数学（問題）

〔問題１から問題３を通じて必要であれば（付表）に記載された数値を用いなさい。〕

問題１． 次の（１）～（１２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

各５点（計６０点）

（１）ある工場が 2017 年11月1日午前0 時から稼働し始め、2017 年11月 30 日 24 時までの期間に1台の機械作成の依頼を受けるものとする。いつ依頼を受けるかは一様分布に従うものとする。機械の作成は依頼を受けてから直ちに開始するものとし、依頼から作成完了までは依頼を受けた時点から 72 時間、96 時間、120 時間のいずれかであり、それぞれの確率は$\frac{1}{3}$であるものとする。

また、この工場は休業時間なく稼働し続けるものとする。このとき、2017 年11月 30 日 24 時時点で機械の作成が完了していない確率は$\boxed{}$である。

（Ａ）$\frac{1}{18}$　（Ｂ）$\frac{1}{15}$　（Ｃ）$\frac{7}{90}$　（Ｄ）$\frac{4}{45}$　（Ｅ）$\frac{1}{10}$

（Ｆ）$\frac{1}{9}$　（Ｇ）$\frac{11}{90}$　（Ｈ）$\frac{2}{15}$　（Ｉ）$\frac{13}{90}$　（Ｊ）$\frac{7}{45}$

（２）(X,Y)平面おいて、時間が1進むと上下左右のいずれかに、それぞれ等しい確率で1だけ移動する点Pを考える。時点$t=0$で点Pは原点$(0,0)$にいるとし、$t=2k$（kは自然数）で原点$(0,0)$にいる確率を考える。

$k=2$で点Pが原点$(0,0)$にいる確率は$\boxed{\quad ① \quad}$である。また、点Pが原点$(0,0)$にいる確率が 0.07 未満となるkは$\boxed{\quad ② \quad}$以上である。なお、計算にあたっては次の等式を用いてよい。

$$\sum_{x=0}^{y} \binom{y}{x}^2 = \binom{2y}{y}$$

［①の選択肢］

（Ａ）$\frac{1}{32}$　（Ｂ）$\frac{3}{64}$　（Ｃ）$\frac{1}{16}$　（Ｄ）$\frac{5}{64}$　（Ｅ）$\frac{3}{32}$

（Ｆ）$\frac{7}{64}$　（Ｇ）$\frac{1}{8}$　（Ｈ）$\frac{9}{64}$　（Ｉ）$\frac{5}{32}$　（Ｊ）$\frac{11}{64}$

［②の選択肢］

（A） 2　（B） 3　（C） 4　（D） 5　（E） 6

（F） 7　（G） 8　（H） 9　（I） 10　（J） 11

（３）座標平面上の３点 $O(0,0), A(a,0), B(0,b), (a>0, b>0)$ を頂点とする直角三角形のつくる領域を D とする。領域 D 内で一様に分布する点 P の x 座標を確率変数 X 、y 座標を確率変数 Y で表すとき、共分散 $C(X,Y)$ は［　①　］であり、相関係数 $R(X,Y)$ は［　②　］である。

［①の選択肢］

（A） $-ab$　（B） $-\dfrac{ab}{2}$　（C） $-\dfrac{ab}{3}$　（D） $-\dfrac{ab}{4}$

（E） $-\dfrac{ab}{9}$　（F） $-\dfrac{ab}{12}$　（G） $-\dfrac{ab}{18}$　（H） $-\dfrac{ab}{36}$

［②の選択肢］

（A） -1　（B） $-\dfrac{1}{2}$　（C） $-\dfrac{1}{3}$　（D） $-\dfrac{1}{4}$

（E） $-\dfrac{1}{9}$　（F） $-\dfrac{1}{12}$　（G） $-\dfrac{1}{18}$　（H） $-\dfrac{1}{36}$

（4）A さんと B さんがサイコロと壷に入った球を用いた次のようなゲームを行う。なお、サイコロは正六面体の各面に1から6までの目がふられているものとし、それぞれの目が出る確率は等しいものとする。また、壷には1,2,3の番号が書かれた球がそれぞれ1つずつ入っており、それぞれの球を取り出す確率は等しいものとする。

