昭和 44 年度　(問題)

午前の部

1.　(x), (y)が共存中で

$$\frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} < \frac{\ddot{a}_{x+t:y+t}}{\ddot{a}_{xy}}$$

ならば ${}_tV(a_{y|x})$が負となることを証明せよ。

2.　保険期間(n)中に死亡すれば，その時から残存保険期間中，確定年金(年額1)を連続払する契約について，死亡前の利率をi，死亡後の利率をi'とするとき，その一時払純保険料は $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}$ と $\bar{A}''^{1}_{x:\overline{n|}}$ との一次結合で表わされることを示せ。

ここに　$i'' = (i - i')/(1 + i')$　とする。

3.　死因(i)および(j)からなる二重脱退残存表において，各死因による死亡が各年齢において一様に分布するとき，死因(i)による絶対死亡率 $\bar{q}^{(i)}_x = 1 - e^{-\int_0^1 \mu^{(i)}_{x+t}\,dt}$ は次式で与えられることを示せ。

$$\bar{q}^{(i)}_x \doteqdot q^{(i)}_x \Big/ \left(1 - \frac{1}{2} q^{(j)}_x\right)$$

ここに $q^{(k)}_x = d^{(k)}_x / l_x$ $(k = i, j)$ とする。

また，$l_{x+t} = a - b(x+t)$ で与えられる場合に，各年齢において，死因(j)によって死亡する確率が死因(i)によって死亡する確率のα倍であるとき，$\bar{q}^{(i)}_x$ を求めよ。

〔問〕

午後の部

4，5か6，7のいずれかの組を選んで解答せよ。

4. $$\overset{(a)}{P}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n-1} C_{x+t-1} \ddot{a}_{\overline{n-t}|} / \ddot{a}_{\overline{n}|} (N_x - N_{x+n})$$

$$\overset{(b)}{P}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} C_{x+t-1} \ddot{s}_{\overline{t}|} / \ddot{s}_{\overline{n}|} (N_x - N_{x+n})$$

とするとき，

(1) $P^{\;1}_{x:\overline{n}|}$ を求める式を導け。

(2) $P_{x:\overline{n}|}$ の値を求めよ。

(3) すべてのxについて $q'_x = 1.2 q_x$ としたとき，$\overset{(q)}{P}_{x:\overline{n}|}$ および $\overset{(q)}{P}{}^{\;1}_{x:\overline{n}|}$ の近似値を求めよ。

ただし，$P_{\overline{n}|} = 32.4‰$，$\overset{(a)}{P}_{x:\overline{n}|} = 1.5‰$，$\overset{(b)}{P}_{x:\overline{n}|} = 1.7‰$，$\overset{(b)(q)}{P}_{x:\overline{n}|} = 1.9‰$ とする。

5. 事業年度始，年齢(x)の群団において，事業年度における死差益の年度末の価は，次の式で表わされることを責任準備金の微分方程式を用いて示せ。

$$\int_0^1 \sum_{(l)} (S_\tau - V_\tau)\mu_{x+\tau}(1+i)^{1-\tau} d\tau - \sum_{(d)} (S_\tau - V_\tau)(1+i)^{1-\tau}$$

ここに $\sum_{(l)}$ はすべての生存契約についての合計を表わし，$\sum_{(d)}$ はすべての死亡契約についての合計を表わすものとする。

6. ある年金制度において，ある一定条件を満たした年金受給者に対してはA基金より給付を行ない，他の一定条件を満たした年金受給者に対してはB基金より給付を行なうものとする。（その他の給付は一切ないものとする。） 一方，保険料は平準保険料方式によりA基金に払い込まれ，またA基金よりB基金に対しては年金現価積立方式による保険料が払い込まれ

るものとする。

加入者および年金受給者がともに定常状態に達したものとした場合のA，B両基金の積立金を比較せよ。

7. 加入者および受給者の集団について定常状態を仮定するとき，次の各場合に，集団全体について収支相等をはかる方式による保険料は，いわゆる一般のいかなる財政方式による標準保険料に一致するかを導け。

(1) 将来，現在の加入者，受給者集団について過去期間を完全通算する。

(2) 将来，現在の加入者集団について過去期間を完全通算する。

(3) 将来，現在の加入者集団について将来期間のみを対象とする。

(4) 将来の加入者集団について計算する。

昭和 44 年度　（解答）

午前の部

1. $$\mathrm{P}(a_{y|x}) = \frac{a_{y|x}}{\ddot{a}_{xy}} = \frac{\ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy}}{\ddot{a}_{xy}} = \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{xy}} - 1$$

