昭和38年度　（問題）

午前の部

1. 多数の品物を一まとめにしたロットから抜取検査によつて，各ロットの合格，不合格を決定するに，次の2方式を考える。

(a) ロットから10個の品物を抜きとって検査し，そのなかの不良個数が2個以下ならばロットは合格，3個以上ならば不合格とする。

(b) ロットからまず7個を抜きとって検査し，そのなかの不良個数が1個以下ならばロットを合格とし，3個以上ならば不合格とする。もし2個であればさらに7個を抜きとって検査し，さきの標本と合わせて合計14個のなかの不良個数が3個以下であればロットを合格とし，4個以上であれば不合格とする。

ロットの不良率（不良品の割合）がpであるとき次の2問に答えよ。

(1) 上の2方式についてロットが合格とされる確率はそれぞれいくらか。

(2) (a)，(b)いずれの検査個数が少ないと期待されるか。

2.
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad -\infty<x<\infty,\quad \sigma>0$$

で定義される関数が，密度関数であることを示せ。

また，確率変数Xの密度関数が上式の$f(x)$であるとき，Xの分布の平均値および分散はそれぞれμおよびσ^2であることを証明せよ。

3. 天秤（てんびん）で2つの物体A_1，A_2の重さ（それぞれw_1，w_2とする）を測定するのに次の2つの方法が考えられるが，第2の方法が精度のよい測定値がえられることを証明せよ。

ただし，この天秤による誤差は，正規分布N（0，σ^2）に従うものとする。（σは定数とする）

第1の方法：w_1，w_2を別々に測定する。

第2の方法：A_1，A_2を同時に一方の皿にのせその重さw_1+w_2を測定（その測定値をUとする），次にA_1，A_2を左右別々の皿にのせw_1-w_2を測定（そ

〔問〕

の測定値をVとする）する。

$\frac{U+V}{2}$ ，$\frac{U-V}{2}$ をそれぞれw_1，w_2 の測定値として用いる。

午 後 の 部

1. 確率変数X_1，X_2，……，X_kがたがいに独立のとき，次の各場合について$X_1+X_2+\cdots\cdots+X_k$の分布を求めよ。

1） X_iが二項分布$B(n_i, p)$に従うとき。
ただし，pは共通とする。

2） X_iが平均値λ_iの Poisson 分布に従うとき。

2. 離散的な確率変数をX，Yとしたとき，次の事項を証明せよ。

1） X，Yが独立ならば，相関係数は0となる。

2） X，Yがいずれも2個の異なる値しかとらない場合，相関係数が0ならばX，Yは独立となる。

3. 甲，乙が勝負（甲の勝つ確率をp，負ける確率をq，$p+q=1$とする）をし，1回の勝負毎に負けた方が勝った方に単位金額1を支払う。これを独立に繰り返し行なって，一方の資金が0になる（破産する）まで続ける賭をする。甲乙が有限の資金a，bをもって始めるとき，甲の破産する確率を求む。

昭和38年度　（解答）

午前の部

1. $q=1-p$とかく。また，(a)でとった10個の品物のなかの不良品の数をX，(b)で最初にとった7個の品物のなかの不良品の数をY，かさねてとった7個中の不良品の数をZとすると，X，Y，Zはそれぞれ2項分布B（10，p），B（7，p），B（7，p）にしたがう。

また，Y，Zは独立である。

(1)(a)　求める確率$=P(X\leqq 2)=q^{10}+\binom{10}{1}pq^{9}+\binom{10}{2}p^{2}q^{8}=q^{10}+10pq^{9}+45p^{2}q^{8}$

(b)　求める確率$=P(Y\leqq 1)+P(Y=2)P(Z\leqq 1\mid Y=2)$

$$=P(Y\leqq 1)+P(Y=2)P(Z\leqq 1)$$

$$=q^{7}+7pq^{6}+\binom{7}{2}p^{2}q^{5}(q^{7}+7pq^{6})=(q^{7}+7pq^{6})\times(1+21p^{2}q^{5})$$

(2)(a)　の場合，検査個数はつねに10個だから，その期待値も10

(b)　の場合，7個は最初に確実に検査する。次の7個も検査する確率は　$P(Y=2)$

∴　求める期待値$=7+7p(Y=2)=7+7\times 21p^{2}(1-p)^{5}$

この最大値を求めるため，pで微分すると，

$$7\times 21\{2p(1-p)^{5}-5p^{2}(1-p)^{4}\}$$
$$=7\times 21p(1-p)^{4}\{2(1-p)-5p\}=7\times 21(2-7p)$$

