損保数理（問題）

特に断りがないかぎり、消費税については考慮しないこととする。また、免責金額および支払限度額は１事故あたりのものであり、各クレームは独立であるものとする。

問題１． 次のⅠ～Ⅵの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。　　　　Ⅰ～Ⅳ：各３点　Ⅴ：４点　Ⅵ：５点　（計２１点）

Ⅰ．クレーム額 X が、平均 $\mu = 25$、標準偏差 $\sigma = 2$ の確率分布に従うとする。このとき、チェビシェフの不等式を用いて評価すると、$15 \le X \le 35$ である確率の下限値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）0　（Ｂ）0.01　（Ｃ）0.04　（Ｄ）0.10　（Ｅ）0.25
（Ｆ）0.75　（Ｇ）0.90　（Ｈ）0.96　（Ｉ）0.99　（Ｊ）1

Ⅱ．ある保険会社は、下表の保険料構成となっている保険期間 1 年の商品を販売している。新たに保険期間 2 年の長期一時払契約の販売を開始したところ、ある年の契約件数は、各保険期間（1 年、2 年）とも等しかった。このとき、その年の保険料収入全体に占める純保険料の割合に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

純保険料	126
新契約費	48
維持費	24
代理店手数料	18
利潤	24
計（営業保険料）	240

※　純保険料および維持費は毎年同一とする。
※　新契約費は初保険年度のみ支出され、維持費は毎保険年度支出されるものとする。
※　代理店手数料および利潤は営業保険料に比例し、保険期間 2 年における代理店手数料率および利潤率は、保険期間 1 年における代理店手数料率および利潤率と同一とする。
※　予定利率は考慮しない（0%である）ものとする。

（A）53.0%　（B）53.5%　（C）54.0%　（D）54.5%　（E）55.0%
（F）55.5%　（G）56.0%　（H）56.5%　（I）57.0%　（J）57.5%

Ⅲ．ある保険会社において、支払保険金 X が必ず 1、2、3 のいずれかとなる保険商品を販売しており、それぞれの支払保険金が発生する確率は下表のとおりとなっている。この保険商品の支払保険金総額 S がパラメータ $\lambda=1$ の複合ポアソン分布に従う場合、支払保険金総額 S が 3 となる確率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば、$e^{-1}=0.368$ を使用すること。

x	$P(X=x)$
1	0.5
2	0.3
3	0.2

（Ａ）0.120　（Ｂ）0.125　（Ｃ）0.130　（Ｄ）0.135　（Ｅ）0.140
（Ｆ）0.145　（Ｇ）0.150　（Ｈ）0.155　（Ｉ）0.160　（Ｊ）0.165

Ⅳ．ある積特型積立保険の積立部分に関する条件が下表のとおりであるとする。この積特型積立保険の積立部分の年払営業保険料に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、計算の途中において、現価率および期始払年金現価率は、小数点以下第 5 位を四捨五入して小数点以下第 4 位までの数値を用いることとする。

項目	条件	備考
保険期間	5 年	
払込方法	年払（期始払）	
満期返れい金	200 万	保険期間満了時に支払
中途返れい金	50 万	第 3 保険年度末に保険契約が有効な場合に支払
予定利率	1%	
予定契約消滅率	3%	
維持費率	3%	年払積立保険料に対する割合
代理店手数料率	2%	年払積立保険料に対する割合

（A）470,000　（B）471,000　（C）472,000　（D）473,000　（E）474,000
（F）475,000　（G）476,000　（H）477,000　（I）478,000　（J）479,000

V．前年度以前から販売されているある保険商品について、D_1およびD_2を次のように定義する。

D_1：当年度始期契約に基づき支払われる保険金の、事故 1 件あたり平均支払額

D_2：当年度に支払われる保険金の、事故 1 件あたり平均支払額

以下の条件を前提としたとき、$D_1 \div D_2$の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、年度は 4 月～3 月とし、インフレの影響は考慮しなくてよい。

＜条件＞

- 契約の保険始期　　すべて 4 月 1 日
- 契約の保険期間　　1 年間
- 契約件数の年度あたり増加率　　20%
- 事故頻度の年度あたり増加率　　15%
- 保険金の支払パターン（保険金は 1 度に支払われるものとする）

　支払年度：事故発生年度と同一年度　50%

　　　　　　事故発生年度の翌年度　　50%

　支払金額：事故発生年度と同一年度に支払う場合　10 万円

　　　　　　事故発生年度の翌年度に支払う場合　　30 万円

（A）1.01　（B）1.02　（C）1.03　（D）1.04　（E）1.05

（F）1.06　（G）1.07　（H）1.08　（I）1.09　（J）1.10

Ⅵ. ある保険会社において、商品 A の支払保険金 X と、商品 B の支払保険金 Y は互いに独立に下表の確率分布に従うことが分かっている。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

x	$P(X=x)$
0	0.5
10	0.3
20	0.2

y	$P(Y=y)$
0	0.5
10	0.3
20	0.2

（1） $TVaR_{60\%}(X+Y)$の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）10.0　（B）12.5　（C）15.0　（D）17.5　（E）20.0
（F）22.5　（G）25.0　（H）27.5　（I）30.0　（J）32.5

（2）次の（A）～（D）のうち、TVaR の性質として正しいものを 2 つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。

（A）劣加法性を満たさない。
（B）凸性を満たす。
（C）歪み関数は凸関数である。
（D）増加凸順序と整合的である。

問題２． 次のⅠ～Ⅳの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。　　　　　　　　　　　　　　　　　　Ⅰ～Ⅲ：各７点　Ⅳ：６点　（計２７点）

Ⅰ．ある保険種類の損害額 X は指数分布 $f(x)=\dfrac{1}{\theta}\exp\left(-\dfrac{x}{\theta}\right)$ $(x \geq 0)$ に従うことが分かっている。免責金額（エクセス方式）を 100、支払限度額を 900 として引き受けた保険契約の支払データとして、次の 6 件のクレーム額の実績値を得た。

15　　247　　900　　493　　900　　645

ここで、本問において、発生した 1 件の事故に対する「クレーム額」、「支払限度額」、「損害額」は次を表わすものする。

クレーム額：保険会社の支払う保険金の額

支払限度額：1 件あたりのクレーム額の限度額

損害額：免責金額や支払限度額を考慮しない、事故の損害の額

（したがって、損害額が免責金額以上となった時、「損害額－免責金額」と「支払限度額」のうち小さい方の金額が「クレーム額」となる。）

また、クレーム額の分布関数の設定および期待値の計算においては、保険会社の支払対象とならない事故については含めないものとする。

このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。なお、必要があれば、$e^{-1}=0.368$、$e^{-\frac{1}{3}}=0.717$、$e^{-\frac{1}{5}}=0.819$ を使用すること。

（１）最尤法により θ を推定した場合、θ の推定値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）600　（Ｂ）625　（Ｃ）650　（Ｄ）675　（Ｅ）700
（Ｆ）725　（Ｇ）750　（Ｈ）775　（Ｉ）800　（Ｊ）825

（２）免責金額を 225、支払限度額を 450 とした場合の 1 件あたりのクレーム額の期待値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、パラメータ θ は（１）で選択した値を用いることとする。

（Ａ）300　（Ｂ）315　（Ｃ）330　（Ｄ）345　（Ｅ）360
（Ｆ）375　（Ｇ）390　（Ｈ）405　（Ｉ）420　（Ｊ）435

Ⅱ．危険指標を被保険者の年齢（X 歳未満か X 歳以上か）と自動車の用途（営業用か自家用か）の 2 区分で設定している自動車保険があり、その実績クレーム単価のデータが下表のとおりであったとする。

＜クレーム単価＞

	営業用	自家用
X 歳未満	600	500
X 歳以上	400	300

被保険者の年齢・自動車の用途のクレーム単価 $Y_i\left(i=1,2,3,4\right)$ を一般化線形モデル、すなわち、Y_i の従う指数型分布族をポアソン分布 $f\left(y_i;\mu_i\right)=\dfrac{{\mu_i}^{y_i}}{y_i!}e^{-\mu_i}$ （ここで、$\mu_i=E\left(Y_i\right)$ である）、リンク関数を $g(x)=\log(x)$ とし、次のとおり定義される説明変数 $x_{ij}\left(i=1,2,3,4,\ j=1,2,3\right)$ を用いて、

$\mu_i=g^{-1}(\beta_1 x_{i1}+\beta_2 x_{i2}+\beta_3 x_{i3})$ と表されるモデルを用いて分析する。

$$x_{i1}=\begin{cases}1 & (\text{X歳未満の場合})\\ 0 & (\text{X歳以上の場合})\end{cases},\quad x_{i2}=\begin{cases}1 & (\text{X歳以上の場合})\\ 0 & (\text{X 歳未満の場合})\end{cases},\quad x_{i3}=\begin{cases}1 & (\text{営業用の場合})\\ 0 & (\text{自家用の場合})\end{cases}$$

ここで、β_1,β_2,β_3 はパラメータであり、最尤法で推定する。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）パラメータ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ が満たす連立方程式として、以下の①～⑦に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。ここで、以下の式の l は対数尤度関数である。なお、同じ選択肢を複数回用いても良い。

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_1} = \boxed{①} - \boxed{②} - \boxed{③} = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_2} = \boxed{④} - \boxed{⑤} - \boxed{⑥} = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_3} = \boxed{⑦} - \boxed{③} - \boxed{⑥} = 0$$

