昭和44年度　（問題）

午前の部

1.　x才の被保険者1,000人のうち1年間の死亡数が3人であった。

各人の死亡確率pは各々等しいものとして，$p<\dfrac{5}{1,000}$であると，有意水準5％で結論出来るか。

2.　ある細菌は無限小の時間dtの間に2つに分裂する確率がλdtであり，死ぬことはないという。

$t=0$のときの個体数が1であるとして，時点tで個体数がnである確率$P_n(t)$は

$$P_n(t)=e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}$$

であることを示せ。

3.　確率変数 X_1，X_2，……，X_n が互いに独立で，$\mathrm{Prob}(X_i=1)=p$，$\mathrm{Prob}(X_i=0)=1-p$（$i=1,2,\cdots,n$）であるとき，pの推定量を最尤法により求めよ。

更に，この最尤推定量が次の諸性質を持つことを示せ。

(i) 不偏性　　(ii) 一致性　　(iii) 充足性

午後の部

4.　X_1及びX_2は同一の指数分布に従う互いに独立な確率変数とする。X_1，X_2のとる値のうち小さい方を$X_{(1)}$，大きい方を$X_{(2)}$とするとき，次のことを示せ。

(1)　$X_{(2)}-X_{(1)}$の分布はもとの指数分布と同じである。

(2)　$X_{(2)}-X_{(1)}$と$X_{(1)}$とは互いに独立である。

〔問〕

5.　A，B２人の零和ゲームで，Aから見た得点が

Aの戦略 τ_A ＼ Bの戦略 τ_B	1	2
1	1	－1
2	－1	1

であるとき，A，Bの最適混合戦略を求めよ。

昭和44年度　（解答）

午前の部

1.　$p=\dfrac{5}{1{,}000}$ を帰無仮説として片側検定を行なう。

$p=\dfrac{5}{1{,}000}$ のとき，死亡数が3人以下である確率は，ポアッソン分布で近似すれば

$$\sum_{n=0}^{3} e^{-pN}\frac{pN^{n}}{n!}=\sum_{n=0}^{3} e^{-5}\frac{5^{n}}{n!}\quad\left(pN=\frac{5}{1{,}000}\times 1{,}000=5\right)$$

$$=e^{-5}\left(\frac{1}{1}+\frac{5}{1}+\frac{25}{1}+\frac{125}{6}\right)$$

$$\doteqdot 2.7^{-5}\times 39$$

$$\doteqdot \frac{39}{143}>0.05$$

したがって仮説は棄却できないから，$p<\dfrac{5}{1{,}000}$ であるとは結論できない。

(注)　二項分布で直接計算することもできる。pNが小であるから，正規分布で近似しては誤差が大きい。

2.　時点tで個体数がnであるとき，$t+dt$までに $n+1$ になる確率は$n\cdot\lambda\ dt$であり，時間dt中に個体数が2以上変る確率はdt^2以下のオーダーであるから，確率微分方程式は

$$P'_n(t)=(n-1)\lambda P_{n-1}(t)-n\lambda P_n(t)$$

この解が $P_n(t)=e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}$ であることを数学的帰納法により証明する。

(1)　$P_1(t)=Ce^{-\lambda t}$

より $t=0$ とおいて $P_1(0)=Ce^{-0}=C$ であるから，初期条件より

$C=1$

(2)　$n-1$ について成り立つとすれば，$P_n(t)=e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}$ とおくと

$$P'_n(t)=-\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}+e^{-\lambda t}(n-1)(1-e^{-\lambda t})^{n-2}\lambda e^{-\lambda t}$$

$$=-\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}+e^{-\lambda t}\lambda(n-1)(1-e^{-\lambda t})^{n-2}$$

$$-\lambda(1-e^{-\lambda t})\,e^{-\lambda t}(n-1)(1-e^{-\lambda t})^{n-2}$$

$$=(n-1)\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-2}-n\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}$$

$$=(n-1)\lambda\ \mathrm{P}_{n-1}(t)-n\lambda\ \mathrm{P}_n(t)$$

であり，この $\mathrm{P}_n(t)$ は初期条件　$\mathrm{P}_n(0)=0\quad n>1$　を満す。

3.　尤度 L は

$$\mathrm{L}=\prod_{\nu=1}^{n}p^{x_\nu}(1-p)^{1-x_\nu}=p^{\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu}(1-p)^{n-\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu}$$

