昭和41年度　（問題）

午前の部

1.　$a_x^{ai} = \dfrac{N_x^{ii} - D_x^{ii}\,\ddot{a}_x^{i}}{D_x^{aa}}$ を証明せよ。

2.　$\bar{a}_x = p_x\left(v\,\bar{a}_{x+1} - \dfrac{v}{\delta} + \dfrac{iv}{\delta^2}\right) + \dfrac{1}{\delta} - \dfrac{iv}{\delta^2}$ を証明せよ。

ただし，$0 \leqq t \leqq 1$ においては ${}_tp_x = 1 - t\cdot q_x$ とする。

3.　第t年度の死亡には死亡保険金 T_t を年度末に支払い，満期時（n年）には生存保険金 E_n を支払う全期払生命保険契約において，第t年度末の責任準備金が

$$1 + \frac{\theta_x}{D_{x+t}} - (P + d)\,\ddot{a}_{x+t}$$

で表わされるための必要かつ十分な条件を求めよ。

ただし，θ_x はtに無関係な値とし，Pは当該保険契約の年払純保険料とする。

午後の部

次の4問のうち，4.　5の2問または6.　7の2問のどちらかの組をえらんで解答せよ。

4.　y歳の父が，x歳の息子のために，自分がz歳に達した日から，あるいはそれ以前に死亡した場合には，その次の応当日から，息子に年額A円の終身年金を，また年金受給前の息子の死亡の場合には即時に既払込保険料が受取れるような契約を締結した。

年払営業保険料を計算せよ。ただし，予定事業費は次の通りとする。

年金開始前	営業保険料の α 倍
年金開始後	年金額の β 倍

〔問〕

5.

(イ) x 歳加入，n 年満期養老保険（保険金年末払）の才t 年度末責任準備金を ${}_tV_x^{(E)}$

(ロ) 同上の条件で，死亡保険金を満期日に支払う契約の責任準備金を ${}_tV_x^{(T)}$

(ハ) n 年満期定期積金の才t 年度末積立金を ${}_tV_x^{(S)}$

とするとき，

(1) $${}_tV_x^{(T)} = v^n \ {}_tV_x^{(E)} + (1-v^n)\ {}_tV_x^{(S)}$$

を証明せよ。

(2) (ロ)の契約において，死亡した場合，死亡保険金のほかに死亡直後の契約応当日から満期直前の契約応当日まで毎年uの年金を支払うとした場合の責任準備金を ${}_tV_x^{(T+R)}$ とすれば，

$${}_tV_x^{(T+R)} = \left\{1 - \frac{u(1+i)}{i}\right\} {}_tV_x^{(T)} + \frac{u(1+i)}{i}\ {}_tV_x^{(E)}$$

となることを証明せよ。

ただし，保険料は年払，責任準備金はいずれも純保険料式とする。

6.

(1) 次の等式を証明せよ。

$$\ell_r \ddot{a}_r + d \sum_{x=r+1}^{\omega} \ell_x \ddot{a}_x = \sum_{x=r}^{\omega} \ell_x$$

(2) 定常状態における積立金が $\displaystyle\sum_{x=r+1}^{\omega} \ell_x \ddot{a}_x$ で表わされる財政方式を上式から導け。

7. 生存退職者に加入全期間の給与累計額に比例する年金額を給付する制度（死亡給付はないものとする）において，次のように過去勤務を通算することとした。

すなわち，制度発足時に，過去勤務期間に対応する給付の算定方式として，発足時給与と給与指数によって過去勤務期間のみなし給与累計額を推定し，それに対しては発足後の将来勤務期間の給与累計額に対する支給率のσ割合を乗ずることとする。

この場合，発足後直ちに一律 j の給与改訂があったとすれば，これによって何程の不足が計上されるか。

なお，計算に当っては次の条件を仮定せよ。

(1) 財政方式は加入年齢方式とし，過去勤務債務は有限積立を行なう。

(2) 加入者は一定年齢 a 歳において，年1回加入する。

(3) 人員，給与は定常状態にある。

(4) 保険料は加入応当日ごとの年払とし，制度は定時加入日に発足する。

昭和 41 年度　（解答）

午前の部

1. $\ell_x = \ell_x^{aa} + \ell_x^{ii}$ から

$$\ell_x \ddot{a}_x = \ell_x^{aa} \ddot{a}_x^{a} + \ell_x^{ii} a_x^{i} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