（A）300　（B）400　（C）500　（D）600　（E）700
（F）800　（G）900　（H）1,000　（I）1,100　（J）1,200
（K）e^{β_1}　（L）e^{β_2}　（M）e^{β_3}　（N）$e^{\beta_1+\beta_2}$　（O）$e^{\beta_1+\beta_3}$
（P）$e^{\beta_2+\beta_3}$　（Q）$e^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$　（R）いずれにも該当しない

（2）一般化線形モデルで計算した場合の、「X 歳未満かつ営業用」のクレーム単価の期待値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）580　（B）585　（C）590　（D）595　（E）600
（F）605　（G）610　（H）615　（I）620　（J）625

Ⅲ．事故が発生した年度（事故年度）から 4 年間で支払が完了する保険商品について、2016 年度末のIBNR 備金の評価を行うことを考える。事故報告年度別に作成された、事故年度別累計発生保険金の推移が次のように与えられているとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

なお、累計発生保険金のロスディベロップメントファクターの予測値は、事故報告年度別に（＜事故年度別　累計発生保険金の推移＞の表ごとに）算出する。また、予測値には既知の事故年度別ロスディベロップメントファクターを単純平均した値を用いるものとする。

また、計算の途中において、保険金・支払備金については全て小数点以下第 1 位を四捨五入して整数値を用い、ロスディベロップメントファクターについては全て小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位までの数値を用いることとする。なお、インフレの影響は考慮しなくてよい。

＜事故年度別　累計発生保険金の推移＞

【初年度報告（＝事故が発生した年度に報告された事故についての累計発生保険金の推移）】

事故年度	経過年度			
	1	2	3	4
2013	1,500	2,400	3,000	3,300
2014	2,000	3,400	3,910	
2015	2,300	3,450		
2016	2,500			

【第 2 年度報告（＝事故が発生した翌年度に報告された事故についての累計発生保険金の推移）】

事故年度	経過年度			
	1	2	3	4
2013	0	200	432	540
2014	0	250	560	
2015	0	340		

【第 3 年度報告（＝事故が発生した翌々年度に報告された事故についての累計発生保険金の推移）】

事故年度	経過年度			
	1	2	3	4
2013	0	0	80	238
2014	0	0	120	

※　すべての事故は、第 3 年度までに報告されるものとする。

（1）＜事故年度別　累計発生保険金の推移＞の各表を用いて、チェインラダー法により既報告損害における最終累計発生保険金を推定する。2013～2016 事故年度の既報告損害における最終累計発生保険金の総計（下表の①）の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

【事故年度・事故報告年度別　最終累計発生保険金推定値】

事故年度	事故報告年度			合計
	1	2	3	
2013	3,300	540	238	4,078
2014	□	□	□	□
2015	□	□		□
2016	□			□
			総計	①

※　□部分は、設問の関係で数値を伏せている。

（A）20,000　（B）20,050　（C）20,100　（D）20,150　（E）20,200
（F）20,250　（G）20,300　（H）20,350　（I）20,400　（J）20,450

（2）次に、【事故年度・事故報告年度別　最終累計発生保険金推定値】の表を用いて、2016 年度末の IBNR 備金（2016 年度末時点で事故報告されていない、表中の斜線部分に対する最終累計発生保険金の見積額）を求める。

次の計算手順で IBNR 備金を求めたとき、IBNR 備金の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、IBNR ファクターについては全て小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位までの数値を用いることとする。

＜計算手順＞

（Ⅰ）ある事故報告年度の最終累計発生保険金の、それ以前の事故報告年度の最終累計発生保険金に対する割合を、IBNR ファクターの実績値として算出する。

（例）

2013 事故年度における第 2 報告年度の IBNR ファクターの値は、540÷3,300=0.164

2013 事故年度における第 3 報告年度の IBNR ファクターの値は、238÷(3,300+540)=0.062

（Ⅱ）事故年度別の IBNR ファクターの実績値を単純平均し、事故報告年度別の IBNR ファクターの予測値を算出する。

（Ⅲ）IBNR ファクターの予測値を用いて、2016 年度末において事故報告されていない、表中の斜線部分に対する最終累計発生保険金を算出する。（合計値が IBNR 備金となる。）

（A）1,540　（B）1,570　（C）1,600　（D）1,630　（E）1,660
（F）1,690　（G）1,720　（H）1,750　（I）1,780　（J）1,810

Ⅳ. 次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）以下のイ～ハのうち正しいものの組み合わせとして最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

イ. メリット料率の算定法には、スケジュール料率算定法、経験料率算定法、および遡及料率算定法の 3 種類がある。このうち、経験料率算定法は、スケジュール料率算定法よりも明確な基準をもっており、割増・割引は通常所定の公式に基づき計算される。経験料率の適用例としては、自動車保険における無事故割引制度がある。

ロ. ポリシー・イヤー・ベーシス損害率とは、一定期間中に責任が経過したすべての保険料とその期間中の発生保険金の比率により算出される損害率である。この損害率は、保険会社の保険料ボリュームが増加、減少あるいは横ばいのいずれの場合であっても、収益および必要な料率水準をある程度適正に表示することが出来るという特性を有する。

ハ. IBNR 備金には、既発生未報告損害に対する支払備金である IBNER Reserve という考え方と、既発生未報告損害だけでなく、既報告損害に関する要素も含んでいる IBNYR Reserve という考え方が存在する。

（A）全て正しい　　（B）イ、ロのみ正しい
（C）イ、ハのみ正しい　　（D）ロ、ハのみ正しい
（E）イのみ正しい　　（F）ロのみ正しい
（G）ハのみ正しい　　（H）全て誤り

（2）以下のニ～ヘのうち正しいものの組み合わせとして最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

ニ. 積立保険の約款貸付には、貸付金の使途を保険料払い込みへの充当に限っている契約者貸付と、使途を特に限定しない貸付けの制度である保険料の振替貸付がある。保険料の振替貸付は、契約者にとっての保険商品の利便性を向上させるとともに、契約を解約せずに資金調達を可能とするものであるため、解約防止の機能をあわせ持っていると言える。

ホ. 再保険を契約手続き面により分類すると、再保険条件等の取引内容を複数の元受契約につき包括して取り決める任意再保険と、個々の元受契約について個別に取り決める特約再保険に分類される。

ヘ. コピュラのパラメータを推定する方法のうち、規準最尤法とは、コピュラのケンドールの τ が、観測データから求めたケンドールの τ に等しいものとしてコピュラのパラメータを推定する方法であり、ＩＦＭ法と異なり、周辺分布を仮定する必要がないという利点がある。

（A）全て正しい
（B）ニ、ホのみ正しい
（C）ニ、ヘのみ正しい
（D）ホ、ヘのみ正しい
（E）ニのみ正しい
（F）ホのみ正しい
（G）ヘのみ正しい
（H）全て誤り

問題３． 次のⅠ～Ⅳの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。　　　　　　　　　　　　　　　　各８点　（計３２点）

Ⅰ．契約者の各年のクレーム件数 X_i は、あるパラメータ $\Theta=\theta$ の下で独立であり、同一の確率密度関数 $f_{X_i|\Theta}(x_i|\theta)$ に従うとする。また、パラメータ θ は契約者ごとにばらつきがあり、確率密度関数 $\pi(\theta)$ をもつ確率変数 Θ の実現値であるとし、契約者単位の時系列で観察した場合、同一の契約者の Θ は同一であるとする。

クレーム件数実績 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ および契約者の全体的傾向 $\pi(\theta)$ から、ベイズ方法論を用いて $n+1$ 年目のクレーム件数 X_{n+1} を推定することを考える。このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）ベイズ方法論では、ベイズの定理によって Θ の事後分布 $\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta|\mathbf{x})$ を求め、推定に活用する。

$\mathbf{X}=\mathbf{x}$ の条件の下、Θ を $g(\mathbf{x})$ によって推定することを考えると、Θ と $g(\mathbf{x})$ の 2 乗誤差は以下のように分解できることから、2 乗誤差を最小化する推定量 $g(\mathbf{x})$ は Θ の事後分布の期待値であることがわかる。

$$E\left((\Theta-g(\mathbf{x}))^2\middle|\,\mathbf{x}\right) \;=\; \left(g(\mathbf{x})-\left(\boxed{\quad①\quad}\right)\right)^2+\boxed{\quad②\quad}$$

①、②に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

（A）$E(\Theta|\mathbf{x})$　　（B）$E(\Theta^2|\mathbf{x})$　　（C）$V(\Theta|\mathbf{x})$

（D）$E(\Theta|\mathbf{x})^2$　　（E）$\sqrt{V(\Theta|\mathbf{x})}$　　（F）$E(\Theta^2|\mathbf{x})+E(\Theta|\mathbf{x})^2$

（G）いずれにも該当しない

（2）確率変数Θの確率密度関数が $\pi(\theta)=3\theta^{-4}\ (\theta>1)$ と与えられ、契約者の各年のクレーム件数 X_i は期待値Θのポアソン分布に従うことがわかっているとする。このとき、ある契約者が 1 年目、2 年目の 2 年間で計 5 件のクレームを起こしたという条件の下で、この契約者について確率変数Θが 2 以上である確率を事後分布から計算すると ③ となる。また、この契約者の 3 年目のクレーム件数をベイズ方法論を用いて推定すると ④ 件となる。③、④に当てはまる数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば、$e^{-1}=0.368$ を使用すること。

