

[問]

昭和 42 年度 (問題)

午前 の 部

1. 二組の正規母集団の平均値が等しいことの検定を行ないたい。方法とその理論的根拠を記せ。ただし、各母集団の分散は未知ではあるが相等しいことがわかっているものとする。
2. 平均値  $1/\alpha$  指数分布 (すなわち確率密度関数が  $\alpha e^{-\alpha x}$ ) にしたがう母集団からの任意抽出による標本  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  が与えられたとき、

$$Y = \min \{ X_1, X_2, \dots, X_n \}$$

とおけば、 $Y$  は平均  $1/(n\alpha)$  の指数分布にしたがうことを証明せよ。

午後 の 部

3.  $F(x; \alpha, \beta)$  をベータ分布関数とする。すなわち、

$$F(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} 1 & (1 \leq x) \\ \int_0^x \frac{t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} dt & (0 < x < 1) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

このとき、 $0 < p < 1$ 、 $r = 1, 2, \dots, n$  ( $n$  は自然数) という条件のもとに、

$$\sum_{k=r}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = F(p; r, n-r+1)$$

となることを証明せよ。

- 4.

(ア) 条件  $Ay = b$ 、 $y \geq 0$  のもとに、 $\max C'y$  の目的関数の係数ベクトル  $C$  について、 $C = C_0$  のときの任意の最適解を  $y_0$  とし、 $C = C_1$  のときの任意の最適解を  $y_1$  とすれば、

[問]

$$(c_1 - c_0)' (y_1 - y_0) \geq 0$$

であることを証明せよ。

(1)  $X_t$  を時刻  $t$  をパラメーターとする確率変数 (非負の整数値をとるものとする) とする。

また時刻  $t$  において  $X_t = n$  であるならば時間区間  $(t, t+h)$  で1変化すなわち次の値  $n+1$  への推移が起る確率は  $\lambda h + o(h)$  に等しく ( $\lambda > 0$ ), さらに  $(t, t+h)$

の間に2変化 (すなわち  $n+2$  への推移) またはそれ以上の変化の起る確率は  $o(h)$  に等

しいものとし,  $P\{X_0 = 0\} = 1$  とする。

このとき,  $t > 0$  に対し  $P\{X_t = n\}$  を求めよ。

昭和 42 年度 (解答)

午前 の 部

1. 2つの母集団はそれぞれ  $N(\mu_1, \sigma^2)$ ,  $N(\mu_2, \sigma^2)$  にしたがうものとする。

$N(\mu_1, \sigma^2)$  にしたがう母集団から標本  $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ ,  $N(\mu_2, \sigma^2)$  にしたがう母集団から標本  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  が抽出されたとする。

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

とおくと,  $\bar{X}$  は  $N(\mu_1, \frac{\sigma^2}{m})$  に,  $\bar{Y}$  は  $N(\mu_2, \frac{\sigma^2}{n})$  にしたがう。 $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  はたがいに独立だから  $\bar{X} - \bar{Y}$  は  $N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma^2}{m} + \frac{\sigma^2}{n})$  にしたがう。

$$\text{一方, } V_1 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2, \quad V_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$$

とおくと,  $\frac{m}{\sigma^2} V_1$ ,  $\frac{n}{\sigma^2} V_2$  はそれぞれ自由度  $m-1$ ,  $n-1$  の  $\chi^2$  分布にしたがう。さらに,  $V_1, V_2$  はたがいに独立だから  $\frac{m}{\sigma^2} V_1 + \frac{n}{\sigma^2} V_2$  は自由度  $m+n-2$  の  $\chi^2$  分布にしたがう。

ここで,

$$T = \frac{\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{m} + \frac{\sigma^2}{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{m}{\sigma^2} V_1 + \frac{n}{\sigma^2} V_2}{m+n-2}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{m V_1 + n V_2}} \cdot \frac{\sqrt{m n} \sqrt{m+n-2}}{\sqrt{m+n}}$$