これから，$p=\frac{2}{7}$のとき，上の期待値は最大値をとることがわかる。

$$\text{その最大値}=7+7\times 21\left(\frac{2}{7}\right)^{2}\left(\frac{5}{7}\right)^{5}=7+12\times\left(\frac{5}{7}\right)^{5}$$

$$=7+\frac{37500}{16807}=7+2.231<10$$

したがって，(b)の方法の期待値が少ない。

2. $f(x)\geqq 0$であることはあきらか。

したがって，$A\equiv\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1$を証明すればよい。

$y=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ と変換すれば

$$A=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$$

$$\therefore\quad A^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy$$

$(x,\ y)$ を極座標 $(r,\ \theta)$ に変換（すなわち，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ と変換）すると

$$2\pi A^2=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}\,d\left(\frac{r^2}{2}\right)$$

$$=2\pi\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty}=2\pi$$

$\therefore$ $A^2=1$，またあきらかに $A\geqq 0$，$\therefore$ $A=1$

Xの平均値 E(X)は，

$$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}x\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

$y=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ と変換すると，

$$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\mu+\sigma y)\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy=\mu\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$$

$$+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$$

この最後の式の第2項中，$y\,e^{-\frac{y^2}{2}}$ は奇関数だから，第2項＝0

$\therefore$ $E(X)=\mu$

Xの分散 Var Xは，

$$\mathrm{Var\,X} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx \quad \left(y=\frac{x-\mu}{\sigma}\text{ と変換して}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2 y^2\, e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot\left(-e^{-\frac{y^2}{2}}\right)'\,dy$$

部分積分法から

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma^2}\mathrm{Var\,X} = \left[y\cdot\left(-e^{-\frac{y^2}{2}}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = \sqrt{2\pi}$$

$\therefore\quad \mathrm{Var\,X} = \sigma^2$

3\. 第1法のw_1，w_2 の測定値の誤差の分散はどちらもσ^2 。

第2法のw_1+w_2，w_1-w_2 の測定誤差を，それぞれε_1，ε_2 とおくと，題意から，

$\mathrm{Var}\,\varepsilon_1 = \mathrm{Var}\,\varepsilon_2 = \sigma^2$

また，$\frac{U+V}{2}$ および $\frac{U-V}{2}$ の誤差は $\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$，$\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}$ で，

$$\mathrm{Var}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} = \frac{1}{4}\mathrm{Var}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\ (\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\text{ は独立だから})$$

$$= \frac{1}{4}(\mathrm{Var}\,\varepsilon_1 + \mathrm{Var}\,\varepsilon_2) = \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\mathrm{Var}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2} = \frac{1}{4}\mathrm{Var}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\ (\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\text{ は独立だから})$$

$$= \frac{1}{4}(\mathrm{Var}\,\varepsilon_1 + \mathrm{Var}\,\varepsilon_2) = \frac{\sigma^2}{2}$$

すなわち，第2法の方が，精度がよい。

午後の部

1\. 1）　X_i の積率母関数 $M_i(\theta)$は，$q=1-p$として，

$$M_i(\theta)=\sum_x e^{\theta x} P(X_i=x)=\sum_{x=0}^{n_i} e^{\theta x}\binom{n_i}{x} p^x q^{n_i-x}$$

$$=\sum_{x=0}^{n_i}\binom{n_i}{x}(pe^{\theta x})^x q^{n_i-x}=(pe^{\theta x}+q)^{n_i}$$

X_1，……，X_k はたがいに独立だから，$X_1+\cdots+X_k$ の積率母関数は，各 X_i の積率母関数の積になる。すなわち，

$$(pe^{\theta x}+q)^{n_1}\cdots(pe^{\theta x}+q)^{n_k}=(pe^{\theta x}+q)^{n_1+\cdots+n_i}$$

したがって，$X_1+\cdots+X_k$ は $B(n_1+\cdots+n_k,\ p)$ に従う。

2）　X_i の積率母関数 $M_i(\theta)$は，

$$M_i(\theta)=\sum_x e^{\theta x} P(X=x)=e^{-\lambda_i}\sum_{x=0}^{\infty} e^{\theta x}\frac{\lambda_i^x}{x!}=e^{-\lambda_i}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda_i e^{\theta})^x}{x!}$$

$$=e^{-\lambda_i}\ e^{\lambda_i e^{\theta}}=e^{\lambda_i(e^{\theta}-1)}$$

X_i，…，X_k は独立だから，$X_1+\cdots+X_k$ の積率母関数は

$$e^{\lambda_1(e^{\theta}-1)}\ e^{\lambda_2(e^{\theta}-1)}\cdots e^{\lambda_k(e^{\theta}-1)}=e^{(\lambda_1+\cdots\lambda_k)(e^{\theta}-1)}$$