また，$$\ddot{a}_x^{a} = \ddot{a}_x^{aa} + a_x^{ai} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(2)を(1)に代入して変形すると，

$$a_x^{ai} = \frac{\ell_x}{\ell_x^{aa}} \ddot{a}_x - \ddot{a}_x^{aa} - \frac{\ell_x^{ii}}{\ell_x^{aa}} \ddot{a}_x^{i}$$

$$= \frac{D_x \ddot{a}_x}{D_x^{aa}} - \frac{N_x^{aa}}{D_x^{aa}} - \frac{D_x^{ii} \ddot{a}_x^{i}}{D_x^{aa}}$$

$$= \frac{1}{D_x^{aa}} (N_x - N_x^{aa} - D_x^{ii} \ddot{a}_x^{i})$$

$$= \frac{1}{D_x^{aa}} (N_x^{ii} - D_x^{ii} \ddot{a}_x^{i})$$

2. $$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} v^t \, {}_tp_x \, dt = \underbrace{\int_0^{1} v^t \, {}_tp_x \, dt}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} v^t \, {}_tp_x \, dt}_{I_2}$$

（ I_1　　I_2　とおけば ）

$$I_2 = \int_0^{\infty} v^{t+1} \, {}_{t+1}p_x \, dt = v p_x \int_0^{\infty} v^t \, {}_tp_{x+1} \, dt = v p_x \bar{a}_{x+1}$$

また　${}_tp_x = 1 - t q_x$　より

$$I_1 = \int_0^{1} v^t (1 - t q_x) dt$$

$$= \int_0^{1} e^{-\delta t} (1 - t q_x) dt$$

$$= \int_0^1 e^{-\delta t}\,dt - q_x \int_0^1 t\, e^{-\delta t}\,dt$$

$$= \left[-\frac{e^{-\delta t}}{\delta}\right]_0^1 - q_x \left[-\frac{t\,e^{-\delta t}}{\delta} + \int \frac{e^{-\delta t}}{\delta}dt\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\delta}(1-v) - q_x\left[-\frac{e^{-\delta}}{\delta} + \frac{1}{\delta^2}(1-v)\right]$$

$$= \frac{iv}{\delta} - (1-p_x)\left(-\frac{v}{\delta} + \frac{iv}{\delta^2}\right)$$

$$\therefore\ \overline{a}_x = \frac{iv}{\delta} - (1-p_x)\left(-\frac{v}{\delta} + \frac{iv}{\delta^2}\right) + v\,p_x\,\overline{a}_{x+1}$$

$$= p_x\left(v\,\overline{a}_{x+1} - \frac{v}{\delta} + \frac{iv}{\delta^2}\right) + \frac{1}{\delta} - \frac{iv}{\delta^2}$$

3. (i) 必要条件

才t年度の責任準備金を ${}_tV$ とすれば，漸化式より

$${}_{t+1}V\,D_{x+t+1} = {}_tV\,D_{x+t} + P\,D_{x+t} - T_t\,C_{x+t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

一方，

$${}_tV\,D_{x+t} = D_{x+t} + \theta_x - (P+d)\,N_{x+t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$${}_{t+1}V\,D_{x+t+1} = D_{x+t+1} + \theta_x - (P+d)\,N_{x+t+1} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

が成り立つ。

(1)に(2), (3)を代入すれば

$$D_{x+t+1} + \theta_x - (P+d)\,N_{x+t+1} = D_{x+t} + \theta_x - (P+d)\,N_{x+t} + P\,D_{x+t} - T_t\,C_{x+t}$$

$$D_{x+t+1} = D_{x+t} - (P+d)\,D_{x+t} + P\,D_{x+t} - T_t\,C_{x+t}$$

$$D_{x+t+1} = D_{x+t} - d\,D_{x+t} - T_t\,C_{x+t}$$

$$D_{x+t+1} = v\,D_{x+t} - T_t\,C_{x+t}$$

$$T_t\ C_{x+t} = v D_{x+t} - D_{x+t+1}$$

$$T_t\ C_{x+t} = C_{x+t}$$

故に

$$T_t = 1 \quad (t=1,\ 2,\ 3,\cdots,\ n)$$

(ii) 十分条件

$T_t = 1$ なるときは

$$\begin{aligned}
{}_tVD_{x+t} &= (N_x - N_{x+t})P - (M_x - M_{x+t}) \\
&= (N_x \cdot P - M_x) - N_{x+t} \cdot P + M_{x+t} \\
&= (N_x \cdot P - M_x) - N_{x+t} \cdot P + (D_{x+t} - dN_{x+t}) \\
&= D_{x+t} + (N_x \cdot P - M_x) - (P+d)N_{x+t}
\end{aligned}$$