とおくと,  $T$  は自由度  $m+n-2$  の  $t$  分布にしたがう。しかも,  $T$  は未知数  $\sigma^2$  に無関係となる。さらにいま帰無仮説  $H_0$  を

$$\mu_1 = \mu_2$$

とおくと,  $H_0$  が正しければ  $T$  は  $\mu_1, \mu_2$  にも無関係となる。

いま  $S$  が自由度  $m+n-2$  の  $t$  分布にしたがうものとして、

$$P(|S| > t_\alpha) = \alpha$$

を満足する  $t_\alpha$  を求めておく。

$H_0$  が正しければ

$$P(|T| > t_\alpha) = \alpha$$

となる。したがって、有意水準  $\alpha$  で次のような検定ができる。

- (1)  $|T| > t_\alpha$  ならば  $H_0$  は棄却
- (2)  $|T| \leq t_\alpha$  ならば  $H_0$  は棄却しない。

(注) 以上述べたところでは、 $T$  はある程度天下りのに定義されたわけであるが、尤度比検定法を適用することになれば、上の検定法が直接導びかれる。すなわち、 $(X_1, X_2, \dots, X_m), (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  の同時分布の確率密度関数は

$$L(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n; \mu_1, \mu_2, \sigma^2)$$

$$= \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{\frac{m+n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \sum_{i=1}^m (x_i - \mu_1)^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_2)^2 \right\} \right\}$$

となる。ここで

$$\Lambda(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$$

$$= \frac{\sup_{-\infty < \mu_1 = \mu_2 < \infty, \sigma^2 < \infty} L(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n; \mu_1, \mu_2, \sigma^2)}{\sup_{-\infty < \mu_1, \mu_2 < \infty, \sigma^2 < \infty} L(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n; \mu_1, \mu_2, \sigma^2)} \quad (*)$$

を計算する。

$$\text{まず分母は } \frac{\partial}{\partial \mu_1} L = 0, \frac{\partial}{\partial \mu_2} L = 0, \frac{\partial}{\partial \sigma^2} L = 0 \text{ を満足する } \mu_1, \mu_2$$

$\sigma^2$  を  $L$  に代入してえられる。

$$0 = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \mu_1} L = \frac{\partial}{\partial \mu_1} \log L = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_1) \text{ から } \mu_1 = \frac{\sum x_i}{m} = \bar{x}$$

同様に  $\mu_2 = \frac{\sum y_i}{n} = \bar{y}$

さて目的はLの最大値を計算することにあるから、計算を楽にするため  $\frac{\partial}{\partial \sigma^2} L = 0$

のかわりに、 $\xi = \frac{1}{\sigma^2}$  とおいて、 $\frac{\partial}{\partial \xi} \log L = 0$  を用いることにする。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \log L &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{m+n}{2} \log \frac{\xi}{2\pi} - \frac{\xi}{2} \{ \sum (x_i - \mu_1)^2 + \sum (y_i - \mu_2)^2 \} \right] \\ &= \frac{m+n}{2} \frac{1}{\xi} - \frac{1}{2} \{ \sum (x_i - \mu_1)^2 + \sum (y_i - \mu_2)^2 \} \end{aligned}$$

$$\therefore \xi = \frac{m+n}{\sum (x_i - \mu_1)^2 + \sum (y_i - \mu_2)^2} = \frac{m+n}{\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2}$$

$$\begin{aligned} \text{こうして、(*) の分母} &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{m+n}{2}} \left( \frac{m+n}{\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2} \right)^{\frac{m+n}{2}} \\ &\quad \times \exp \left( -\frac{m+n}{2} \right) \end{aligned}$$

一方、(\*) の分子は  $\frac{\partial}{\partial \mu} L(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n; \mu, \mu, \sigma^2) = 0$ ,

$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} L = 0$  を満足する  $\mu, \sigma^2$  を  $L(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n; \mu, \mu, \sigma^2)$

に代入すればよい。結果は

$$\left( \frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{m+n}{2}} \left( \frac{m+n}{\sum (x_i - \frac{\sum x_j + \sum y_k}{m+n})^2 + \sum (y_i - \frac{\sum x_j + \sum y_k}{m+n})^2} \right)^{\frac{m+n}{2}} \exp \left( -\frac{m+n}{2} \right)$$