【③の選択肢】

（A）0.18	（B）0.23	（C）0.28	（D）0.33	（E）0.38
（F）0.43	（G）0.48	（H）0.53	（I）0.58	（J）0.63

【④の選択肢】

（A）1.00	（B）1.17	（C）1.33	（D）1.50	（E）1.67
（F）1.83	（G）2.00	（H）2.17	（I）2.33	（J）2.50

Ⅱ．就業時間中は一様にクレームが発生し、就業時間外はクレームが発生しない労災保険を考える。就業時間は下表のとおり繰り返される。

時刻t	$0 \le t \le 2$	$2 < t < 3$	$3 \le t \le 5$	$5 < t < 6$	（以下、繰り返し）
就業時間	○		○		
就業時間外		○		○	

この保険のクレーム件数過程$\{N_t\}_{t\ge 0}$が次の条件を満たすとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。なお、必要があれば、$e^{-1} = 0.368$を使用すること。

※　$0 \le s < t \le u < v \Rightarrow N_t - N_s$と$N_v - N_u$は独立

※　$0 \le t \le 2$において、$P(N_t = 0) = e^{-0.5t}$が成り立つ

※　同一時刻に 2 件以上のクレームが発生することはない。

（1） $t = 10$のとき、オペレーショナル・タイム$\tau(t)$の値は　①　となる。また、$0 \le t \le 10$において発生するクレーム件数が 2 件である確率は　②　となる。①、②に当てはまる数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

【①の選択肢】

（Ａ）0.5　（Ｂ）1.0　（Ｃ）1.5　（Ｄ）2.0　（Ｅ）2.5
（Ｆ）3.0　（Ｇ）3.5　（Ｈ）4.0　（Ｉ）4.5　（Ｊ）5.0

【②の選択肢】

（Ａ）0.105　（Ｂ）0.115　（Ｃ）0.125　（Ｄ）0.135　（Ｅ）0.145
（Ｆ）0.155　（Ｇ）0.165　（Ｈ）0.175　（Ｉ）0.185　（Ｊ）0.195

（2） 1 件目のクレームが発生する時刻を表す確率変数をT_1とするとき、T_1の期待値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）2.0　（Ｂ）2.2　（Ｃ）2.4　（Ｄ）2.6　（Ｅ）2.8
（Ｆ）3.0　（Ｇ）3.2　（Ｈ）3.4　（Ｉ）3.6　（Ｊ）3.8

Ⅲ．ある保険会社は、次のポートフォリオを保有しているものとする。

※　クレーム総額は複合ポアソン過程に従う

※　単位時間あたりの平均クレーム件数は 2

※　個々のクレーム額 X は平均 4 の指数分布に従う

※　保険料の安全割増率は 50%

※　このポートフォリオに対する期首（$t=0$）サープラスは 50

この保険会社は、上記のポートフォリオに対し、1 事故単位の免責金額 1（エクセス方式）を設定することを検討している。ただし、免責金額設定前後で、安全割増率および期首サープラスは変わらないものとする。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。なお、必要であれば、$e=2.718$ を使用すること。

（1）時刻 t までに破産する確率が、免責金額を設定しない場合は $P_1(t)$、免責金額を設定した場合は $P_2(t)$ であるとする。$P_1(10)=P_2(t)$ が成り立つ時刻 t に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）6	（B）7	（C）8	（D）9	（E）10
（F）11	（G）12	（H）13	（I）14	（J）15

（2）免責金額設定後のポートフォリオに対し、出再割合 30%、再保険付加率 100%の比例再保険を付したとき、Lundberg の不等式を用いて保険会社にとって最も保守的に評価した破産確率は $\exp\left(-\boxed{}\right)$ となる。$\boxed{}$ に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）1.0	（B）1.5	（C）2.0	（D）2.5	（E）3.0
（F）3.5	（G）4.0	（H）4.5	（I）5.0	（J）5.5

Ⅳ．次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）支払保険金総額Sが、確率密度関数が$f(x)=\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}(x\geq 0)$であるガンマ分布$\Gamma(\alpha,\beta)$に従い、その分布関数を$F_{\alpha,\beta}(x)$とする。このとき、エクセスポイントを$d$とするストップロス再保険のネット再保険料$E(I_d)$は次のとおりとなる。

$$E(I_d)=\left(\boxed{\quad ① \quad}\right)\times\left(1-\boxed{\quad ② \quad}\right)-\left(\boxed{\quad ③ \quad}\right)\times\left(1-\boxed{\quad ④ \quad}\right)$$

①～④に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

【①、③の選択肢】

（Ａ）$d-1$　（Ｂ）d　（Ｃ）$d+1$　（Ｄ）α　（Ｅ）β

（Ｆ）$\alpha+\beta$　（Ｇ）$\alpha-\beta$　（Ｈ）$\alpha\beta$　（Ｉ）$\dfrac{\alpha}{\beta}$　（Ｊ）$\dfrac{\beta}{\alpha}$

（Ｋ）いずれにも該当しない

【②、④の選択肢】

（Ａ）$F_{\alpha-1,\beta-1}(d)$　（Ｂ）$F_{\alpha-1,\beta}(d)$　（Ｃ）$F_{\alpha-1,\beta+1}(d)$　（Ｄ）$F_{\alpha,\beta-1}(d)$　（Ｅ）$F_{\alpha,\beta}(d)$

（Ｆ）$F_{\alpha,\beta+1}(d)$　（Ｇ）$F_{\alpha+1,\beta-1}(d)$　（Ｈ）$F_{\alpha+1,\beta}(d)$　（Ｉ）$F_{\alpha+1,\beta+1}(d)$

（Ｊ）いずれにも該当しない

（２）ある火災保険と賠償責任保険の一体型保険商品１契約における、火災保険の年間支払件数 N_1 と賠償責任保険の年間支払件数 N_2 は以下の確率分布に従う。また、確率変数 (N_1, N_2) のコピュラは反単調コピュラ $C^{-}(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1, 0)$ であることが分かっている。

火災保険の年間支払件数 N_1	0	1	2
発生確率	0.5	0.3	0.2

賠償責任保険の年間支払件数 N_2	0	1	2
発生確率	0.6	0.3	0.1

このとき、火災保険と賠償責任保険の年間合計支払件数が１件になる確率は $\boxed{⑤}$ となる。また、火災保険の１事故あたりの支払保険金 X_1 と賠償責任保険の１事故あたりの支払保険金 X_2 がともにガンマ分布 $\Gamma(1,2)$ に従うものとする。このとき、年間支払保険金総額 S に対してエクセスポイントを１とするストップロス再保険を手配した場合のネット再保険料は $\boxed{⑥}$ となる。⑤、⑥に当てはまる数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば、$e^{-1} = 0.368$ を使用すること。

【⑤の選択肢】

（Ａ）0　（Ｂ）0.1　（Ｃ）0.2　（Ｄ）0.3　（Ｅ）0.4
（Ｆ）0.5　（Ｇ）0.6　（Ｈ）0.7　（Ｉ）0.8　（Ｊ）0.9

【⑥の選択肢】

（Ａ）0.10　（Ｂ）0.12　（Ｃ）0.14　（Ｄ）0.16　（Ｅ）0.18
（Ｆ）0.20　（Ｇ）0.22　（Ｈ）0.24　（Ｉ）0.26　（Ｊ）0.28

問題４． 次のⅠ、Ⅱの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　各１０点　（計２０点）

Ⅰ．保険料算出原理について、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）ある保険契約は、10%の確率で保険期間中に事故が発生し、事故が発生した際に支払われる保険金は自由度nのカイ 2 乗分布 $f(y)=\dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}e^{-y/2}y^{n/2-1}$　$(y\geq 0)$に従うことがわかっている。この保険契約において、保険期間中に支払われる保険金総額Xに対する保険料をエッシャー原理 $P(X)=E(Xe^{hX})/E(e^{hX})$で算出したとき、この値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、$h=0.2$、$n=3$とする。

（Ａ）0.80　（Ｂ）0.82　（Ｃ）0.84　（Ｄ）0.86　（Ｅ）0.88
（Ｆ）0.90　（Ｇ）0.92　（Ｈ）0.94　（Ｉ）0.96　（Ｊ）0.98

（２）標準正規分布$N(0,1)$の分布関数をΦとし、hを正のパラメータとする。確率変数Xに対して、$F_{W_{X,h}}(x)=\Phi\left(\Phi^{-1}\left(F_X(x)\right)-h\right)$を分布関数にもつ確率変数を$W_{X,h}$としたとき、ワンの保険料算出原理では、$P_{Wang}(X)=E\left(W_{X,h}\right)$を保険料とする。ある保険契約の保険金総額$X$が、確率密度関数が$f(x)=1/(b-a)$　$(a<x<b)$である一様分布$U(a,b)$に従うことがわかっているものとし、この保険契約の保険料をワンの保険料算出原理に基づいて算出する。

まず、保険金総額Xが一様分布$U(0,1)$に従う場合の保険料$P_{Wang}(X)=E\left(W_{X,h}\right)$を算出する。

Xの分布関数は$F_X(x)=x$であるから、$W_{X,h}$の分布関数は$F_{W_{X,h}}(x)=\Phi\left(\Phi^{-1}(x)-h\right)$となる。

ここで、標準正規分布$N(0,1)$に従う確率変数をZとおき、$F_{W_{X,h}}(x)=\Phi\left(\Phi^{-1}(x)-h\right)$の右辺の$x$を$x=\Phi\left(\Phi^{-1}(x)\right)=F_Z\left(\Phi^{-1}(x)\right)$と書き換えることにより、$F_{W_{X,h}}(x)=F_{W_{Z,h}}\left(\Phi^{-1}(x)\right)$を得る。