・A さんは、1回のゲームで壷から無作為に球を1つ取り出し、その球に書かれた番号の回数だけサイコロを投げ、出た目の合計を得点とする。なお、1回のゲームが終わるたびに、A さんが取り出した球は壷に戻すものとする。

・B さんは、1回のゲームでサイコロを1回投げ、出た目の2倍を得点とする。

中心極限定理を用いた場合、A さんの得点と B さんの得点の差の平均値が0.7点以下となる確率が95%以上となるために最低限必要なゲーム数に最も近い値は $\boxed{}$ 回である。

（A）193　（B）196　（C）199　（D）202　（E）205

（F）208　（G）211　（H）214　（I）217　（J）220

（5）ある会社の1日の苦情件数を10日間調査したところ、次のとおりであった。

（単位：件）

3 , 0 , 0 , 1 , 4 , 0 , 2 , 1 , 0 , 2

苦情件数はポアソン分布に従うことが分かっているとき、1日あたりの平均苦情件数を近似法により区間推定した場合の信頼区間の幅に最も近い値は $\boxed{①}$ 、精密法により区間推定した場合の信頼区間の幅に最も近い値は $\boxed{②}$ となる。なお、信頼係数は95%とする。

（A）1.1323　（B）1.1862　（C）1.2543　（D）1.2979　（E）1.3308

（F）1.3595　（G）1.4134　（H）1.4678　（I）1.5308　（J）1.5637

（6）ある農園のリンゴの重さの平均は$100g$であったが、品種改良により平均が$105g$になったことを15個の標本を用いて検定したい。リンゴの重さは正規分布に従うものとし、その標準偏差は品種改良前後ともに$5g$であるとする。このとき、第1種の誤りの起こる確率を5%とした場合における検出力（第2種の誤りが起こらない確率）に最も近いものは$\boxed{}$である。

（A）92.63%　（B）93.39%　（C）94.15%　（D）94.91%　（E）95.67%

（F）96.43%　（G）97.19%　（H）97.95%　（I）98.71%　（J）99.47%

（7）ある製品についてA成分の含有率は90%以上であることが必要とされている。そこで、納入された各製品について定量分析を行い、A成分の含有率が90%以上の製品は確率97%で合格となり、含有率87%以下の製品は99%以上の確率で不合格となるようにしたい。A成分の含有率の分析値には平均0、分散$\sigma^2 = (2.0\%)^2$の正規分布に従う誤差があることがわかっているとき、分析の回数を最も少なくするためには、1つの製品について$\boxed{\quad ① \quad}$回分析し、得られた分析値の平均が$\boxed{\quad ② \quad}$以下であればその製品を不合格とすれば良い。

[①の選択肢]

（A）3　（B）4　（C）5　（D）6　（E）7

（F）8　（G）9　（H）10　（I）11　（J）12

[②の選択肢]

（A）87.83%　（B）88.12%　（C）88.32%　（D）88.46%　（E）88.58%

（F）88.67%　（G）88.75%　（H）88.81%　（I）88.87%　（J）88.91%

（８）ある自治体において、年齢を18歳～39歳、40 歳～64 歳、65歳以上に分けて、A政党の支持率を調べたところ下表のとおりであった。比例抽出法によりA政党の支持率を推定した場合、その推定値に最も近い値は ① であり、推定値の標準誤差に最も近い値は ② となる。

年齢	人口（万人）	標本の大きさ（人）	A政党の支持率
18歳～39歳	350	700	50%
40歳～64歳	450	900	40%
65歳以上	300	600	35%

[①の選択肢]

（A） 41.67%　（B） 41.82%　（C） 41.97%　（D） 42.12%

（E） 42.27%　（F） 42.42%　（G） 42.58%　（H） 42.73%

[②の選択肢]

