昭和 39 年度　（問題）

午 前 の 部

1. 円周上にランダムにとった3点を頂点とする三角形が鋭角三角形である確率を求めよ。

2. 1番からN番まで異なった自然数が記されたN個の玉がつぼの中にある。このつぼから，復元抽出（sampling with replacement）によって玉を1個づつランダムに取り出す。
このとき，
(i) 特定の番号のk個の玉のうち，どれか1個が出るまでの抽出回数の平均値を求めよ。
(ii) (i)の結果を用いて，すべての番号の玉が出るまでの抽出回数の平均値を求めよ。

3. X_1 およびX_2 は，それぞれ平均値 λ_1 および λ_2 の Poisson 分布に従がう確率変数であり，かつ，互いに独立とする。このとき，零または正の整数nおよびk（$n \geqq k$）に対し，条件附確率

$$P\left(X_1=k \mid X_1+X_2=n\right)$$

を求め，それが二項分布の確率分布となることを示せ。

午 後 の 部

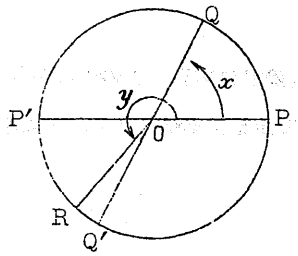
4. 互いに独立でない確率変数列$\{X_k\}$，$k=1, 2, \cdots\cdots$ において
(i) X_k の分散が有界で，
(ii) すべてのX_i，X_j（$i \neq j$）に関する共分散が負となる
とき，大数の法則が成立つことをチェビシェフの不等式から導け。

5. 半径1の回転円板（ルーレット）の円周上に円周の$\frac{1}{4}$の長さの弧ABが白く塗られている。また，このルーレットの外側のワク（固定）の円周上にも，その円周の$\frac{1}{4}$の長さの弧PQの部分が白く塗られている。
いまルーレットをランダムに回して止まったとき，二つの白く塗られた弧が重なり合う部分の弧の長さXを確率変数とするとき，Xの分布関数を求めよ。またXの平均値および分散を求めよ。

昭和 39 年度　（解答）

午 前 の 部

1. 円周上にランダムにとった3点をP，Q，Rとする。



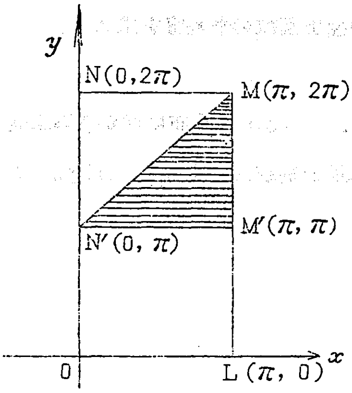
△PQRが鋭角三角形であるためには，P，Qをとおる直径の他端をそれぞれP′，Q′としたとき，点Rが劣弧$\overset{\frown}{P'Q'}$上にあるときに限る。

今図のごとくP，Qをとり，円の中心を0として

$\angle POQ = x$，　$\angle POR = y$　とおくと

x，yのとりうる値は

$0 < x < \pi$，　$0 < y < 2\pi$　……………… (1)



であって，△PQRが鋭角三角形である条件は

$0 < x < \pi$，　$\pi < y < \pi + x$　…………… (2)

で表わされる。

今x軸上に$\overline{0L} = \pi$なる点Lをとり，この点よりy軸に平行線LMを引き，次にy軸上に$\overline{0N} = 2\pi$，$\overline{0N'} = \pi$なる点N，N′をとり，この2点よりx軸に平行線を引き$\overline{LM}$との交点をそれぞれM，M′とすれば，(1)のx，yを座標とする点は□0LMN内に，また(2)のx，yを座標とする点は△N′M′M内にある。

従って，円周上の点Rが$\overset{\frown}{P'Q'}$内に落ちる確率即ち△PQRが鋭角三角形である確率は

$$\frac{\triangle N'M'M\text{の面積}}{\square\, 0LMN\text{の面積}} = \frac{1}{4}$$

である。

2. (i)　$k/N = p$，$1 - p = q$　とし，特定のk箇の玉のうちどれか1箇が出るまでの抽出回数を確率変数X_kとすれば，

$$p(X_k = r) = q^{r-1} \cdot p,\ r = 1,\ 2,\ \cdots\cdots \quad (1)$$

$$\therefore E(X_k) = p\sum_{r=1}^{\infty} r \cdot q^{r-1} = p(1-q)^{-2} = \frac{1}{p} = \frac{N}{k} \cdots\cdots \quad (2)$$