こうして

$$\Lambda = \left( \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2}{\sum \left(x_i - \frac{m\bar{x} + n\bar{y}}{m+n}\right)^2 + \sum \left(y_i - \frac{m\bar{x} + n\bar{y}}{m+n}\right)^2} \right)^{\frac{m+n}{2}}$$

さて、この式の  $\left( \right)^{\frac{m+n}{2}}$  内の分母は

$$\begin{aligned} & \sum \left\{ (x_i - \bar{x}) + \left( \bar{x} - \frac{m\bar{x} + n\bar{y}}{m+n} \right) \right\}^2 + \sum \left\{ (y_i - \bar{y}) + \left( \bar{y} - \frac{m\bar{x} + n\bar{y}}{m+n} \right) \right\}^2 \\ &= \sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^m \left( \bar{x} - \frac{m\bar{x} + n\bar{y}}{m+n} \right)^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n \left( \bar{y} - \frac{m\bar{x} + n\bar{y}}{m+n} \right)^2 \\ &= \sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2 + m \left( \frac{n(\bar{x} - \bar{y})}{m+n} \right)^2 + n \left( \frac{m(\bar{x} - \bar{y})}{m+n} \right)^2 \\ &= \sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2 + \frac{mn}{m+n} (\bar{x} - \bar{y})^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \Lambda = \left( \frac{1}{1 + \frac{\frac{mn}{m+n} (\bar{x} - \bar{y})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2}} \right)^{\frac{m+n}{2}}$$

有意水準  $\alpha$  における尤度比検定は、

$$P(\Lambda < \lambda_\alpha) = \alpha$$

となるような  $\lambda_\alpha$  をきめて

- (1)  $\Lambda < \lambda_\alpha$  なら  $H_0$  を棄却
- (2)  $\Lambda \geq \lambda_\alpha$  なら  $H_0$  を棄却しない

とするものである。ここで  $\Lambda$  の形から明らかに

$$P(\Lambda < \lambda_\alpha) = \alpha$$

とするのと

$$P(|T| > t_\alpha) = \alpha$$

とするのは全く同じことである。こうして前に述べた  $t$  分布による検定に帰着する。

2.  $x > 0$  に対し

$$\begin{aligned} P(Y > x) &= \prod_{i=1}^n P(X_i > x) = \left( \int_x^\infty \alpha e^{-\alpha t} dt \right)^n = (e^{-\alpha x})^n \\ &= e^{-n\alpha x} = \int_x^\infty n\alpha e^{-n\alpha t} dt \end{aligned}$$

すなわち、 $Y$  の確率密度関数は  $n\alpha e^{-n\alpha x}$  となる。

〔別解〕

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

とおくと、 $Y$  の確率密度関数は、 $x > 0$  に対し

$$\begin{aligned} n \left( \int_x^\infty f(x) dx \right)^{n-1} f(x) &= n \left( \int_x^\infty \alpha e^{-\alpha t} dt \right)^{n-1} \alpha e^{-\alpha x} \\ &= n \left( [-e^{-\alpha t}]_x^\infty \right)^{n-1} \alpha e^{-\alpha x} = n\alpha e^{-n\alpha x} \end{aligned}$$

したがって、 $Y$  は平均値  $\frac{1}{n\alpha}$  の指数分布にしたがう。

午後 の 部

3. 定義により

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

これを部分積分すれば

$$\begin{aligned} &= \left[ -\frac{t^{\alpha-1} (1-t)^\beta}{\beta} \right]_0^1 + \frac{\alpha-1}{\beta} \int_0^1 t^{\alpha-2} (1-t)^\beta dt \\ &= \frac{\alpha-1}{\beta} B(\alpha-1, \beta+1) \end{aligned}$$

である。この計算を繰り返して行けば

$$B(\alpha-1, \beta+1) = \frac{\alpha-2}{\beta+1} B(\alpha-2, \beta+2)$$

.....

$$B(2, \beta+\alpha-2) = \frac{1}{\alpha+\beta-2} B(1, \beta+\alpha-1)$$

が得られる。ここで

$$B(1, \alpha+\beta-1) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha+\beta-2} dt = (\alpha+\beta-1)^{-1}$$