（A） 0.692%　（B） 0.816%　（C） 0.925%　（D） 1.044%

（E） 1.144%　（F） 1.254%　（G） 1.379%　（H） 1.501%

（９） (x, y)のデータが下表のとおり与えられている。このデータからプロビット・モデル $y = F(\alpha + \beta x)$（F は標準正規分布の分布関数）を用いた回帰式を求めると、α の推定値に最も近い数値は ① であり、β の推定値に最も近い数値は ② である。

x	1.4	1.8	2.9	4.3	5.3
y	10%	24%	52%	91%	92%

（A） −4.25　（B） −2.07　（C） −1.40　（D） −0.71　（E） −0.54

（F） 0.22　（G） 0.71　（H） 1.40　（I） 2.07　（J） 4.25

（１０）ある学校について、以下のことが分かっている。

- この学校は３学年制であり、t 年４月初の在校生は1年生、２年生、３年生それぞれ100人、卒業生は０人である。
- ３月末に1年生だった人は、同年４月初に95%の確率で２年生になり、5%の確率で1年生のままである。
- ３月末に２年生だった人は、同年４月初に90%の確率で３年生になり、10%の確率で２年生のままである。
- ３月末に３年生だった人は、同年４月初に85%の確率で卒業し、15%の確率で３年生のままである。
- 卒業生は、卒業生のままである。
- 毎年４月初に新入生が100人入学する（1年生が100人増える）
- 上記以外に学生の異動はない。

このとき、$t+3$ 年４月初に新入生が入学した直後の各学年の人数に最も近い数値はそれぞれ、1年生 : $\boxed{\quad①\quad}$ 人、２年生 : $\boxed{\quad②\quad}$ 人、３年生 : $\boxed{\quad③\quad}$ 人である。なお、計算過程においては、小数点以下は四捨五入しないこととする。

［①の選択肢］

（A）105　（B）106　（C）107　（D）108

（E）109　（F）110　（G）111　（H）112

［②の選択肢］

（A）109　（B）110　（C）111　（D）112

（E）113　（F）114　（G）115　（H）116

［③の選択肢］

（A）113　（B）114　（C）115　（D）116

（E）117　（F）118　（G）119　（H）120

（１１） $AR(1)$ モデル $Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ に従っていると考えられる $\{y_t\}_{t=1}^{6}$ が下表のとおり与えられている。このとき、最小二乗法によりパラメータ ϕ_0, ϕ_1 を推定する場合、推定値 $\hat{\phi}_0$ に最も近い数値は $\boxed{\quad ① \quad}$ であり、推定値 $\hat{\phi}_1$ に最も近い数値は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。また、標本自己相関からパラメータ ϕ_0, ϕ_1 を推定する場合、推定値 $\hat{\phi}_0$ に最も近い数値は $\boxed{\quad ③ \quad}$ であり、推定値 $\hat{\phi}_1$ に最も近い数値は $\boxed{\quad ④ \quad}$ である。

t	1	2	3	4	5	6
y_t	2	2	2	3	3	3

[①、③の選択肢]

（A） 0.90　（B） 0.95　（C） 1.00　（D） 1.05

（E） 1.10　（F） 1.15　（G） 1.20　（H） 1.25

[②、④の選択肢]

（A） 0.50　（B） 0.53　（C） 0.56　（D） 0.60

（E） 0.64　（F） 0.67　（G） 0.70　（H） 0.72

（１２）ある遊園地の毎月の来場者数は独立で、各月の大人と子どもの来場者数は互いに独立な以下の正規分布に従っているとする。

大人　：平均80万人、標準偏差8万人

子ども：平均40万人、標準偏差5万人

累積密度関数の逆関数を用いる方法で、2か月間の来場者数のシミュレーションを行う。

今、[0,1]区間の一様分布に従う確率変数の実現値として、次の値を得た。

0.872　,　0.127　,　0.224　,　0.574

なお、1～2つ目の実現値は大人の各月の来場者数、3～4つ目の実現値は子どもの各月の来場者数のシミュレーションに用いるものとする。

大人の入場料が5,000円、子どもの入場料が3,000円であるとき、シミュレーション結果として2か月間の大人の総入場料に最も近い値は $\boxed{\quad ① \quad}$ 万円であり、2か月間の子どもの総入場料に最も近い値は $\boxed{\quad ② \quad}$ 万円である。