分布関数の定義より、$F_{W_{Z,h}}\left(\Phi^{-1}(x)\right)=F_{\boxed{\text{（ｉ）}}}(x)$が成り立つので、$W_{X,h}$と$\boxed{\text{（ｉ）}}$は同じ分布に従うことがわかる。よって、$P_{Wang}(X)=E\left(\boxed{\text{（ｉ）}}\right)$となる。この値は、$W_{Z,h}$の分布関数が$F_{W_{Z,h}}(x)=\Phi\left(\Phi^{-1}\left(\Phi(x)\right)-h\right)=\Phi(x-h)$であることと、次の等式を用いて計算できる。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(c+dx)\varphi(x)dx=\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{1+d^2}}\right)$$
（φは標準正規分布$N(0,1)$の確率密度関数、cおよびdは定数）

上記の結果、および<u>ワンの保険料算出原理の性質</u>を用いると、保険金総額Xが一般の一様分布$U(a,b)$に従う場合の保険料$P_{Wang}(X)=E\left(W_{X,h}\right)$を算出することができる。

① $\boxed{\quad（\mathrm{i}）\quad}$ に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）$W_{Z,h}$　（Ｂ）$W_{\Phi^{-1}(Z),h}$　（Ｃ）$W_{Z,\Phi^{-1}(h)}$　（Ｄ）$\Phi(W_{Z,h})$　（Ｅ）$\Phi^{-1}(W_{Z,h})$

（Ｆ）いずれにも該当しない

② 保険金総額 X が一様分布 $U(0,1)$ に従うとき、ワンの保険料算出原理に基づいて算出される保険料 $P_{Wang}(X)=E(W_{X,h})$ の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、$h=1/\sqrt{2}$ とする。また、必要があれば、下表（標準正規分布の上側 ε 点）の数値を使用すること。

＜表＞　標準正規分布の上側 ε 点：$u(\varepsilon)$

ε	0.500	0.460	0.421	0.382	0.345	0.309	0.274	0.242	0.212	0.184	0.159
$u(\varepsilon)$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0

（Ａ）0.51　（Ｂ）0.54　（Ｃ）0.57　（Ｄ）0.60　（Ｅ）0.63
（Ｆ）0.66　（Ｇ）0.69　（Ｈ）0.72　（Ｉ）0.75　（Ｊ）0.78

③ 下線部（ワンの保険料算出原理の性質）に関連して、次の（Ａ）～（Ｅ）の性質のうち、ワンの保険料算出原理が満たすものとして正しいものをすべて選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。ただし、すべて誤っている場合は（Ｆ）をマークしなさい。

（Ａ）リスクプレミアムは非負
（Ｂ）保険料は保険金の上限額以下
（Ｃ）平行移動不変性
（Ｄ）正の同次性
（Ｅ）独立なリスクに関する加法性

④ 保険金総額 X が一様分布 $U(8,21)$ に従うとき、ワンの保険料算出原理に基づいて算出される保険料 $P_{Wang}(X)=E(W_{X,h})$ の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、$h=1/\sqrt{2}$ とする。また、必要があれば、②の表の数値を使用すること。

（Ａ）14.5　（Ｂ）15.0　（Ｃ）15.5　（Ｄ）16.0　（Ｅ）16.5
（Ｆ）17.0　（Ｇ）17.5　（Ｈ）18.0　（Ｉ）18.5　（Ｊ）19.0

Ⅱ．閾値超過モデルを用いて過去の自然災害の損害額データを分析し、自然災害リスクのテイルリスクを評価することを考える。次の（1）～（3）の各問に答えなさい。

（1）閾値uの超過分布関数と平均超過関数を以下のように定義する。

超過分布関数

X を分布関数F を持つ確率変数とする。このとき

$$F_u(x) = P(X - u \le x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)},\quad 0 \le x < x_F - u$$

を閾値uの超過分布関数という。ただし、x_F は確率分布の右端点とする。

平均超過関数

平均が有限である確率変数X について、$e(u) = E(X - u | X > u)$ を平均超過関数という。

平均が有限である確率変数$X(\ge 0)$の分布関数F とし、その平均超過関数を$e(x)$とする。平均超過関数$e(x)$は分布関数F を用いて、

$$e(x) = \frac{\int_x^{x_F} (1 - F(s))ds}{1 - F(x)} \qquad (0 \le x < x_F) \qquad \cdots（ｉ）$$

と表される。特にX が一般化パレート分布（GPD）に従う場合、すなわち分布関数が以下の$G_{\xi,\beta}(x)$

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x/\beta)^{-1/\xi} & \xi \ne 0 \\ 1 - \exp(-x/\beta) & \xi = 0 \end{cases}$$

（$\beta > 0$、また$\xi \ge 0$のとき$x \ge 0$、$\xi < 0$のとき$0 \le x \le -\beta/\xi$）

により表される場合、平均超過関数は以下のとおりとなる。

$$e(u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}, \qquad （0 \le \xi < 1 ならば u \ge 0、\xi < 0 ならば 0 \le u < -\beta/\xi）$$

※$\xi \ge 1$のときには平均超過関数は定義できない。

上式より、GPD の平均超過関数は閾値uに関して線形に増大することがわかる。

ここで、逆に、分布関数F を平均超過関数$e(x)$で表すことを考える。（ｉ）より、

$$\int_0^x \frac{du}{e(u)} = \int_0^x \frac{1-F(u)}{\int_u^{x_F} (1-F(s))ds} du$$
$$= \int_0^x \frac{d}{du}\left\{ -\log \int_u^{x_F} (1-F(s))ds \right\} du \qquad (0 \le x < x_F)$$

が成り立つ。u についての積分を実行し、（ｉ）を用いて整理することにより、

$$F(x) = \boxed{\quad ① \quad} + \left(\boxed{\quad ② \quad} \right) \times \exp\left(\boxed{\quad ③ \quad} \right) \qquad (0 \le x < x_F)$$

が得られる。このことから、平均超過関数が直線になるのは GPD の場合に限ることが分かる。以上の GPD の性質は、ある閾値を超過する観測データが GPD に従うとの仮定の妥当性の確認や、適切な閾値の選択に用いることができる。

①～③に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

（Ａ）0　（Ｂ）1　（Ｃ）-1　（Ｄ）2

（Ｅ）$e(0)$　（Ｆ）$e(x)$　（Ｇ）$\dfrac{e(0)}{e(x)}$　（Ｈ）$\dfrac{e(x)}{e(0)}$

（Ｉ）$-e(0)$　（Ｊ）$-e(x)$　（Ｋ）$-\dfrac{e(0)}{e(x)}$　（Ｌ）$-\dfrac{e(x)}{e(0)}$

（Ｍ）$\displaystyle\int_0^x \frac{du}{e(u)}$　（Ｎ）$\displaystyle\frac{e(0)}{e(x)}\int_0^x \frac{du}{e(u)}$　（Ｏ）$\displaystyle\frac{e(x)}{e(0)}\int_0^x \frac{du}{e(u)}$　（Ｐ）$\displaystyle-\int_0^x \frac{du}{e(u)}$

（Ｑ）$\displaystyle-\frac{e(0)}{e(x)}\int_0^x \frac{du}{e(u)}$　（Ｒ）$\displaystyle-\frac{e(x)}{e(0)}\int_0^x \frac{du}{e(u)}$　（Ｓ）いずれにも該当しない

（２）過去の損害額データは下表のとおりであった。

損害額区分	損害額の中央値	実績発生件数
500 以下	-	357
500 超　600 以下	550	75
600 超　700 以下	650	33
700 超　800 以下	750	19
800 超　900 以下	850	5
900 超　1,000 以下	950	7
1,000 超　1,100 以下	1,050	2
1,100 超　1,200 以下	1,150	1
1,200 超　1,300 以下	1,250	1

上記のデータから平均超過関数 $e(u)$ の観測値を計算し、閾値 u に対してプロットしたところ、$u=500$ 以上で平均超過関数が概ね一定となっていることが判明したため、$F_{500}(x)$ を $\xi=0$ の GPD である $G_{0,\beta}(x)$ で近似することとした。最尤法を用いて、上表の実績データからパラメータ β を推定した場合、β の値に最も近いのは選択肢のうちのどれか。なお、各損害額区分の中央値をその区分の損害額の代表値として計算すること。

（A）125　（B）135　（C）145　（D）155　（E）165
（F）175　（G）185　（H）195　（I）205　（J）215

（３）超過分布関数の定義式および（２）で設定した閾値 $u=500$、推定した GPD のパラメータ β（（２）で選択した値を用いることとする）を用いて、99.9 パーセンタイルに対応する損害額を算出した場合、その損害額に最も近いものは選択肢のうちのどれか。なお、$1-F(500)$ の値は、（２）の実績データから全体の発生件数と損害額 500 超の発生件数の比として推定し、小数点以下第 2 位を四捨五入し小数点以下第 1 位までの数値を用いることとする。また、必要があれば、$\log 2=0.693$、$\log 3=1.099$、$\log 5=1.609$、$\log 7=1.946$ を使用すること。

（A）1,085　（B）1,120　（C）1,155　（D）1,190　（E）1,225
（F）1,260　（G）1,295　（H）1,330　（I）1,365　（J）1,400

以上

損保数理（解答例）

問題１

Ⅰ．

（Ｈ）　　［３点］

平均μ、標準偏差σとすると、任意の$\varepsilon(>0)$に対して、チェビシェフの不等式より、

$P(|X-\mu|>\varepsilon)\le\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$　が成立する。（テキスト 0−18 参照）

$\mu=25$、$\sigma=2$、$\varepsilon=10$を代入すると、

$P(|X-25|>10)\le 0.04$

ここで、$P(|X-25|>10)=1-P(15\le X\le 35)$　であるから、

$P(15\le X\le 35)\ge 1-0.04=0.96$

Ⅱ.