であるから、上記の諸式を辺々相乗することにより

$$B(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha-1)!}{\beta(\beta+1)\cdots(\alpha+\beta-1)} = \frac{(\alpha-1)!(\beta-1)!}{(\alpha+\beta-1)!}$$

が得られる。以下では問題を数学的帰納法を用いて証明する。

$$\begin{aligned} F(p; 1, n) &= B^{-1}(1, n) \int_0^p (1-t)^{n-1} dt \\ &= B^{-1}(1, n) \left[ -\frac{(1-t)^n}{n} \right]_0^p \\ &= B^{-1}(1, n) \frac{1-(1-p)^n}{n} \end{aligned}$$



$$= 1 - (1-p)^n$$

しかるに

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n \\ &= [p + (1-p)]^n - (1-p)^n \\ &= 1 - (1-p)^n \end{aligned}$$

これで  $r=1$  のときについては証明された。つぎに  $r=1, \dots, s-1$  については等式は正しいと仮定して,  $r=s$  について証明する。

$$\begin{aligned} F(p; s, n-s+1) &= B^{-1}(s, n-s+1) \int_0^p t^{s-1} (1-t)^{n-s} dt \\ &= B^{-1}(s, n-s+1) \left\{ \left[ -\frac{t^{s-1} (1-t)^{n-s+1}}{n-s+1} \right]_0^p \right. \\ &\quad \left. + \frac{s-1}{n-s+1} \int_0^p t^{s-2} (1-t)^{n-s+1} dt \right\} \\ &= -\frac{n!}{(s-1)! (n-s+1)!} t^{s-1} (1-t)^{n-s+1} \\ &\quad + B^{-1}(s-1, n-s+2) \int_0^p t^{s-2} (1-t)^{n-s+1} dt \end{aligned}$$

ここで帰納法の仮定を用いて

$$\begin{aligned} &= -\binom{n}{s-1} t^{s-1} (1-t)^{n-s+1} + \sum_{k=s-1}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=s}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

これで  $r=1, \dots, n$  について等式が成り立つことが証明できた。

〔別解 1〕

証明すべき等式の左辺を  $p$  で微分すると、 $t^{r-1}(1-t)^{n-r}$  は  $t$  の連続関数だから、

$$B^{-1}(r, n-r+1)p^{r-1}(1-p)^{n-r}$$

前解で得た結果  $B(r, n-r+1) = (r-1)!(n-r)!/n!$  を用いれば

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} p^{r-1}(1-p)^{n-r}$$

一方右辺を  $p$  で微分すると

$$\begin{aligned} & \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} k p^{k-1} (1-p)^{n-k} - \sum_{k=r}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k) p^k (1-p)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=r}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} - \sum_{k=r}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k-1)!} p^k (1-p)^{n-k-1} \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} p^{r-1} (1-p)^{n-r} \end{aligned}$$

したがって、

$$F(p; r, n-r+1) - \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

は  $p$  の値によらない定数である。しかるに  $p=0$  とおくと、この式の才1項、才2項とも  $0$  であるから証明すべき等式の成り立つことが解る。

〔別解 2〕

証明すべき等式の両辺とも、 $p$  の巾級数であるから任意の  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) につき、 $p^k$  の係数が両辺において等しいことを証明すればよい。

まず、右辺におけるその係数は

$$\frac{1}{B(r, n-r+1)} \frac{1}{k} \binom{n-r}{k-r} (-1)^{k-r} = (-1)^{k-r} \frac{1}{k} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$$

$$\times \frac{(n-r)!}{(k-r)!(n-k)!} = (-1)^{k-r} \frac{1}{k} \frac{n!}{(r-1)!(n-k)!(k-r)!}$$

証明は  $r$  に関する帰納法による。まず、 $r=n$  なら、あきらかに定理は成り立つ。 $r=r_0$  のとき成り立つとして  $r=r_0-1$  のときにも成り立つことを証明しよう。

$r=r_0-1$  のとき

「証明すべき等式の左辺」

$$= \sum_{k=r_0-1}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=r_0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \binom{n}{r_0-1} p^{r_0} (1-p)^{n-r_0+1}$$