故に $\quad {}_tV = 1 + \dfrac{\theta_x}{D_{x+t}} - (P+d)\ddot{a}_{x+t}$

ここに $\quad \theta_x = N_x \cdot P - M_x$

午 後 の 部

4. 年払営業保険料をP'とすると，支出現価，収入現価は夫々次の通りとなる。

$$\left\{\begin{array}{ll}
\text{年金給付の現価} & A(\ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy:\overline{z-y}|}) \\
\text{死亡給付の現価} & P'(I\bar{A})^{\ \ 1}_{xy:\overline{z-y}|} \\
\text{年金比例事業費現価} & \beta A(\ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy:\overline{z-y}|}) \\
\text{営業保険料比例事業費現価} & \alpha P'\ddot{a}_{xy:\overline{z-y}|}
\end{array}\right.$$

$$\text{収入保険料現価} \qquad P'\ddot{a}_{xy:\overline{z-y}|}$$

よって $\quad P' = \dfrac{(1+\beta)A(\ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy:\overline{z-y}|})}{(1-\alpha)\ddot{a}_{xy:\overline{z-y}|} - (I\bar{A})^{\ \ 1}_{xy:\overline{z-y}|}}$

5.

(1) $${}_{t}V_{x}^{(E)} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$${}_{t}V_{x}^{(S)} = 1 - \frac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

$$\therefore\ \upsilon^{n}\,{}_{t}V_{x}^{(E)} + (1-\upsilon^{n})\,{}_{t}V_{x}^{(S)}$$

$$= \upsilon^{n} - \upsilon^{n}\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + (1-\upsilon^{n}) - (1-\upsilon^{n})\frac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

$$= 1-\upsilon^{n}\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - (1-\upsilon^{n})\frac{(1-\upsilon^{n-t})}{(1-\upsilon^{n})}$$

$$= \upsilon^{n-t} - \upsilon^{n}\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$= {}_{t}V_{x}^{(T)}$$

(2) $$P^{(T+R)} = \frac{\upsilon^{n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + u\,\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$\therefore\ {}_{t}V_{x}^{(T+R)} = \left\{\upsilon^{n-t} + u\,(\ddot{a}_{\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|})\right\}$$

$$- \left\{\frac{\upsilon^{n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + u\,\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right\}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

$$= \left(\upsilon^{n-t} - \upsilon^{n}\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right)$$

$$+ u\left(\ddot{a}_{\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{\overline{n}|}\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\right)$$

$$= {}_{t}V_x^{(T)} + u\left(\ddot{a}_{\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{\overline{n}|}\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right)$$

$$= {}_{t}V_x^{(T)} + u\left(\frac{1-v^{n-t}}{1-v} - \frac{1-v^{n}}{1-v}\cdot\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right)$$

$$= {}_{t}V_x^{(T)} + \frac{u}{1-v}\left\{(1-v^{n-t}) - (1-v^{n})\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right\}$$

$$= {}_{t}V_x^{(T)} + \frac{u(1+i)}{i}\left\{\left(1-\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right) - \left(v^{n-t} - v^{n}\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right)\right\}$$

$$= {}_{t}V_x^{(T)} + \frac{u(1+i)}{i}\left\{{}_{t}V_x^{(E)} - {}_{t}V_x^{(T)}\right\}$$

$$= \left\{1-\frac{u(1+i)}{i}\right\}{}_{t}V_x^{(T)} + \frac{u(1+i)}{i}\,{}_{t}V_x^{(E)}$$

6.