よって

$$\frac{\partial\log\mathrm{L}}{\partial p}=\frac{\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu}{p}-\frac{n-\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu}{1-p}$$

これを 0 とおけば

$$\hat{p}=\frac{\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu}{n}\quad\bar{x}$$

ここで　$0<p<\hat{p}$　のとき　$\dfrac{\partial\log\mathrm{L}}{\partial p}>0$

$\hat{p}<p<1$　のとき　$\dfrac{\partial\log\mathrm{L}}{\partial p}<0$

となるから，$\hat{p}$ は p の最尤推定値となる。

よって最尤推定量は $\overline{\mathrm{X}}$ である。

(i)　不偏性　$\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}})=\mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\mathrm{X}_\nu\right)=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\mathrm{E}(\mathrm{X}_\nu)=\frac{1}{n}\times np=p$

(ii)　一致性　$\overline{\mathrm{X}}$ が p に確率収束することを示す。

$\sigma^2(\overline{\mathrm{X}})=\dfrac{p(1-p)}{n}$，チエビシエフの不等式 $\mathrm{P}(\,|\overline{\mathrm{X}}-p|>k\,)\leqq\dfrac{1}{k^2}\dfrac{p(1-p)}{n}$

より $n \to \infty$ のとき右辺は0に収束することから確率収束が示された。

(iii) 充足性 $L = p^{n\hat{p}}(1-p)^{n(1-\hat{p})} \times 1$ となることから明らかである。

午後の部

4. (1) 題意により($X_{(1)}$, $X_{(2)}$)の確率密度は

$$2\alpha^2 e^{-\alpha(x_1+x_2)} \quad (0 < x_1 < x_2)$$

と書くことができる。

ここで, $r = x_2 - x_1$ とおけば $x_2 = r + x_1$ となるので,

$R = X_{(2)} - X_{(1)}$ とするとき, (R, $X_{(1)}$)の確率密度は

$$f(r, x_1) = 2\alpha^2 \cdot e^{-\alpha(2x_1+r)} \qquad (0 < x_1, \quad 0 < r)$$

これを r を固定して x_1 について積分すればRの確率密度

$$g(r) = \int_0^\infty 2\alpha^2 e^{-\alpha(2x_1+r)} dx_1 = \alpha e^{-\alpha r} \qquad (0 < r)$$

を得る。これは, もとの指数分布に一致する。

(2) $X_{(1)}$ の周辺分布 $h(x_1)$ を計算すれば,

$$h(x_1) = \int_0^\infty 2\alpha^2 e^{-\alpha(2x_1+r)} dr = 2\alpha e^{-\alpha x_1} \qquad (0 < x_1)$$

$$\therefore \ f(r, x_1) = g(r) \cdot h(x_1) \qquad (0 < r, \ 0 < x_1)$$

これより, R, $X_{(r)}$ の独立性がいえた。

5. A, Bが各々戦略1. 2を確率(x, $1-x$), (y, $1-y$)の割合で混合してとるものとする。

Aの平均得点は,

5. $xy - x(1-y) - (1-x)y + (1-x)(1-y) = 1 - 2x - 2y + 4xy$

$$= (1-2x)(1-2y)$$

これを y のあらゆる値に対しての最小値を最大にするためには $x = \frac{1}{2}$

x のあらゆる値に対しての最大値を最小にするためには $y = \frac{1}{2}$

故に，$x = \frac{1}{2}$，$y = \frac{1}{2}$ とするのが最適混合戦略である。