一方，共存中のVは

$$ {}_t\mathrm{V}(a_{y|x}) = a_{y+t|x+t} - \mathrm{P}(a_{y|x})\,\ddot{a}_{x+t:y+t}$$

$$= (\ddot{a}_{x+t} - \ddot{a}_{x+t:y+t}) - \left(\frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{xy}} - 1\right)\ddot{a}_{x+t:y+t}$$

$$= \ddot{a}_{x+t} - \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{xy}}\,\ddot{a}_{x+t:y+t}$$

与えられた条件　$\dfrac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} < \dfrac{\ddot{a}_{x+t:y+t}}{\ddot{a}_{xy}}$　より

$$\ddot{a}_{x+t} < \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{xy}}\,\ddot{a}_{x+t:y+t}$$

従って，　$\ddot{a}_{x+t} - \dfrac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{xy}} \cdot \ddot{a}_{x+t:y+t} < 0$

即ち　${}_t\mathrm{V}(a_{y|x}) < 0$　となる。

2. 与えられた条件の一時払保険料は

$$\int_0^n v^t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,\bar{a}'_{\overline{n-t|}}\,dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

である。ここに $\bar{a}'_{\overline{n-t|}}$ は利率 i' によるものとする。

したがって(1)式は

$$\int_0^n v^t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \cdot \frac{1-v'^{\,n-t}}{\delta'} \, dt$$

$$= \frac{1}{\delta'} \bar{A}^{\;1}_{x:\overline{n|}} - \frac{1}{\delta'} \int_0^n v'^n \left(\frac{v}{v'}\right)^t {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt$$

$$= \frac{1}{\delta'} \left(\bar{A}^{\;1}_{x:\overline{n|}} - v'^n \cdot \bar{A}''^{\;1}_{x:\overline{n|}} \right)$$

ここに $\dfrac{v}{v'} = \dfrac{1+i'}{1+i} = \dfrac{1}{1+i''} = v''$

3. $\mu^{(i)}_{x+t} = -\dfrac{1}{\ell_{x+t}} \cdot \dfrac{d\ell^{(i)}_{x+t}}{dt}$

題意により

$$\ell^{(i)}_{x+t} = \ell^{(i)}_x - t\, d^{(i)}_x \qquad (0<t<1)$$

また, $\ell^{(i)}_{x+t} + \ell^{(j)}_{x+t} = \ell_{x+t}$, $d^{(i)}_{x+t} + d^{(j)}_{x+t} = d_{x+t}$

であるから $\ell_{x+t} = \ell_x - t\, d_x \qquad (0<t<1)$

したがって

$$\mu^{(i)}_{x+t} = \frac{d^{(i)}_x}{\ell_{x+t}}$$

$$\int_0^1 \mu^{(i)}_{x+t} \, dt = \int_0^1 \frac{d^{(i)}_x}{\ell_x - t\, d_x} \, dt = -\frac{d^{(i)}_x}{d_x} \log \frac{\ell_x - d_x}{\ell_x}$$

よって

$$\bar{q}^{(i)}_x = 1 - \left(\frac{\ell_x - d_x}{\ell_x}\right)^{\frac{d^{(i)}_x}{d_x}} = 1 - (1 - q_x)^{\frac{d^{(i)}_x}{d_x}}$$

$$=1-\left\{ 1-\frac{d_x^{(i)}}{d_x} q_x+\frac{1}{2}\frac{d_x^{(i)}}{d_x}\left(\frac{d_x^{(i)}}{d_x}-1\right) q_x^2-\cdots\cdots \right\}$$

$$\fallingdotseq q_x^{(i)} \left\{ 1+\frac{1}{2}\left(q_x-q_x^{(i)} \right) \right\}$$

$$\fallingdotseq q_x^{(i)} \Big/ \left(1-\frac{1}{2} q_x^{(j)} \right)$$

次に，$l_{x+t}=a-b\,(x+t)$ で $q_x^{(j)}=\alpha\, q_x^{(i)}$ であるから

$$d_x=b=d_x^{(i)}+d_x^{(j)}=(\alpha+1)\, d_x^{(i)}$$

よって，前半の式より

$$\bar{q}_x^{(i)}=\frac{d_x^{(i)}}{l_x} \Big/ \left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{d_x^{(j)}}{l_x} \right)$$

$$=\frac{d_x^{(i)}}{l_x}\cdot\frac{2\,l_x}{2\,l_x-\alpha\, d_x^{(i)}}$$

$$=\frac{\frac{1}{1+\alpha}\, b}{l_x-\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}\, b} \qquad \left(\because\ d_x^{(i)}=\frac{1}{1+\alpha}\, b\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{1+\alpha}\, b}{a-bx-\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}\, b}$$