したがって，$X_1+\cdots+X_k$ は平均値 $\lambda_1+\cdots+\lambda_k$ の Poisson 分布に従う。

2\. 1）　$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)$

X，Yは独立だから　$X-E(X)$，$Y-E(Y)$も独立となる。

$\therefore$　$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(X-E(X))\cdot E(Y-E(Y))=0\cdot 0=0$

したがって，相関係数も0となる。

2）　Xのとる2点をx_1，x_2，Yのとる2点をy_1，y_2とおく。また，

$$\tilde{X}=X-x_1,\quad \tilde{Y}=Y-y_1,\quad x=x_2-x_1,\quad y=y_2-y_1$$

とおくと，

$$\rho(\tilde{X},\tilde{Y})=\rho(X-x_1,\ Y-y_1)=\rho(X,Y)=0$$

$$\therefore\quad 0=\mathrm{Cov}(\tilde{X},\tilde{Y})=E(\tilde{X}\tilde{Y})-E(\tilde{X})\cdot E(\tilde{Y})$$

$$=xy\,P(\tilde{X}=x,\ \tilde{Y}=y)-x\,P(\tilde{X}=x)\cdot y\,P(\tilde{Y}=y)$$

$$=xy\{P(\tilde{X}=x,\ \tilde{Y}=y)-P(\tilde{X}=x)P(\tilde{Y}=y)\}$$

$=xy\{P(X=x_2, Y=y_2)-P(X=x_2)P(Y=y_2)\}$

$xy \neq 0$ だから,

$$P(X=x_2, Y=y_2)=P(X=x_2)P(Y=y_2)$$

同様にして,

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$
$$(i=1,\ 2\ ;\ j=1,\ 2)$$

がえられる。したがって，X，Yは独立である。

(注) $P(X=x_2, Y=y_2)=P(X=x_2)P(Y=y_2)$ から，直接,

$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$ を導き出すこともできる：

たとえば $P(X=x_1, Y=y_2)=P(Y=y_2)-P(X=x_2, Y=y_2)$

$=P(Y=y_2)-P(X=x_2)P(Y=y_2)$

$=P(Y=y_2)\{1-P(X=x_2)\}=P(X=x_1)P(Y=y_2)$

3. 甲が現在xの資金（したがって乙は$a+b-x$）をもっているとき，甲が破産する確率を$R(x)$とする。$1\leqq x\leqq a+b-1$ なら，甲が破産するという事象は，この時現在から最初に1回勝負した結果，その回は勝って，したがって資金が$x+1$になって，やがて破産する事象と，その回に負けて，したがって資金が$x-1$になって，やがて破産する事象というたがいに排反な2つの事象の和になる。したがって，

$$R(x)=pR(x+1)+qR(x-1) \quad (1\leqq x\leqq a+b-1) \tag{1}$$

一方，あきらかに

$$R(0)=1,\ R(a+b)=0 \tag{2}$$

Eを，$ER(x)=R(x+1)$，$E^{\alpha}R(x)=R(x+\alpha)$ のような作用素とすると，(1)から

$$(pE^2-E+q)R(x)=0 \quad (0\leqq x\leqq a+b-2) \tag{3}$$

$$\therefore\ (pE-q)(E-1)R(x)=0$$

$$\therefore\ \left(E-\frac{q}{p}\right)(E-1)R(x)=0$$

1° $p\neq\frac{1}{2}$の場合

A，Bを定数として,

$$R(x)=A+B\left(\frac{q}{p}\right)^x$$

となる（注参照）。

$$1=R(0)=A+B,\quad 0=R(a+b)=A+B\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}$$

$$\therefore\quad B=\frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}\qquad A=\frac{-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

$$\therefore\quad R(a)=\frac{-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}+\frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}\left(\frac{q}{p}\right)^{a}$$

$$=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{a}\left\{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{b}\right\}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