<u>（Ⅰ）</u>　　［３点］

1 年契約の営業保険料を P とし、その営業保険料に対する純保険料、新契約費、維持費、代理店手数料、利潤の割合をそれぞれ $p,\alpha,\beta,\theta,\delta$ とする。予定利率は考慮しないことから、求める割合は

$$\frac{1\text{年契約の純保険料} + 2\text{年契約の純保険料}}{1\text{年契約の営業保険料} + 2\text{年契約の営業保険料}}$$

$$=\frac{P\times p+P\times p\times(1+1)}{P+P\times\dfrac{\alpha+(\beta+p)\times(1+1)}{1-(\theta+\delta)}}$$

$$=\frac{p+p\times(1+1)}{1+\dfrac{\alpha+(\beta+p)\times(1+1)}{1-(\theta+\delta)}}$$

と表せる。ここで、

$$p=\frac{126}{240}=0.525,\quad \alpha=\frac{48}{240}=0.2,\quad \beta=\frac{24}{240}=0.1,\quad \theta=\frac{18}{240}=0.075,\quad \delta=\frac{24}{240}=0.1$$

であることから、求める割合は、

$$\frac{0.525+0.525\times(1+1)}{1+\dfrac{0.2+(0.1+0.525)\times(1+1)}{1-(0.075+0.1)}}=0.571$$

Ⅲ.

（D）　　［３点］

支払件数Nはポアソン分布$P(N=n)=\dfrac{1^n e^{-1}}{n!}$に従うので、求める確率は、

$$P(N=1)P(X_1=3)+P(N=2)P(X_1+X_2=3)+P(N=3)P(X_1+X_2+X_3=3)$$

$$=P(N=1)P(X_1=3)+P(N=2)\{P(X_1=1)P(X_2=2)+P(X_1=2)P(X_2=1)\}$$
$$+P(N=3)\{P(X_1=1)P(X_2=1)P(X_3=1)\}$$

$$=e^{-1}\times 0.2+\frac{e^{-1}}{2}\times(0.5\times 0.3+0.3\times 0.5)+\frac{e^{-1}}{6}\times 0.5^3$$

$$=\frac{89}{240}\times e^{-1}=0.136$$

【別解】

テキスト 2-17 より、支払保険金が 1、2、3 に等しいクレームの数をそれぞれN_1、N_2、N_3とすると、これらは互いに独立にパラメータが 0.5、0.3、0.2 のポアソン分布に従う。よって、求める確率は、

$$P(N_1=3)P(N_2=0)P(N_3=0)+P(N_1=1)P(N_2=1)P(N_3=0)+P(N_1=0)P(N_2=0)P(N_3=1)$$

$$=\frac{0.5^3}{3!}e^{-0.5}\times e^{-0.3}\times e^{-0.2}+\frac{0.5^1}{1!}e^{-0.5}\times\frac{0.3^1}{1!}e^{-0.3}\times e^{-0.2}+e^{-0.5}\times e^{-0.3}\times\frac{0.2^1}{1!}e^{-0.2}$$

$$=\frac{89}{240}\times e^{-1}=0.136$$

Ⅳ.

（C）　　［３点］

予定契約消滅率を考慮した現価率ϕおよび期始払年金現価率Zは、以下のとおりとなる。

$$\phi = \frac{1-q}{1+i} = 0.9604, \qquad Z = \frac{1-\phi^5}{1-\phi} = 4.6194$$

よって、年払営業保険料は以下のとおりとなる。

年払営業保険料　＝　年払積立保険料　×　（1＋ 維持費率 ＋ 代理店手数料率）

　＝（満期返れい金×ϕ^5＋中途返れい金×ϕ^3）÷Z×（1＋ 維持費率 ＋ 代理店手数料率）

　＝（200 万×0.9604^5 ＋50 万×0.9604^3）÷4.6194 ×（1＋3%＋2%）

　＝ 472,122

Ⅴ.

<u>（Ⅰ）</u>　　［４点］

設定されている条件を整理すると、以下のとおりとなる。

		保険金支払年度			
		前年度	当年度	次年度	合計
契約年度	前年度	l_1 件 L_1 万円	l_2 件 L_2 万円		
	当年度		l_3 件 L_3 万円	l_4 件 L_4 万円	l_3+l_4 件 L_3+L_4 万円
	合計		l_2+l_3 件 L_2+L_3 万円		

（注）l ：支払件数、L ：支払保険金

$l_2 = l_1$
$l_3 = l_4 = l_1 \times 1.2 \times 1.15 = 1.38 l_1$
$L_2 = L_1 \times 3 = 3L_1$
$L_3 = L_1 \times 1.2 \times 1.15 = 1.38 L_1$
$L_4 = L_3 \times 3 = 1.38 \times 3L_1 = 4.14 L_1$

したがって、$D_1 \div D_2$ の値は次のとおりとなる。

$$D_1 = \frac{L_3 + L_4}{l_3 + l_4} = \frac{1.38 + 4.14}{1.38 + 1.38} \cdot \frac{L_1}{l_1} = 2\frac{L_1}{l_1} = 20 \text{（万円）}$$

$$D_2 = \frac{L_2 + L_3}{l_2 + l_3} = \frac{3 + 1.38}{1 + 1.38} \cdot \frac{L_1}{l_1} = 1.840\frac{L_1}{l_1} = 18.40 \text{（万円）}$$

$D_1 \div D_2 = 1.09$

VI.

（１）（G）　（２）（B）（D）　　［（１）３点　（２）２点］

（１）

確率変数$S = X + Y$は以下の確率分布に従う。

s	$P(S=s)$	
0	0.25	$P(X=0)P(Y=0)$
10	0.30	$P(X=10)P(Y=0)+P(X=0)P(Y=10)$
20	0.29	$P(X=20)P(Y=0)+P(X=10)P(Y=10)+P(X=0)P(Y=20)$
30	0.12	$P(X=20)P(Y=10)+P(X=10)P(Y=20)$
40	0.04	$P(X=20)P(Y=20)$

$$
\begin{aligned}
TVaR_{60\%}(X+Y) &= \frac{1}{1-0.6}\int_{0.6}^{1} VaR_t(S)dt \\
&= \frac{1}{1-0.6}\left\{20\int_{0.6}^{0.84} dt + 30\int_{0.84}^{0.96} dt + 40\int_{0.96}^{1} dt\right\} \\
&= \frac{1}{1-0.6}\{20(0.84-0.6)+30(0.96-0.84)+40(1-0.96)\} \\
&= 25
\end{aligned}
$$

（２）

（A）　誤り。TVaRは劣加法性を満たす。

なお、VaRは一般の場合には劣加法性を満たさない。（テキスト10-51～52）

（B）　正しい。（テキスト10-51～52）

（C）　誤：歪み関数は凸関数である。

正：歪み関数は凹関数である。（テキスト10-52）

（D）　正しい。（テキスト10-54）

問題２

Ⅰ.

（１）（Ｉ）　（２）（Ｄ）　　　［（１）４点　（２）３点］

（１）

損害額を X とし、免責金額が 100、支払限度額が 900 の場合のクレーム額を Y とすると以下の関係が成り立つ。

$$Y=\begin{cases} \text{定義されない} & (X \le 100) \\ X-100 & (100 < X \le 1{,}000) \\ 900 & (X > 1{,}000) \end{cases}$$

これより、Y の分布関数は、

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0 & (y=0) \\ \dfrac{F_X(y+100)-F_X(100)}{1-F_X(100)} & (0<y<900) \\ 1 & (y \ge 900) \end{cases}$$

となる。

Y の分布関数および問題の前提から、Y の確率密度関数は、

$$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{f_X(y+100)}{1-F_X(100)} & (0 \le y < 900) \\ \dfrac{1-F_X(1{,}000)}{1-F_X(100)} & (y=900) \\ 0 & (y>900) \end{cases}$$

となる。

これにより、尤度関数 $L(\theta)$ は

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{6} f_Y(y_i;\theta)=\left\{\prod_{i=1}^{4}\frac{f_X(y_i+100)}{1-F_X(100)}\right\}\left\{\prod_{i=5}^{6}\frac{1-F_X(1{,}000)}{1-F_X(100)}\right\}=\frac{(1-F_X(1{,}000))^2}{(1-F_X(100))^6}\times\left\{\prod_{i=1}^{4} f_X(y_i+100)\right\}$$

$$=\frac{(1-F_X(1{,}000))^2}{(1-F_X(100))^6}\times\frac{1}{\theta^4}\times e^{-\frac{1{,}800}{\theta}}=e^{-\frac{1{,}400}{\theta}}\times\frac{1}{\theta^4}\times e^{-\frac{1{,}800}{\theta}}$$

となり、$\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta)=0$ となる θ が求める推定値となる。

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-4\log\theta-\frac{3{,}200}{\theta}\right)=-\frac{4}{\theta}+\frac{3{,}200}{\theta^2}=0$$

これを θ について解くと $\theta=800$ となる。

（2）

免責金額a、支払限度額bのとき、1件あたりのクレーム額の期待値は以下のようになる。

$$\frac{1}{1-F_X(a)}\left\{\int_a^{a+b}(x-a)\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx+\int_{a+b}^{\infty}b\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx\right\}$$

$$=e^{\frac{a}{\theta}}\left\{\left[-(x-a)e^{-\frac{x}{\theta}}-\theta e^{-\frac{x}{\theta}}\right]_a^{a+b}+\left[-be^{-\frac{x}{\theta}}\right]_{a+b}^{\infty}\right\}$$

$$=e^{\frac{a}{\theta}}\left(-be^{-\frac{a+b}{\theta}}-\theta e^{-\frac{a+b}{\theta}}+\theta e^{-\frac{a}{\theta}}+be^{-\frac{a+b}{\theta}}\right)$$

$$=\theta\left(1-e^{-\frac{b}{\theta}}\right)$$

ここで、（1）の結果より$\theta=800$とする。また、$b=450$であるから、求める期待値は、

$$800\left(1-e^{-\frac{450}{800}}\right)=800\left(1-e^{-\frac{9}{16}}\right)=800\left(1-0.368^{\frac{9}{16}}\right)=344$$

Ⅱ.