(ii) 先づオ1回目の抽出で番号 i_1 の玉が出たとする。オ2回目以降，i_1 以外の番号の N－1箇の玉のうち，どれか1箇（番号 i_2 とする）が出るまでの抽出回数は，(i)により X_{N-1} となる。同様に，i_1，i_2 以外の番号のN－2個の玉のうち，どれか1箇が出るまでの抽出回数は X_{N-2} となる。一般にN箇のうち，k箇の玉が抽出された後から数えて，未抽出のN－k箇のうち，どれか1箇が抽出されるまでの抽出回数は X_{N-k} となる。したがって，すべてのN箇が抽出されるまでの総抽出回数Xは，

$$X = 1 + X_{N-1} + X_{N-2} + \cdots\cdots + X_1$$

$$\therefore E(X) = 1 + E(X_{N-1}) + E(X_{N-2}) + \cdots\cdots + E(X_1)$$

よって(2)より，

$$E(X) = 1 + \frac{N}{N-1} + \frac{N}{N-2} + \cdots\cdots + \frac{N}{1}$$

$$= N\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots\cdots + \frac{1}{N}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

注 1. (1)より，X_k は幾何分布となる。

注 2. (3)より，Nが相当大きければ，$E(X) \approx N \log N$ となる。

注 3. (ii)は例えば次の様な実際問題に応用される。

「チューインガムの包の中にn種類の切手のうち，どれか1枚づつが封入されて販売されている。このとき，n種類全部の切手を蒐集するためには，平均何箇のチューインガムを買えばよいか。たゞし，n種類の切手は均等に分布しているとする。」

3. 題意により

$$P(X_1 = k) = e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!}$$

$$P(X_2 = j) = e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^j}{j!}$$

故に

$$P(X_1 + X_2 = n) = \sum_{k+j=n} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^j}{j!} \quad (X_1 \text{と} X_2 \text{とは独立})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{\lambda_1^k}{k!} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{n\,!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^{k} \lambda_2^{n-k}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n\,!}$$

以上のことから

$$P(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n) = \frac{P(X_1 = k,\ X_1 + X_2 = n)}{P(X_1 + X_2 = n)}$$

$$= \frac{P(X_1 = k,\ X_2 = n-k)}{P(X_1 + X_2 = n)}$$

$$= \frac{P(X_1 = k)\ P(X_2 = n-k)}{P(X_1 + X_2 = n)} \quad (X_1 \text{と} X_2 \text{とは独立})$$

$$= \frac{e^{-\lambda_1} \dfrac{\lambda_1^k}{k!}\ \ e^{-\lambda_2} \dfrac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n\,!}}$$

$$= \frac{n\,!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{\lambda_1^k\ \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}$$

$$= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$

これは二項分布の確率分布に他ならない。

午 後 の 部

4\. 確率変数列 $\{X_k\}$ に関して，和の分散を V_n とすれば，チェビシェフの不等式は次の様になる。

$$P\left\{ \left| \frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{E(X_1)+\cdots\cdots+E(X_n)}{n} \right| > \varepsilon \right\} \leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{V_n}{n^2}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^{k} \lambda_2^{n-k}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}$$

以上のことから

$$P(X_1=k \mid X_1+X_2=n) = \frac{P(X_1=k,\ X_1+X_2=n)}{P(X_1+X_2=n)}$$

$$= \frac{P(X_1=k,\ X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)}$$

$$= \frac{P(X_1=k)\ P(X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)} \quad (X_1 \text{と} X_2 \text{とは独立})$$

$$= \frac{e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} \quad e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}$$

$$= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$

これは二項分布の確率分布に他ならない。

午 後 の 部

4. 確率変数列 $\{X_k\}$ に関して，和の分散を V_n とすれば，チェビシェフの不等式は次の様になる。

$$P\left\{ \left| \frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{E(X_1)+\cdots+E(X_n)}{n} \right| > \varepsilon \right\} \leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{V_n}{n^2}$$

$x < 0$に対しては　$P\{X \leq x\} = 0$

$x \geq \frac{\pi}{2}$に対しては　$P\{X \leq x\} = 1$

よって

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad ; & x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{\pi} \quad ; & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 \quad ; & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

故に

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, d\, F(x) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \frac{dx}{\pi} = \frac{\pi}{8}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \frac{dx}{\pi} - \left(\frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{64} = \frac{5\pi^2}{192}$$