[①の選択肢]

（A） 708,744	（B） 739,296	（C） 777,112	（D） 799,808
（E） 825,643	（F） 839,960	（G） 854,357	（H） 890,872

[②の選択肢]

（A） 205,779	（B） 217,236	（C） 231,417	（D） 239,928
（E） 250,415	（F） 251,970	（G） 259,585	（H） 274,077

問題２． 次の（１）～（３）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（２０点）

（１）確率変数 X,Y が２変量正規分布 $N(\mu_1,\mu_2,{\sigma_1}^2,{\sigma_2}^2,\rho)$ に従うとき、X の Y に対する回帰関数 $E(X\,|\,Y=y)$ を求めたい。

まず、Y の確率密度関数を求める。

X,Y の結合確率密度関数は $h(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{Q(x,y)}{2}}$ である。

ただし、

$$Q(x,y)=\frac{1}{1-\rho^2}\left\{\frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{1-\rho^2}\{\boxed{\text{①}}\}^2+\boxed{\text{②}}$$

と変形できるから、Y の確率密度関数は

$$g(y)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x,y)dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left(-\frac{1}{2}\times\boxed{\text{②}}\right)\times\underline{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\{\boxed{\text{①}}\}^2\right)dx}$$

である。

ここで、この下線部の積分の値は $\boxed{\text{③}}$ に等しいことがわかるので、Y は正規分布 $N\left(\boxed{\text{④}},\boxed{\text{⑤}}\right)$ に従うことがわかる。

次に、X,Y の結合確率密度関数は $h(x,y)$、Y の確率密度関数は $g(y)$ であるから、条件 $Y=y$ のもとでの X の確率密度関数は

$$f(x\,|\,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\{\boxed{\text{⑥}}\}^2\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\times\boxed{\text{⑦}}}\{x-(\boxed{\text{⑧}})\}^2\right)$$

と変形される。

よって、$f(x\,|\,y)$ は x の関数とみたとき、正規分布 $N\left(\boxed{\text{⑧}},\boxed{\text{⑦}}\right)$ の確率密度関数とみなせるから、求める回帰関数は

$$E(X\,|\,Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x\,|\,y)dx=\boxed{\text{⑨}}$$

となることがわかる。

（２）確率変数 X, Y が２変量正規分布 $N(\mu_1, \mu_2, {\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2, \rho)$ に従うとき、確率変数

$Z = \dfrac{4}{1-\rho^2}\left\{\dfrac{(X-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2} - 2\rho\dfrac{(X-\mu_1)(Y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \dfrac{(Y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right\}$ の分布を求めたい。

確率変数 Z の積率母関数は

$$\phi(\theta) = E\left(e^{\theta Z}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\times\exp\left(-\frac{\boxed{⑩}}{\boxed{⑪}}\left\{\frac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right\}\right)dxdy$$

である。

ここで、θ の値が 0 の近傍にあるとき、$u = \dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1} \times \boxed{⑫}$, $v = \dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2} \times \boxed{⑫}$ なる

変数変換をすれば、

$$\phi(\theta) = \boxed{⑬} \times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2 - 2\rho uv + v^2)\right)dudv$$

と変形される。

ここで、この積分の値は $\boxed{⑭}$ に等しいことがわかるので、$\phi(\theta) = \boxed{⑮}$ となる。

よって、確率変数 Z は平均 $\boxed{⑯}$ の指数分布に従うことがわかる。

（３）２変量正規分布 $N(0,0,1,1,\rho)$ に従う確率ベクトル (X, Y) の積率母関数を計算し、これを用いて相関係数 $R(X, Y)$ を求めたい。