（１）①（Ｉ）②（Ｋ）③（Ｏ）④（Ｅ）⑤（Ｌ）⑥（Ｐ）⑦（Ｈ）（①～⑦は完答）

（２）（Ｇ）　　［（１）４点　（２）３点］

（１）

$y_1 = 600$（X 歳未満かつ営業用）、$y_2 = 500$（X 歳未満かつ自家用）、

$y_3 = 400$（X 歳以上かつ営業用）、$y_4 = 300$（X 歳以上かつ自家用）とする。

リンク関数が対数関数であることから、

$$\mu_i = g^{-1}(\beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3}) = \begin{cases} e^{\beta_1+\beta_3} & (i=1) \\ e^{\beta_1} & (i=2) \\ e^{\beta_2+\beta_3} & (i=3) \\ e^{\beta_2} & (i=4) \end{cases}$$ となる。

尤度関数は $L = \prod_{i=1}^{4} \frac{\mu_i^{y_i}}{y_i!} e^{-\mu_i}$ であることから、対数尤度関数は、

$$\begin{aligned} l = \log L &= \sum_{i=1}^{4} \left(y_i \log \mu_i - \log y_i! - \mu_i \right) \\ &= 600(\beta_1 + \beta_3) - \log 600! - e^{\beta_1+\beta_3} + 500\beta_1 - \log 500! - e^{\beta_1} \\ &\quad + 400(\beta_2 + \beta_3) - \log 400! - e^{\beta_2+\beta_3} + 300\beta_2 - \log 300! - e^{\beta_2} \end{aligned}$$

となる。

$\frac{\partial l}{\partial \beta_i} = 0 \quad (i = 1,2,3)$ より、

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_1} = 1{,}100 - e^{\beta_1} - e^{\beta_1+\beta_3} = 0 \qquad \cdots（ⅰ）$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_2} = 700 - e^{\beta_2} - e^{\beta_2+\beta_3} = 0 \qquad \cdots（ⅱ）$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_3} = 1{,}000 - e^{\beta_1+\beta_3} - e^{\beta_2+\beta_3} = 0 \qquad \cdots（ⅲ）$$

（２）

（ⅰ）より $e^{\beta_1} = \frac{1{,}100}{e^{\beta_3}+1}$、（ⅱ）より $e^{\beta_2} = \frac{700}{e^{\beta_3}+1}$、これを（ⅲ）に代入し、$1{,}000 = e^{\beta_3}\left(e^{\beta_1} + e^{\beta_2}\right) = \frac{1{,}800 e^{\beta_3}}{e^{\beta_3}+1}$

従って、$800 e^{\beta_3} = 1000$ より $e^{\beta_3} = 1.25$　であるから「X 歳未満かつ営業用」の期待値は、

$$e^{\beta_1+\beta_3} = \frac{1{,}100}{e^{\beta_3}+1} \times e^{\beta_3} = \frac{1{,}100}{1.25+1} \times 1.25 = 611$$

Ⅲ.

（１）**（E）**　（２）**（G）**　　［（１）４点　（２）３点］

（１）

事故報告年度別のロスディベロップメントファクターの実績値と予測値を計算すると以下のとおりとなる。

【初年度報告】

事故年度	経過年度		
	1→2	2→3	3→4
2013	1.600	1.250	1.100
2014	1.700	1.150	
2015	1.500		
予測値	1.600	1.200	1.100

【第 2 年度報告】

事故年度	経過年度	
	2→3	3→4
2013	2.160	1.250
2014	2.240	
予測値	2.200	1.250

【第 3 年度報告】

事故年度	経過年度
	3→4
2013	2.975
予測値	2.975

したがって、最終累計発生保険金の推定値は以下のとおりとなる。

【初年度報告】　2014 年度：3,910×1.100＝4,301
2015 年度：3,450×1.200×1.100＝4,554
2016 年度：2,500×1.600×1.200×1.100＝5,280
【第 2 年度報告】2014 年度：560×1.250＝700
2015 年度：340×2.200×1.250＝935
【第 3 年度報告】2014 年度：120×2.975＝357

以上より、問題文中の表の値は以下のとおりとなり、既報告損害における最終累計発生保険金の総計は、20,205 となる。

【事故年度・事故報告年度別　最終累計発生保険金推定値】

事故年度	事故報告年度			合計
	1	2	3	
2013	3,300	540	238	4,078
2014	4,301	700	357	5,358
2015	4,554	935		5,489
2016	5,280			5,280
			総計	20,205

（2）

IBNR ファクターの実績値と予測値を計算すると以下のとおりとなる。

事故年度	報告年度	
	2	3
2013	0.164	0.062
2014	0.163	0.071
2015	0.205	
予測値	0.177	0.067

したがって、表中の斜線部分に対する最終累計発生保険金は以下のとおりとなり、IBNR 備金の値は、935＋368＋416＝1,719 となる。

【第 2 年度報告】2016 年度：5,280×0.177＝935

【第 3 年度報告】2015 年度：（4,554＋935）×0.067＝368

2016 年度：（5,280＋935）×0.067＝416

Ⅳ.

<u>（１）**（Ｅ）**　（２）**（Ｈ）**</u>　　　［（１）３点　（２）３点］

（１）

イ　正しい（テキスト1-26～27、3-2）。

ロ　誤：<u>ポリシー・イヤー・ベーシス損害率</u>とは、

　　正：<u>アーンドベーシス損害率</u>とは、（テキスト1-5～10）。

ハ　誤り。IBNER Reserve と IBNYR Reserve の説明が逆。（テキスト5-3）。

（２）

ニ　誤り。契約者貸付と保険料の振替貸付の説明が逆。（テキスト6-33～34）。

ホ　誤り。任意再保険と特約再保険の説明が逆。（テキスト9-2）。

ヘ　誤り。当該説明は順位相関係数による積率法に関する説明。（テキスト10-40～41）。

問題３

Ｉ．

（１）①（Ａ）②（Ｃ）（①～②は完答）　（２）③（Ｂ）④（Ｅ）

［（１）２点　（２）③３点、④３点］

（１）

$$E\left((\Theta-g(\mathbf{x}))^2\mid\mathbf{x}\right)=g(\mathbf{x})^2-2E(\Theta\mid\mathbf{x})\times g(\mathbf{x})+E\left(\Theta^2\mid\mathbf{x}\right)$$
$$=\left(g(\mathbf{x})-E(\Theta\mid\mathbf{x})\right)^2+E\left(\Theta^2\mid\mathbf{x}\right)-E(\Theta\mid\mathbf{x})^2$$
$$=\left(g(\mathbf{x})-E(\Theta\mid\mathbf{x})\right)^2+V(\Theta\mid\mathbf{x})$$

より、Θ との 2 乗誤差を最小とする推定値は、Θ の事後分布の期待値 $E(\Theta\mid\mathbf{x})$ である。

（２）

契約者の各年のクレーム件数 X_i は期待値 Θ のポアソン分布 $f_{X_i|\Theta}(x_i|\theta)=e^{-\theta}\dfrac{\theta^{x_i}}{x_i!}$ に従うことから、その期待値は $E(X_i|\Theta)=\mu(\Theta)=\Theta$ となる。Θ の事後分布は

$$\pi_{\Theta|\mathbf{x}}(\theta|\mathbf{x})\propto\pi(\theta)\prod_{i=1}^{n}f_{X_i|\Theta}(x_i|\theta)=3\theta^{-4}\prod_{i=1}^{n}e^{-\theta}\frac{\theta^{x_i}}{x_i!}\quad(\theta>1)$$
$$\propto\theta^{-4+\sum_{i=1}^{n}x_i}e^{-n\theta}\quad(\theta>1)$$
$$=\theta\, e^{-2\theta}\quad(\theta>1)$$

※定義域が $\theta>0$ でないため、ガンマ分布とは異なる

に比例する。ここで、$I(\alpha,y)=\int_y^{\infty}\theta^{\alpha}\ e^{-n\theta}d\theta=\int_y^{\infty}\theta^{\alpha}\ e^{-2\theta}d\theta$（ただし、$\alpha$ は非負の整数）という量を定義すると、部分積分により

$$I(\alpha,y)=\frac{e^{-2y}}{2}\left(y^{\alpha}+\frac{\alpha}{2}y^{\alpha-1}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2^2}y^{\alpha-2}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2^3}y^{\alpha-3}+\cdots+\frac{\alpha!}{2^{\alpha}}\right)$$

と計算できる。この結果から、事後分布は規格化も含めて、

$$\pi_{\Theta|\mathbf{x}}(\theta|\mathbf{x})=\frac{1}{I(1,1)}\theta\, e^{-2\theta}=\frac{4}{3}e^2\theta\, e^{-2\theta}\quad(\theta>1)$$ と決定される。よって、

$$P(\Theta\ge 2|\mathbf{x})=\int_2^{\infty}\pi_{\Theta|\mathbf{x}}(\theta|\mathbf{x})\,d\theta=\frac{4}{3}e^2\int_2^{\infty}\theta\, e^{-2\theta}d\theta=\frac{4}{3}e^2\times I(1,2)=\frac{4}{3}e^2\times\frac{5}{4}e^{-4}=\frac{5}{3}e^{-2}=0.23$$

また、X_3 の推定量は以下のようになる。

$$E(\mu(\Theta)|\mathbf{x})=E(\Theta|\mathbf{x})=\int_1^{\infty}\theta\pi_{\Theta|\mathbf{x}}(\theta|\mathbf{x})\,d\theta=\frac{I(2,1)}{I(1,1)}=\frac{\frac{5}{4}e^{-2}}{\frac{3}{4}e^{-2}}=\frac{5}{3}=1.67$$

Ⅱ.