∴ 「左辺の  $p^k$  の係数」

$$= (-1)^{k-r_0} \frac{1}{k} \frac{n!}{(r_0-1)!(n-k)!(k-r_0)!} + \binom{n}{r_0-1} \binom{n-r_0+1}{k-r_0+1} (-1)^{k-r_0+1}$$

$$= (-1)^{k-r_0+1} \left\{ -\frac{1}{k} \frac{n!}{(r_0-1)!(n-k)!(k-r_0)!} + \right.$$

$$\left. + \frac{n!}{(r_0-1)!(n-r_0+1)!} \frac{(n-r_0+1)!}{(k-r_0+1)!(n-k)!} \right\}$$

$$= (-1)^{k-r_0+1} \frac{n!}{k(n-k)!(k-r_0+1)!(r_0-1)!} \{ k - (k-r_0+1) \}$$

$$= (-1)^{k-r_0+1} \frac{1}{k} \frac{n!}{(n-k)!(k-r_0+1)!(r_0-2)!}$$

すなわち、 $r=r_0-1$  のときにも定理は成り立つ。

4.

$$(f) \quad (c_1 - c_0)' (y_1 - y_0) = (c_1' y_1 - c_1' y_0) + (c_0' y_0 - c_0' y_1)$$

題意によって

$$c_1' y_1 - c_1' y_0 \geq 0, \quad c_0' y_0 - c_0' y_1 \geq 0 \quad \text{ゆえに}$$

$$(c_1 - c_0)' (y_1 - y_0) \geq 0$$

である。

(i)  $P\{X_t = n\} = P_n(t)$  とおくと,  $t$  から  $t+h$  の間で1増える確率は

$\lambda h + o(h)$ , 変化のない確率は  $1 - \lambda h + o(h)$  であるから,

$$P_0(t+h) = (1 - \lambda h + o(h)) P_0(t),$$

$$P_n(t+h) = (1 - \lambda h + o(h)) P_n(t) + (\lambda h + o(h)) P_{n-1}(t), \text{ for } n \geq 1$$

を得る。これらの式から

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = (-\lambda + o(h)) P_0(t)$$

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = (-\lambda + o(h)) P_n(t) + (\lambda + o(h)) P_{n-1}(t)$$

ここで  $h \rightarrow 0$  とすれば

$$(1) \quad P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$

$$(2) \quad P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), \text{ for } n \geq 1$$

微分方程式(1)を解くと,  $P_0(t) = C_0 e^{-\lambda t}$  初期条件  $P_0(0) = 1$  を入れると,  $C_0 = 1$

である。微分方程式(2)において,  $n=1$  とおいて解くと,  $P_1'(t) = -\lambda P_1(t)$  の一般解

は  $C_1 e^{-\lambda t}$ ,  $P_1(t) = -\lambda P_1(t) + \lambda e^{-\lambda t}$  の特殊解は  $\lambda t e^{-\lambda t}$  であるから,

この場合の一般解は  $P_1(t) = (C_1 + \lambda t) e^{-\lambda t}$  である。しかるに初期条件は, 題意に

より  $P_0(0) = 1$

また,

$$P_0(0) + P_1(0) + P_2(0) + \dots = 1$$

ゆえに

$$(3) \quad P_n(0) = 0, \quad \text{for } n \geq 1$$

ゆえに,  $C_1 = 0$  で,

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

を得る。ここで,  $P_{n-1}(t) = (\lambda t)^{n-1} / (n-1)! e^{-\lambda t}$  を仮定して, 微分方程式(2)を解くと,  $P'_n(t) = -\lambda P_n(t)$  の一般解は  $C_n e^{-\lambda t}$ ,  $P'_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$  の特殊解は  $(\lambda t)^n / n! e^{-\lambda t}$  であるから,  $P_n(t) = [C_n + (\lambda t)^n / n!] e^{-\lambda t}$  が一般解となる。初期条件(3)を仮定すれば,

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

であるから,  $n = 0, 1, 2, \dots$  についてこれが求める解である。