確率ベクトル (X, Y) の積率母関数は

$$\psi(\theta_1, \theta_2) = E\left(e^{\theta_1 X + \theta_2 Y}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{Q_0(x,y)}{2}}dxdy$$

である。ただし、$Q_0(x, y) = A(x, y) + B(y) + C$ とすると、

$A(x, y) = \dfrac{1}{1-\rho^2}\left\{x - \rho y - (1-\rho^2)\theta_1\right\}^2, B(y) = (y - \theta_2 - \rho\theta_1)^2, C = \boxed{⑰}$ となる。

ゆえに、$\psi(\theta_1, \theta_2) = e^{-\frac{C}{2}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{B(y)}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{A(x,y)}{2}}dx\right\}dy$ と変形される。

ここで、$e^{-\frac{A(x,y)}{2}}$ を x の関数として考えると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{A(x,y)}{2}} dx = \boxed{⑱}$$

となることがわかる。

同様にして、$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{B(y)}{2}} dy = \boxed{⑲}$ となることがわかる。

よって、$\psi(\theta_1, \theta_2) = \boxed{⑳}$ を得る。

これより、X の積率母関数は $\boxed{㉑}$ となることがわかり、X の期待値、分散は

$E(X) = \boxed{㉒}$,$V(X) = \boxed{㉓}$ となる。

同様にして、Y の期待値、分散は $E(Y) = \boxed{㉒}$,$V(Y) = \boxed{㉓}$ となる。

ここで、$\dfrac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\psi(\theta_1, \theta_2) = \boxed{⑳} \times \left\{ \boxed{㉔} \right\}$ より、$E(XY) = \boxed{㉕}$ となることがわかる。

ゆえに、求める相関係数は、$R(X,Y) = \boxed{㉖}$ である。

［①、②、④～⑨の選択肢］

（A） μ_1　（B） μ_2　（C） σ_1

（D） σ_2　（E） ${\sigma_1}^2$　（F） ${\sigma_2}^2$

（G） $\rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}$　（H） $\rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$　（I） $\sqrt{1-\rho^2}\,\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}$

（J） $\sqrt{1-\rho^2}\,\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$　（K） ${\sigma_1}^2(1-\rho^2)$　（L） ${\sigma_2}^2(1-\rho^2)$

（M） $\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}$　（N） $\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}$　（O） $\dfrac{(x-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}$

（P） $\dfrac{(y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}$　（Q） $\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}$　（R） $\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}$

（S） $\mu_1+\rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(y-\mu_2)$　（T） $\mu_1+\rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)$　（U） $\mu_2+\rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$

（V） $\mu_2+\rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(x-\mu_1)$　（W） $\mu_1+\sqrt{1-\rho^2}\,\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(y-\mu_2)$　（X） $\mu_1+\sqrt{1-\rho^2}\,\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)$

（Y） $\mu_2+\sqrt{1-\rho^2}\,\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$　（Z） $\mu_2+\sqrt{1-\rho^2}\,\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(x-\mu_1)$

［③、⑪、⑭、⑯、⑱、⑲、㉒、㉓、㉕、㉖の選択肢］

（A）0　（B）$\frac{1}{8}$　（C）$\frac{1}{4}$　（D）$\frac{1}{2}$

（E）1　（F）2　（G）4　（H）8

（I）$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　（J）$\sqrt{\pi}$　（K）$\sqrt{2\pi}$　（L）π

（M）$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$　（N）$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$　（O）ρ　（P）$1-\rho$

（Q）ρ^2　（R）$1-\rho^2$　（S）$2(1-\rho^2)$　（T）$2\pi(1-\rho^2)$

（U）$\sqrt{1-\rho^2}$　（V）$2\sqrt{1-\rho^2}$　（W）$\frac{\pi\sqrt{1-\rho^2}}{2}$　（X）$\pi\sqrt{1-\rho^2}$

（Y）$\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}$　（Z）$2\pi\sqrt{1-\rho^2}$