（１）①（Ｇ）②（Ｉ）　（２）（Ｄ）　　　［（１）①２点、②３点　（２）３点］

（１）

$f_0(t)=P(N_t=0)$ は、就業時間のみで考えれば $e^{-0.5t}$ であることから、オペレーショナル・タイム $\tau(t)$ は、

$\tau(t)=0.5\times$（$[0,t]$での就業時間累計）となる。従って、$\tau(10)=0.5\times 7.0=3.5$

また、$f_0(t)=P(N_t=0)$ は t の関数として連続であるため、テキスト 8-19 の定理 8.2 より、

$P(N_t=n)=\dfrac{\tau(t)^n}{n!}e^{-\tau(t)}$ となる。

よって、$P(N_{10}=2)=\dfrac{\tau(10)^2}{2!}e^{-\tau(10)}=\dfrac{3.5^2}{2!}e^{-3.5}=0.185$

（２）

$N'_s=N_{\tau^{-1}(s)}$ はポアソン過程に従い、$P(N'_s=n)=\dfrac{s^n}{n!}e^{-s}\quad(n=0,1,2,\cdots)$ が成り立つ。よって、$S_1=\tau(T_1)$ は平均 1 の指数分布に従うことになる。

ここで、$\tau(t)=0.5\times$（$[0,t]$での就業時間累計）であることから、$\tau(t_1)=\tau(t_2)$ を満たす異なる時刻 $t_1,t_2\ (t_1<t_2)$ が存在し、$\tau^{-1}(s)$ は一意には定まらない。しかし、これは区間$[t_1,t_2]$におけるクレーム発生確率がゼロであることを意味し、$N_{t_1}=N_{t_2}$ が成り立つ。したがって、すべての $s\in\tau([0,\infty))$ に対して N'_s を一意に定めることができる。これを踏まえ、

$$\tau^{-1}(s)=\begin{cases}2s & 0\le s<1\\ 2s+1 & 1\le s<2\\ 2s+2 & 2\le s<3\\ & \cdots\end{cases}$$

と定めてよい。求める期待値は、

$$\begin{aligned}E(T_1)=E(\tau^{-1}(S_1))&=\int_0^1 2s\cdot e^{-s}ds+\int_1^2(2s+1)\cdot e^{-s}ds+\int_2^3(2s+2)\cdot e^{-s}ds+\cdots\\
&=\int_0^\infty 2s\cdot e^{-s}ds+\int_1^2 e^{-s}ds+\int_2^3 2e^{-s}ds+\cdots\\
&=\left[-2(1+s)e^{-s}\right]_0^\infty+\left[-e^{-s}\right]_1^2+\left[-2e^{-s}\right]_2^3+\cdots\\
&=2+(e^{-1}-e^{-2})+2(e^{-2}-e^{-3})+\cdots\\
&=2+e^{-1}+e^{-2}+e^{-3}+\cdots\\
&=2+\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}=2+\frac{0.368}{1-0.368}=2.6\end{aligned}$$

【別解】

就業時間外を考慮せず、$0 \le t$ をすべて就業時間とした場合、$f_0(t) = P(N_t = 0) = e^{-0.5t}$ であるから、時刻 t から $t+dt$ において 1 件目のクレームが発生する確率は、

$$-\frac{df_0(t)}{dt}dt = 0.5e^{-0.5t}dt$$

であり、1 件目のクレームが発生する時刻の期待値は、

$$\int_0^\infty t \times 0.5e^{-0.5t}dt = \left[-te^{-0.5t} - 2e^{-0.5t}\right]_0^\infty = 2$$

である。ここで、就業時間外を考慮する。1 件目のクレームが発生する時刻までの就業時間外の累計を上式に織り込むことによって、求める期待値は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
E(T_1) &= \int_0^2 t \times 0.5e^{-0.5t}dt + \int_2^4 (t+1) \times 0.5e^{-0.5t}dt + \int_4^6 (t+2) \times 0.5e^{-0.5t}dt + \cdots \\
&= \int_0^\infty t \times 0.5e^{-0.5t}dt + \int_2^4 1 \times 0.5e^{-0.5t}dt + \int_4^6 2 \times 0.5e^{-0.5t}dt + \cdots \\
&= 2 + 1 \times (e^{-1} - e^{-2}) + 2 \times (e^{-2} - e^{-3}) + \cdots \\
&= 2 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + \cdots \\
&= 2 + \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} = 2 + \frac{0.368}{1-0.368} = 2.6
\end{aligned}$$

Ⅲ.

（１）（Ｈ）　（２）（Ｇ）　　［（１）４点　（２）４点］

（１）

免責金額の設定により、平均クレーム件数は$e^{-1/4}\left(=\int_1^{\infty}\frac{1}{4}\exp(-x/4)dx\right)$倍となる。

一方、免責金額を超えた場合の個々のクレーム額Yが従う確率関数は、

$$g(y)dy=\frac{f(x)dx}{\int_1^{\infty}\frac{1}{4}\exp(-x/4)dx}=e^{1/4}f(y+1)dy=e^{1/4}\frac{1}{4}\exp(-(y+1)/4)dy=\frac{1}{4}\exp(-y/4)dy$$

となり、免責金額設定前と同じ分布に従う。

また、免責金額設定前後で、安全割増率および期首サープラスは変わらないことから、免責金額の設定により平均クレーム件数が$e^{-1/4}$倍に小さくなるのみであり、これはオペレーショナル・タイムの概念を用いると、時間尺度が$e^{1/4}$倍に調整されたと考えることができる。

したがって、求める時刻は

$$e^{1/4}\times 10=13$$

（２）保有分の１件あたりのクレーム額$Y'=(1-30\%)Y=0.7Y$は、確率関数が

$h(y')=\dfrac{1}{4\times 0.7}\exp\left(-\dfrac{y'}{4\times 0.7}\right)$であるので、平均 2.8 の指数分布に従うことがわかる。

また、保有分に係る単位時間あたりの収入保険料は、

$$(1+50\%)\times 2\times e^{-1/4}\times 4-(1+100\%)\times 2\times e^{-1/4}\times 4\times 30\%=7.2\times e^{-1/4}$$

よって、調整係数rを求める方程式は

$$2\times e^{-1/4}+7.2\times e^{-1/4}\times r=2\times e^{-1/4}\times M_{Y'}(r)=2\times e^{-1/4}\times\frac{1}{1-2.8r}$$

$$1+3.6r=\frac{1}{1-2.8r}$$

これを解くと、$r=\dfrac{0.8}{10.08}$

したがって、最も保守的に評価した破産確率は$\exp\left(-\dfrac{0.8}{10.08}\times 50\right)=\exp(-4.0)$

Ⅳ.
（１）①（Ｉ）②（Ｈ）③（Ｂ）④（Ｅ）（①～④は完答）
（２）⑤（Ｇ）⑥（Ｂ）　　　［（１）２点　（２）⑤３点、⑥３点］

（１）
テキスト 9-14 のとおり。

（２）
確率変数(N_1, N_2)のコピュラが反単調コピュラ$C^-(u_1,u_2)=\max(u_1+u_2-1,0)$であることから、

$F(0,0)=C^-(0.5,0.6)=0.1$
$F(1,0)=C^-(0.8,0.6)=0.4$
$F(2,0)=C^-(1.0,0.6)=0.6$
$F(0,1)=C^-(0.5,0.9)=0.4$
$F(1,1)=C^-(0.8,0.9)=0.7$
$F(2,1)=C^-(1.0,0.9)=0.9$
$F(0,2)=C^-(0.5,1.0)=0.5$
$F(1,2)=C^-(0.8,1.0)=0.8$
$F(2,2)=C^-(1.0,1.0)=1.0$

上記結果を用いて火災保険と賠償責任保険合算の年間合計支払件数の発生確率を算出すると、下表のとおりとなる。

	$N_1=0$	$N_1=1$	$N_1=2$
$N_2=0$	$P(N_1=0,N_2=0)=0.1$	$P(N_1=1,N_2=0)=0.3$	$P(N_1=2,N_2=0)=0.2$
$N_2=1$	$P(N_1=0,N_2=1)=0.3$	$P(N_1=1,N_2=1)=0.0$	$P(N_1=2,N_2=1)=0.0$
$N_2=2$	$P(N_1=0,N_2=2)=0.1$	$P(N_1=1,N_2=2)=0.0$	$P(N_1=2,N_2=2)=0.0$