2° $p=\frac{1}{2}$の場合

$$(E-1)^2\ R(x)=0$$

したがって，A，Bを定数として，

$R(x)=Ax+B$　（注参照）

$1=R(0)=B,\ 0=R(a+b)=A(a+b)+B$。 $\therefore\ A=-\dfrac{1}{a+b}$

$$\therefore\quad R(a)=-\frac{1}{a+b}\,a+1=\frac{b}{a+b}$$

(注)　一般に，2階の定差方程式

$$(aE^2+bE+C)f(x)=0\quad(a\neq 0)$$

の解法について述べる。これは，

$$(E-\alpha)(E-\beta)f(x)=0$$

のように書ける（α，βは一般には複素数）。

以下，xは整数値しか考えないことにする。

定理1.　$(E-\alpha)f(x)=0$の解は，$f(x)=A\alpha^x$（Aは任意定数）

証）　$f(x+1)=\alpha f(x)$

$\therefore\quad f(1)=\alpha f(0),\ f(2)=\alpha f(1),\ \cdots\cdots,\ f(x)=\alpha f(x-1)$ ・・・・・・・・・・・・・(1)

(1)式を辺々かけあわせると，

$$f(x)=\alpha^x f(0)$$

ここで，$f(0)$は任意にきめてよい。

$x<0$ の場合も同様。

定理2.　2階の定差方程式

$$(a\mathrm{E}^2+b\mathrm{E}+\mathrm{c})f(x)=0$$

の解は，任意定数2つしかなく，その解は，

$$f(x)=\mathrm{A}f_1(x)+\mathrm{B}f_2(x)$$

の形に書ける。ここに，$f_1(x)$，$f_2(x)$は，たがいに一次独立な解，A，Bは任意定数である。

証）　$f(x+2)=-\dfrac{b}{a}f(x+1)-\dfrac{\mathrm{c}}{a}f(x)$

$$\therefore f(2)=-\frac{b}{a}f(1)-\frac{\mathrm{c}}{a}f(0)$$

$$f(3)=-\frac{b}{a}f(2)-\frac{\mathrm{c}}{a}f(1)$$

$$\vdots$$

$$f(x)=-\frac{b}{a}f(x-1)-\frac{\mathrm{c}}{a}f(x-2)$$

これから，$f(0)$，$f(1)$を任意に定めれば，$f(x)$は必然的に求まる。すなわち，任意定数は2つしかない。$f_1(x)$，$f_2(x)$が，たがいに一次独立な解とすると，

$$(a\mathrm{E}^2+b\mathrm{E}+\mathrm{c})(\mathrm{A}f_1(x)+\mathrm{B}f_2(x))=\mathrm{A}(a\mathrm{E}^2+b\mathrm{E}+\mathrm{c})f_1(x)$$
$$+\mathrm{B}(a\mathrm{E}^2+b\mathrm{E}+\mathrm{c})f_2(x)=0$$

したがって，$\mathrm{A}f_1(x)+\mathrm{B}f_2(x)$も解である。この解は任意定数を2つもつから，すべての解がこれでつくされる。

定理3.　$\alpha\neq\beta$なら

$$(\mathrm{E}-\alpha)(\mathrm{E}-\beta)f(x)=0$$

の解は，$\mathrm{A}\alpha^x+\mathrm{B}\beta^x$

証）　$(\mathrm{E}-\alpha)(\mathrm{E}-\beta)\alpha^x=(\mathrm{E}-\beta)\{(\mathrm{E}-\alpha)\alpha^x\}=(\mathrm{E}-\beta)\,0=0$

したがってα^xは解である。同様にβ^xも解。$\alpha\neq\beta$だから，α^x，β^xは一次独立である。したがって解は　$\mathrm{A}\alpha^x+\mathrm{B}\beta^x$と書ける。

定理　4.　$(\mathrm{E}-1)^2f(x)=0$

の解は，$\mathrm{A}x+\mathrm{B}$

証） $(E-1)\{(E-1)f(x)\}=0$

$\therefore$ $(E-1)f(x)=A\cdot 1^x=A$（定理1から）

$\therefore$ $f(x+1)=f(x)+A$

$\therefore$ $f(1)=f(0)+A$，$f(2)=f(1)+A$，$\cdots$，$f(x)=f(x-1)+A\cdots\cdots(1)$

(1)式を辺々たして，$f(x)=Ax+f(0)$

ここで，$f(0)$は任意に定めてよい。

（一般には，$(E-1)^n f(x)=0$ の解は，高々$(n-1)$次の多項式

$A_{n-1}x^{n-1}+A_{n-2}x^{n-2}+\cdots+A_0$ である。）