午後の部

4. $$\sum_{t=1}^{n-1} C_{x+t-1}\cdot\ddot{a}_{\overline{n-t}|} = \sum_{t=1}^{n-1}\left(vD_{x+t-1}-D_{x+t}\right)\ddot{a}_{\overline{n-t}|}$$

$$= \sum_{t=1}^{n-1}\left(D_{x+t-1}\,a_{\overline{n-t}|}-D_{x+t}\,\ddot{a}_{\overline{n-t}|}\right)$$

$$= D_x\,a_{\overline{n-1}|}+\sum_{t=1}^{n-2}D_{x+t}\left(a_{\overline{n-t-1}|}-\ddot{a}_{\overline{n-t}|}\right)-D_{x+n-1}\,\ddot{a}_{\overline{1}|}$$

$$= D_x\,\ddot{a}_{\overline{n}|}-D_x-\sum_{t=1}^{n-2}D_{x+t}-D_{x+n-1}$$

$$= D_x\,\ddot{a}_{\overline{n}|}-(N_x-N_{x+n})$$

よって，$$\overset{(a)}{P}_{x:\overline{n}|} = \left\{D_x\,\ddot{a}_{\overline{n}|}-(N_x-N_{x+n})\right\}\Big/\ddot{a}_{\overline{n}|}(N_x-N_{x+n})$$

$$= \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}-\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

$$= (P_{x:\overline{n}|}+d)-(P_{\overline{n}|}+d)$$

$$= P_{x:\overline{n}|}-P_{\overline{n}|} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad \text{(a)}$$

また，

$$\sum_{t=1}^{n} C_{x+t-1}\,\ddot{s}_{\overline{t}|} = C_x\,\ddot{s}_{\overline{1}|}+\sum_{t=1}^{n-1}C_{x+t}\,\ddot{s}_{\overline{t+1}|}$$

$$= C_x\,\ddot{s}_{\overline{1}|}+\sum_{t=1}^{n-1}\left(vD_{x+t}-D_{x+t+1}\right)\ddot{s}_{\overline{t+1}|}$$

$$= C_x\,\ddot{s}_{\overline{1}|}+\sum_{t=1}^{n-1}\left\{D_{x+t}(1+\ddot{s}_{\overline{t}|})-D_{x+t+1}\,\ddot{s}_{\overline{t+1}|}\right\}$$

$$= C_x\,\ddot{s}_{\overline{1}|}+\sum_{t=1}^{n-1}D_{x+t}+\sum_{t=1}^{n-1}\left(D_{x+t}\,\ddot{s}_{\overline{t}|}-D_{x+t+1}\,\ddot{s}_{\overline{t+1}|}\right)$$

$$= \left(vD_x-D_{x+1}\right)\ddot{s}_{\overline{1}|}+\sum_{t=1}^{n-1}D_{x+t}+D_{x+1}\,\ddot{s}_{\overline{1}|}-D_{x+n}\,\ddot{s}_{\overline{n}|}$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} - D_{x+n}\ \ddot{S}_{\overline{n|}}$$

$$= (N_x - N_{x+n}) - D_{x+n}\ \ddot{S}_{\overline{n|}}$$

よって，$\overset{(b)}{P}_{x:\overline{n|}} = \left\{ (N_x - N_{x+n}) - D_{x+n}\ \ddot{S}_{\overline{n|}} \right\} \Big/ \ddot{S}_{\overline{n|}}\,(N_x - N_{x+n})$

$$= \frac{1}{\ddot{S}_{\overline{n|}}} - P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = P_{\overline{n|}} - P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{(b)}$$

(a)，(b) 両式を用いて

(1) $P^{1}_{x:\overline{n|}} = P_{x:\overline{n|}} - P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \overset{(a)}{P}_{x:\overline{n|}} + \overset{(b)}{P}_{x:\overline{n|}}$

(2) $P_{x:\overline{n|}} = \overset{(a)}{P}_{x:\overline{n|}} + P_{\overline{n|}} = 33.9‰$

(3) 一般に $q'_x = (1+k)\,q_x$ なら $P^{(q')}_{x:\overline{n|}} \fallingdotseq P_{x:\overline{n|}} + \frac{k}{2} P^{1}_{x:\overline{n|}}$（亀田氏の式）

であるから，

$$P^{(q')}_{x:\overline{n|}} \fallingdotseq P_{x:\overline{n|}} + \frac{0.2}{2} P^{1}_{x:\overline{n|}}$$

$$= P_{x:\overline{n|}} + 0.1 \left(\overset{(a)}{P}_{x:\overline{n|}} + \overset{(b)}{P}_{x:\overline{n|}} \right) = 34.2‰$$

また，

$$P^{1\,(q')}_{x:\overline{n|}} = P^{(q')}_{x:\overline{n|}} - P^{(q')}_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$$

$$= P^{(q')}_{x:\overline{n|}} - \left(P_{\overline{n|}} - \overset{(b)}{P}{}^{(q')}_{x:\overline{n|}} \right)$$

$$= 3.7‰$$

5.　責任準備金の微分方程式は，

$$\frac{d\,V_\tau}{d\tau}-V_\tau\ (\mu_{x+\tau}+\delta)+\mu_{x+\tau}\ S_\tau=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

