昭和 42 年度　（解答）

午前の部

1.　k番目のときに最後の不良品が発見されるということは，$k-1$番目までに$a-1$個の不良品が抽出され，さらにk番目に不良品が抽出されることを意味する。

最初の$k-1$番目までは，仮定により，$a+b$個から$k-1$個を選んでできる組合せはすべて等しい確率を有することになる。その中で，a個の不良品から$a-1$個，b個の良品から$k-a$個をとる組合せは$\binom{a}{a-1}\cdot\binom{b}{k-a}$とおりあるから，最初の$k-1$番目までに$a-1$個の不良品が抽出される確率は，

$$\frac{\binom{a}{a-1}\binom{b}{k-a}}{\binom{a+b}{k-1}}$$

となる。

$k-1$番目までに$a-1$個の不良品が抽出されるという条件のもとでは，k番目の抽出のときには，$a+b-k+1$個中不良品は1個だけであるから，その不良品が抽出される条件つき確率は，$\dfrac{1}{a+b-k+1}$となる。故に求める確率は，

$$\frac{1}{a+b-k+1}\cdot\frac{\binom{a}{a-1}\binom{b}{k-a}}{\binom{a+b}{k-1}}=\frac{a\,b\,!\,(k-1)\,!}{(a+b)\,!\,(k-a)\,!}$$

〔別　解〕

k番目の抽出でちょうど全部の不良品が発見されることは，最初のk回の抽出で全部の不良品が発見されるが，最初の$k-1$回の抽出では全部の不良品が発見されていないことを意味する。よって求める確率は，

$$\frac{\binom{a}{a}\binom{b}{k-a}}{\binom{a+b}{k}}-\frac{\binom{a}{a}\binom{b}{k-a-1}}{\binom{a+b}{k-1}}=\frac{a\,b\,!\,(k-1)\,!}{(a+b)\,!\,(k-a)\,!}$$

2. まず X の確率法則を考える。

Xのとり得る値は0, 1, 2,……, n, ……

$P(X=0)=p$, $P(X=1)=(1-p)\cdot p$, ……,

$P(X=n)=(1-p)^n\cdot p$, …… である。

平均値μは

$$\mu=1\times(1-p)p+2(1-p)^2 p+\cdots\cdots+n(1-p)^n p+\cdots\cdots$$

となる。ここで$1-p=q$ とおくと

$$\mu=q\cdot p+2q^2 p+3q^3 p+\cdots\cdots\cdots+nq^n p+\cdots\cdots$$

$$=qp(1+2q+3q^2+\cdots\cdots+nq^{n-1}+\cdots\cdots\cdots)$$

となる。いま,

$Q(q)=q+q^2+\cdots\cdots+q^n+\cdots\cdots$, $\left(Q(q)=\dfrac{q}{1-q}\right)$を考えると,

$$Q'(q)=1+2q+\cdots\cdots+nq^{n-1}+\cdots\cdots$$

$$=\left(\frac{q}{1-q}\right)'$$

$$=\frac{1}{(1-q)^2}$$

から,

$$\mu=qp\times Q'(q)=\frac{1-p}{p}$$

分散 σ^2 は定義により

$$\sigma^2=\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot(npq^n)-\mu^2=\sum_{n=0}^{\infty}\{q^2\cdot n(n-1)pq^{n-2}+q\cdot np\cdot q^{n-1}\}-\mu^2$$

となり，次の計算により求めることができる。

$$\sigma^2=q^2p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial q^2}(q^n)+qp\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial q}(q^n)-\mu^2$$

$$= q^2 p \cdot \frac{\partial^2}{\partial q^2} \sum_{n=0}^{\infty} q^n + qp \cdot \frac{\partial}{\partial q} \sum_{n=0}^{\infty} q^n - \mu^2$$

$$= q^2 p \cdot \left(\frac{1}{1-q}\right)'' + qp \cdot \left(\frac{1}{1-q}\right)' - \frac{(1-p)^2}{p^2}$$

$$= q^2 p \times \frac{2}{(1-q)^3} + qp \times \frac{1}{(1-q)^2} - \frac{(1-p)^2}{p^2}$$

$$= \frac{2q^2}{p^2} + \frac{qp}{p^2} - \frac{q^2}{p^2}$$

$$= \frac{1}{p^2} (2q^2 + qp - q^2)$$

$$= \frac{1}{p^2} (q^2 + qp)$$

$$= \frac{q(q+p)}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

3. 題意により，一様分布を

$$f(x) = 1 \quad (-0.5 < x < 0.5)$$
$$= 0 \quad (\text{その他で})$$

とすると，

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{-0.5} x f(x)\, dx + \int_{-0.5}^{0.5} x f(x)\, dx$$

$$+ \int_{0.5}^{\infty} x f(x)\, dx$$

$$= \int_{-0.5}^{0.5} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-0.5}^{0.5} = 0$$

同様に

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_{-0.5}^{0.5} x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-0.5}^{0.5} = \frac{1}{12}$$