(1) $\ell_r\,\ddot{a}_r + d\sum_{x=r+1}^{\omega}\ell_x\,\ddot{a}_x$

$$= (\ell_r + v\cdot\ell_{r+1}\,\ddot{a}_{r+1}) + d\cdot\ell_{r+1}\,\ddot{a}_{r+1} + d\sum_{x=r+2}^{\omega}\ell_x\,\ddot{a}_x$$

$$= \ell_r + \left(\ell_{r+1}\,\ddot{a}_{r+1} + d\cdot\sum_{x=r+2}^{\omega}\ell_x\,\ddot{a}_x\right)$$

$$= \sum_{x=r}^{\omega-2}\ell_x + \ell_{\omega-1}\,\ddot{a}_{\omega-1} + d\cdot\ell_\omega\cdot\ddot{a}_\omega$$

$$= \sum_{x=r}^{\omega}\ell_x \quad .$$

$\because$) $\ell_{\omega-1}\,\ddot{a}_{\omega-1} = \ell_{\omega-1} + v\,\ell_\omega$

$\ell_\omega\,\ddot{a}_\omega = \ell_\omega$

(2) 定常状態において，拠出金C，積立金Fおよび給付金Bの間には一般に次の方程式が成立する。

$$C + dF = B$$

(1)式とこの一般式とを各項ごとに比較すれば

$$C = \ell_r \ddot{a}_r$$

$$F = \sum_{x=r+1}^{\omega} \ell_x \ddot{a}_x$$

$$B = \sum_{x=r}^{\omega} \ell_x$$

したがって年金現価積立方式である。

7.

$$U_0 = \sum_{x \geqq x_0} L_x B_x \left\{ \frac{\sum_{t \geqq 0} d^{(\omega)}_{x+t} v^{t+\frac{1}{2}} \alpha \left(\sigma \sum_{k=1}^{x-x_0} b_{x-k} + \sum_{\mu=0}^{t} b_{x+\mu} \right) \bar{a}^{(\omega)}_{x+t+\frac{1}{2}}}{\ell_x b_x} - P \cdot \frac{\sum_{t \geqq 0} \ell_{x+t} b_{x+t} v^t}{\ell_x b_x} \right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$= \sum_{x \geqq x_0} L_x \alpha \cdot \sigma \left(\frac{B_x \sum_{k=1}^{x-x_0} b_{x-k}}{b_x} \right) \cdot \frac{\sum_{t \geqq 0} d^{(\omega)}_{x+t} v^{t+\frac{1}{2}} \bar{a}^{(\omega)}_{x+t+\frac{1}{2}}}{\ell_x}$$

$$- \sum_{x \geqq x_0} L_x B_x \left\{ \frac{\sum_{t \geqq 0} d^{(\omega)}_{x+t} v^{t+\frac{1}{2}} \alpha \cdot \sum_{\mu=0} b_{x+\mu} \bar{a}^{(\omega)}_{x+t+\frac{1}{2}}}{\ell_x b_x} - P \frac{\sum_{t \geqq 0} \ell_{x+t} b_{x+t} v^t}{\ell_x b_x} \right\}$$

ここで j の給与改訂があったとすれば

$$U'_0 = \sum_{x \geqq x_0} L_x \alpha \cdot \sigma \left(\frac{B_x \sum_{k=1}^{x-x_0} b_{x-k}}{b_x} \right) \cdot \frac{\sum_{t \geqq 0} d^{(\omega)}_{x+t} v^{t+\frac{1}{2}} \bar{a}^{(\omega)}_{x+t+\frac{1}{2}}}{\ell_x}$$

$$-\sum_{x \geqq x_0} L_x B_x (1+j) \left\{ \frac{\sum_{t \geqq 0} d_{x+t}^{(\omega)} v^{t+\frac{1}{2}} \alpha \sum_{\mu=0}^{t} b_{x+\mu} \overline{a}_{x+t+\frac{1}{2}}^{(\omega)}}{\ell_x b_x} - \frac{P \sum_{t \geqq 0} \ell_{x+t} b_{x+t} v^t}{\ell_x b_x} \right\} \cdots (2)$$

$$U_0 - U_0' = j \sum_{x \geqq x_0} L_x B_x \left\{ \frac{\alpha \sum_{t \geqq 0} d_{x+t}^{(\omega)} v^{t+\frac{1}{2}} \left(\sum_{\mu=0}^{t} b_{x+\mu} \right) \overline{a}_{x+t+\frac{1}{2}}^{(\omega)}}{\ell_x b_x} - \frac{P \sum_{t \geqq 0} \ell_{x+t} b_{x+t} v^t}{\ell_x b_x} \right\}$$

即ち，U_0 において $\sigma = 0$，したがって過去勤務期間に対応する給付をつけないとした場合におけるP. S. L. の j 割合だけ不足が計上される。