今，微少期間（τ，$\tau+\triangle\tau$）における死差益を考えると

$$V_\tau(1+\delta\triangle\tau)-V_{\tau+\triangle\tau}=\left(\delta V_\tau-\frac{d\,V}{d\,\tau}\right)\triangle\tau \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

(1)，(2)式より（τ，$\tau+\triangle\tau$）において生じた死差益を年度末まで利殖したものは

$$(S_\tau-V_\tau)\mu_{x+\tau}\ (1+i)^{1-\tau}\triangle\tau$$

よって　（τ，$\tau+\triangle\tau$）におけるすべての生存契約から生ずる死差益の終価は

$$\sum_{(\ell)}(S_\tau-V_\tau)\mu_{x+\tau}\ (1+i)^{1-\tau}\triangle\tau \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

次に，（τ，$\tau+\triangle\tau$）における死亡契約は

$$V_\tau\ (1+\delta\triangle\tau)-S_\tau=-(S_\tau-V_\tau)+V_\tau\delta\triangle\tau$$

なる死差損を生ずる。これを年末まで利殖したものをすべての死亡契約について合計すると

$$\sum_{(d)}(S_\tau-V_\tau)(1+i)^{1-\tau}-\sum_{(d)}V_\tau\delta(1+i)^{1-\tau}\triangle\tau \quad\cdots\cdots \quad (4)$$

また，死亡以外の消滅については

$$\sum_{(\omega)}V_\tau\delta\ (1+i)^{1-\tau}\triangle\tau \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

（τ，$\tau+\triangle\tau$）において純保険料の払込みのあった契約については，収入はそれだけ増加するが積み立てるべき責任準備金も増加し，以上の死差益に吸収される。

今，事業年度（０，１）を多数の微少期間$\triangle\tau$に分け，極限を求めれば

$$\int_0^1\sum_{(\ell)}(S_\tau-V_\tau)\mu_{x+\tau}(1+i)^{1-\tau}d\tau-\sum_{(d)}(S_\tau-V_\tau)(1+i)^{1-\tau}$$

となる。（(4)，(5)における $\Sigma V_\tau\delta(1+i)^{1-\tau}\triangle\tau$ は，消滅数が有限個であるから，$\triangle\tau$を無限に小さくすれば，その和は０となる。）

6. A基金に払い込まれる保険料 ……… P

B基金に払い込まれる保険料 ……… Q

A，B各基金の年金給付 ………… S_A ，S_B

A，B各基金の積立金 ………… F_A ，F_B

以上の前提により，定常状態にあることを勘案して

A基金については

$$P+\delta F_A = S_A + Q$$

B基金については

$$Q+\delta F_B = S_B$$

これより

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{S_A - P + Q}{S_B - Q}$$

7. Ⓐ $\displaystyle\sum_{x=x_r}^{w-1} \ell_x \ddot{a}_x = \frac{1}{d}\left(\sum_{x=x_r}^{w-1}\ell_x - v\,\ell_{x_r}\ddot{a}_{x_r}\right)$

Ⓑ $\displaystyle\sum_{x=x_0}^{x_r-1} \ell_x \frac{D_{x_r}}{D_x}\ddot{a}_{x_r} = \frac{v}{d}\left(\ell_{x_r}\ddot{a}_{x_r} - \ell_{x_0}\frac{D_{x_r}}{D_{x_0}}\ddot{a}_{x_r}\right)$

Ⓒ $\displaystyle\sum_{x=x_0}^{x_r-1} \ell_x \frac{x_r - x}{x_r - x_0}\cdot\frac{D_{x_r}}{D_x}\ddot{a}_{x_r} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{x_r - x_0}\sum_{x=x_0}^{x_r-1}\ell_x\frac{D_{x_r}}{D_x}\ddot{a}_{x_r} - v\,\ell_{x_0}\frac{D_{x_r}}{D_{x_0}}\ddot{a}_{x_r}\right)$

Ⓓ $\displaystyle\sum_{x=x_0}^{x_r-1} \ell_x \frac{\sum_{t\geqq 0} D_{x+t}}{D_x} = \frac{1}{d}\left(\sum_{x=x_0}^{x_r-1}\ell_x - v\,\ell_{x_0}\frac{\sum_{t\geqq 0} D_{x_0+t}}{D_{x_0}}\right)$

の各式を定義式に代入して整理すれば

(1) 賦課方式

(2) ターミナル・ファンディング

(3) 一時払積増方式

(4) 加入年齢方式

となる。