故に

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{1}{12}$$

$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_{75}$ はたがいに独立であるから

$$E(X_1 + X_2 + \cdots\cdots\cdots + X_{75}) = 0$$

$$V(X_1 + X_2 + \cdots\cdots\cdots + X_{75}) = \frac{75}{12} = \frac{25}{4}$$

中心極限定理を適用して

$$P\{-\alpha < X_1 + X_2 + \cdots\cdots\cdots + X_{75} < \alpha\}$$

$$= P\left\{ -\frac{2}{5}\alpha < \frac{X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_{75}}{\sqrt{\frac{25}{4}}} < \frac{2}{5}\alpha \right\}$$

$$\fallingdotseq \int_{-\frac{2}{5}\alpha}^{\frac{2}{5}\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$$

ここで $\displaystyle\int_{-1.96}^{1.96} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = 0.95$ であるから

$$\frac{2}{5}\alpha = 1.96$$

故に　$\alpha = 4.9$

よって，丸めの誤差の総和が4.9をこえない確率はほゞ0.95である。

午後の部

4. 昆虫が生む卵の数を表わす確率変数をNとし，ふ化した卵の個数を表わす確率変数をXとする。このとき仮定によれば Poisson 分布 $P(N=n)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ であり，またN＝n ($n=1,\ 2,\cdots\cdots$) という条件のもとでは，Xの条件つき分布は二項分布 Bi (n，p) となる。

$$P(X=k)=\sum_{n=k}^{\infty}P(X=k,\ N=n)=\sum_{n=k}^{\infty}P(X=k\,|\,N=n)\times P(N=n)$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\{\lambda(1-p)\}^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\cdot e^{\lambda(1-p)}$$

$$=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\qquad(k=0.\ 1,\ \cdots\cdots)$$

従って，Xは Poisson分布 $P_0(\lambda p)$ にしたがう確率変数となる。

5.

方程式

$$x^2+ax+(a+b+k)=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(1)}$$

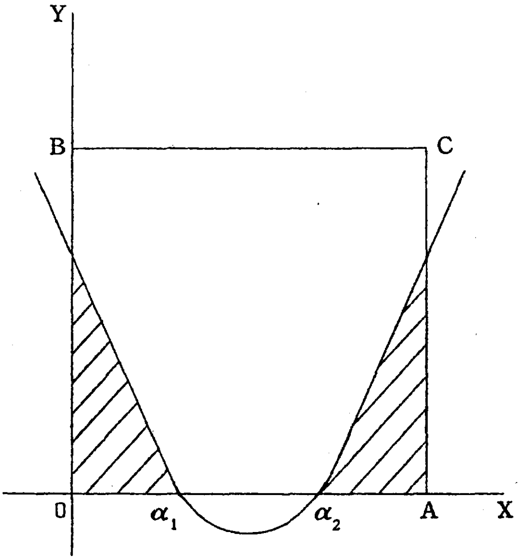
が実根をもつための必要十分条件は

$$a^2-4(a+b+k)\geqq 0$$

すなわち，

$$b \leqq \frac{1}{4}(a^2 - 4a - 4k) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

さて，a，bは0と4の間の任意の実数値をとり得るから直交座標OX，OY上に，点A（4，0），点B（0,4）をとり正方形OACBを作れば，a，bのとり得る値は，この正方形内の点に対応する。



次に(2)を満足するa，bの値は，正方形OACB内にあって，放物線

$$f(a) = \frac{1}{4}(a^2 - 4a - 4k)$$

より下方の部分にある点に対応する。

a，bはそれぞれ独立に区間（0,　4）で均等分布するから，方程式(1)が実根をもつ確率pは，右図において面積OACBに対する斜線の部分として表わされる。すなわち，

$$p = \frac{1}{16}\left[\int_0^{\alpha_1} f(a)\,da + \int_{\alpha_2}^{4} f(a)\,da\right] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ところで，$f(a)$は$a=2$で最小となり，そのときの最小値は$-(k+1)$であり，kの値によって上下に変動する。したがって，確率pもいろいろな値をとりうるが，kの変動によって次のようになる。

$k \geqq -1$　のとき　　$p \leqq \frac{1}{12}$

$-4 \leqq k < -1$　のとき

$$\frac{1}{16}\int_0^4 \frac{1}{4}(a^2 - 4a + 4)\,da < p \leqq \frac{1}{16}\int_0^4 \frac{1}{4}(a^2 - 4a + 16)\,da$$

$$\frac{1}{12} < p \leqq \frac{5}{6}$$

$-5 \leqq k < -4$のとき　　$\frac{5}{6} < p \leqq 1$

$k \leqq -5$ のとき　　　$p = 1$

したがって，方程式(1)が実根をもつ確率pが$\frac{1}{2}$となるのは $-4 < k < -1$ のとき

であり，次式を解くことによって得られる。

$$p = \frac{1}{2} = \frac{1}{16}\int_0^4 \frac{1}{4}\left(a^2 - 4a - 4k\right) da$$

$$\therefore \quad k = -\frac{8}{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{（答）}$$