \dfrac{C_{x+1}}{D_{x+1}} > \cdots > B_n \dfrac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}}$ $(\because B_1 q_x > B_2 q_{x+1} > \cdots > B_n q_{x+n-1})$

より ${}_tV > 0$ を得る。

$t > k$ なる t については

$$ {}_tV = \frac{1}{D_{x+t}} \sum_{i=0}^{n} B_{x+t+i} \cdot C_{x+t+i-1} > 0 $$

(b) $t \leqq k$ なる t につき

$$ {}_tV \leqq {}_{t+1}V $$

が成り立つから,

$$ \min_{1 \leqq t \leqq k} ({}_tV) = {}_1V \geqq 0 $$

然るに $\dfrac{D_{x+1}}{D_x} {}_1V = P_x - B_1 \dfrac{C_x}{D_x}$ であるから,

$$ \frac{\sum_{t=1}^{n} B_t \cdot C_{x+t-1}}{N_x - N_{x+k}} - B_1 \frac{C_x}{D_x} \geqq 0 $$

すなわち,

$$N_{x+k} \geqq N_x - \frac{D_x}{B_1 \cdot C_x} \sum_{t=1}^{n} B_t \cdot C_{x+t-1}$$

をみたすkの最大値がとり得るkの最大値である。