したがって、年間合計支払件数が１件になる確率は$P(N_1=1,N_2=0)+P(N_1=0,N_2=1)=0.6$となる。

また、ガンマ分布の再生性より、火災保険と賠償責任保険の年間合計支払保険金は、それぞれ以下の分布に従う。
$N_1=1, N_2=0$または$N_1=0, N_2=1$のとき$\Gamma(1,2)$
$N_1=2, N_2=0$または$N_1=0, N_2=2$のとき$\Gamma(2,2)$

よって、（１）の結果から、求めるネット再保険料は

$$E(I_1)=0.6\times\left\{0.5(1-F_{2,2}(1))-(1-F_{1,2}(1))\right\}+0.3\times\left\{(1-F_{3,2}(1))-(1-F_{2,2}(1))\right\}$$

と表せる。ここで、

$$1-F_{1,2}(1)=\int_1^\infty 2e^{-2x}dx=\left[-e^{-2x}\right]_1^\infty=e^{-2}$$

$$1-F_{2,2}(1)=\int_1^{\infty}4xe^{-2x}dx=\left[-2xe^{-2x}-e^{-2x}\right]_1^{\infty}=3e^{-2}$$

$$1-F_{3,2}(1)=\int_1^{\infty}4x^2e^{-2x}dx=\left[-2x^2e^{-2x}-2xe^{-2x}-e^{-2x}\right]_1^{\infty}=5e^{-2}$$

であるから、

$$E(I_1)=0.6\times\left(0.5\times 3e^{-2}-e^{-2}\right)+0.3\times\left(5e^{-2}-3e^{-2}\right)=0.9e^{-2}=0.12$$

問題４

Ⅰ．

（１）（Ｉ）　（２）①（Ｄ）②（Ｇ）③（Ａ）（Ｂ）（Ｃ）（Ｄ）④（Ｆ）

［（１）４点　（２）①１点、②２点、③２点、④１点］

（１）

カイ２乗分布は$\alpha = n/2$、$\beta = 1/2$のガンマ分布である。ガンマ分布の積率母関数は、

$$M_Y(t) = \int_0^\infty e^{ty} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta y} (\beta y)^{\alpha-1} dy = \int_0^\infty \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} e^{-(\beta-t)y} (\beta y)^{\alpha-1} dy$$

$$= \frac{\beta}{\beta - t} \cdot \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha-1} \int_0^\infty \frac{\beta - t}{\Gamma(\alpha)} e^{-(\beta-t)y} ((\beta - t)y)^{\alpha-1} dy = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha}$$

ここで、１保険期間中の事故発生件数Nの積率母関数は、１保険期間中の事故発生確率をpとすると、

$M_N = \sum_{n=0}^{1} e^{tn} p^n (1-p)^{1-n} = (1-p) + pe^t$　と表すことができる。

よって、$M_X(t) = M_n(\log M_Y(t))$となるので、

$$M_X(t) = pe^{\log\left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha}} + (1-p) = p\left(1 - \frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha} + (1-p)$$

$$P(X) = \frac{E(Xe^{hX})}{E(e^{hX})} = \frac{M'_X(h)}{M_X(h)} = \frac{p\dfrac{\alpha}{\beta}\left(1 - \dfrac{h}{\beta}\right)^{-\alpha-1}}{p\left(1 - \dfrac{h}{\beta}\right)^{-\alpha} + (1-p)}$$

これに、$\alpha = n/2$、$\beta = 1/2$、$h = 0.2$、$n = 3$、 $p = 0.1$を代入すると、$P(X) = 0.96$となる。

（２）

①　確率を Pr で表すものとすると、分布関数の定義より、

$$F_{W_{Z,h}}\left(\Phi^{-1}(x)\right) = \Pr\left(W_{Z,h} \le \Phi^{-1}(x)\right) = \Pr\left(\Phi\left(W_{Z,h}\right) \le x\right) = F_{\Phi\left(W_{Z,h}\right)}(x)$$

②　①より、求める保険料は$P_{Wang}(X) = E\left(\Phi\left(W_{Z,h}\right)\right)$である。ここで、$W_{Z,h}$の分布関数は

$F_{W_{Z,h}}(x) = \Phi\left(\Phi^{-1}(\Phi(x)) - h\right) = \Phi(x-h)$であるから、確率密度関数は$f_{W_{Z,h}}(x) = \varphi(x-h)$である。

よって、求める保険料は、

$$P_{Wang}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\varphi(x-h)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(h+x)\varphi(x)dx$$

これは、問題文中で与えられた等式において$c=h$、$d=1$としたものに等しいため、$P_{Wang}(X)=\Phi\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)$

ここで、$h=\frac{1}{\sqrt{2}}$であるから、$P_{Wang}(X)=\Phi\left(\frac{1}{2}\right)=\Phi(0.5)$

この値は、問題文中の表より、$P_{Wang}(X)=1-0.309=0.69$となる。

③　テキスト 7-6 参照。

④　確率変数Xが一様分布$U(0,1)$に従うとき、$Y=13X+8$とおくと、Yは一様分布$U(8,21)$に従う。ここで、③よりワンの保険料算出原理は平行移動不変性ならびに正の同次性を満たすので、求める保険料は、

$$P_{Wang}(Y)=P_{Wang}(13X+8)=13P_{Wang}(X)+8$$

となる。②の結果より、

$$P_{Wang}(Y)=13\times\Phi(0.5)+8$$

②の表より、

$$P_{Wang}(Y)=13\times(1-0.309)+8=17.0$$

Ⅱ.

（１）①（**B**）②（**K**）③（**P**）(①～③は完答)　（２）(**C**)　（３）(**H**)

［(１)　３点　（２）　３点　（３）　４点］

（１）

$$\int_0^x \frac{du}{e(u)} = \int_0^x \frac{1-F(u)}{\int_u^{x_F} (1-F(s))ds} du$$

$$= \int_0^x \frac{d}{du} \left\{ -\log \int_u^{x_F} (1-F(s))ds \right\} du$$

$$= \left[-\log \int_u^{x_F} (1-F(s))ds \right]_{u=0}^{u=x}$$

$$= \log \int_0^{x_F} (1-F(s))ds - \log \int_x^{x_F} (1-F(s))ds$$

$= \log e(0) - \log\{(1-F(x))e(x)\}$　∵問題文中の式 $e(x) = \dfrac{\int_x^{x_F} (1-F(s))ds}{1-F(x)}$　$(0 \le x < x_F)$ より。

$$= \log\left(\frac{e(0)}{e(x)}\right) - \log(1-F(x))$$

従って、

$$\log(1-F(x)) = \log\left(\frac{e(0)}{e(x)}\right) - \int_0^x \frac{du}{e(u)}$$

$$= \log\left(\frac{e(0)}{e(x)}\right) - \log\exp\left(\int_0^x \frac{du}{e(u)}\right)$$

$$= \log\left(\frac{e(0)}{e(x)}\exp\left(-\int_0^x \frac{du}{e(u)}\right)\right)$$

であるから、

$$F(x) = 1 - \frac{e(0)}{e(x)}\exp\left(-\int_0^x \frac{du}{e(u)}\right)$$

が成り立つ。

（２）

$\xi = 0$ の場合、閾値 u を超えるデータのみを抽出したものを $\tilde{x}_j$ （$j = 1, \cdots, N_u$、すなわち閾値 u を超えるデータ数を N_u 個とする）としたとき、対数尤度関数は、

$$l(\xi, \beta) = \sum_{j=1}^{N_u} \log g_{\xi,\beta}(\tilde{x}_j - u) = -N_u \log\beta - \sum_{j=1}^{N_u} \frac{\tilde{x}_j - u}{\beta}$$

となり、これが最大とする β を求めればよいので、$\dfrac{\partial}{\partial\beta} l(\xi, \beta) = 0$ を解くと、

$$0=-N_u\frac{1}{\beta}+\sum_{j=1}^{N_u}\frac{\tilde{x}_j-u}{\beta^2}$$

$$\Rightarrow\beta=\sum_{j=1}^{N_u}\frac{\tilde{x}_j-u}{N_u}$$

となる。

与えられたデータからこれを計算すると、

$$\beta=\frac{75\times50+33\times150+19\times250+5\times350+7\times450+2\times550+1\times650+1\times750}{75+33+19+5+7+2+1+1}$$

$$=\frac{20{,}850}{143}=146$$

（３）

超過分布関数の定義式を変形すると、

$1-F(y+u)=(1-F(u))(1-F_u(y))$

と書けるので、これが 0.1%に等しくなる $x=y+u$ を求めればよい。

$1-F(500)$ の値を実績データから全体の発生件数と損害額 500 超の発生件数の比として推定すると、

$$1-F(500)=\frac{143}{357+143}=0.286=0.3$$

であり、

$$1-F_u(y)=\exp\left(\frac{-y}{\beta}\right)=\exp\left(\frac{-y}{145}\right)$$

と合わせると、99.9 パーセンタイルに対応する $y(=x-u)$ は、

$$0.3\times\exp\left(\frac{-y}{145}\right)=0.1\%$$

$$\Rightarrow\exp\left(\frac{-y}{145}\right)=\frac{1}{300}$$

$$\Rightarrow y=-145\times\log\left(\frac{1}{300}\right)=145\times(\log3+2\times\log2+2\times\log5)=827$$

よって、

$x=y+u=1{,}327$