［⑩、⑫、⑬、⑮の選択肢］

（A）2θ　（B）$1-2\theta$　（C）$\frac{1}{2}\theta$　（D）$1-\frac{1}{2}\theta$

（E）4θ　（F）$1-4\theta$　（G）$\frac{1}{4}\theta$　（H）$1-\frac{1}{4}\theta$

（I）8θ　（J）$1-8\theta$　（K）$\frac{1}{8}\theta$　（L）$1-\frac{1}{8}\theta$

（M）$(1-2\theta)^{-1}$　（N）$\left(1-\frac{1}{2}\theta\right)^{-1}$　（O）$(1-4\theta)^{-1}$　（P）$\left(1-\frac{1}{4}\theta\right)^{-1}$

（Q）$(1-8\theta)^{-1}$　（R）$\left(1-\frac{1}{8}\theta\right)^{-1}$　（S）$\sqrt{1-2\theta}$　（T）$\sqrt{1-\frac{1}{2}\theta}$

（U）$\sqrt{1-4\theta}$　（V）$\sqrt{1-\frac{1}{4}\theta}$　（W）$\sqrt{1-8\theta}$　（X）$\sqrt{1-\frac{1}{8}\theta}$

［⑰、⑳、㉑、㉔の選択肢］

（A）θ_1　（B）θ_2　（C）$\frac{1}{2}\left(\theta_1{}^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2{}^2\right)$

（D）$\theta_1{}^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2{}^2$　（E）$-\frac{1}{2}\left(\theta_1{}^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2{}^2\right)$　（F）$-\left(\theta_1{}^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2{}^2\right)$

（G）$\left(\theta_1+\rho\theta_2\right)^2$　（H）$\left(\theta_2+\rho\theta_1\right)^2$　（I）$\left(\theta_1+\rho\theta_2\right)\left(\theta_2+\rho\theta_1\right)$

（J）$\left(\theta_1+\rho\theta_2\right)\left(\theta_2+\rho\theta_1\right)+\rho$　（K）$\left(\theta_1+\rho\theta_2\right)\left(\theta_2+\rho\theta_1\right)+\left(1-\rho\right)$　（L）$e^{\frac{\theta_1{}^2}{2}}$

（M）$e^{\frac{\theta_1{}^2}{2}\rho^2}$　（N）$e^{\frac{\theta_1{}^2}{2}\left(1-\rho^2\right)}$　（O）$e^{-\frac{\theta_1{}^2}{2}}$

（P）$e^{-\frac{\theta_1{}^2}{2}\rho^2}$　（Q）$e^{-\frac{\theta_1{}^2}{2}\left(1-\rho^2\right)}$　（R）$e^{\frac{1}{2}\left(\theta_1{}^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2{}^2\right)}$

（S）$e^{\theta_1{}^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2{}^2}$　（T）$e^{-\frac{1}{2}\left(\theta_1{}^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2{}^2\right)}$　（U）$e^{-\left(\theta_1{}^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2{}^2\right)}$

（V）$e^{\left(\theta_1+\rho\theta_2\right)^2}$　（W）$e^{\left(\theta_2+\rho\theta_1\right)^2}$　（X）$e^{\left(\theta_1+\rho\theta_2\right)\left(\theta_2+\rho\theta_1\right)}$

（Y）$e^{\left(\theta_1+\rho\theta_2\right)\left(\theta_2+\rho\theta_1\right)+\rho}$　（Z）$e^{\left(\theta_1+\rho\theta_2\right)\left(\theta_2+\rho\theta_1\right)+\left(1-\rho\right)}$

問題３． 正規母集団 $A: N(\mu_A, \sigma_A^2), B: N(\mu_B, \sigma_B^2)$ があり、A から大きさ n_A $(n_A \geq 2)$ の標本 $x_1, x_2, \Lambda\ , x_{n_A}$ を、B から大きさ n_B $(n_B \geq 2)$ の標本 $y_1, y_2, \Lambda\ , y_{n_B}$ をすべて互いに独立に抽出する。このとき、次の（１）、（２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。また、各記号の定義は以下のとおりである。

（２０点）

記号の定義

$$\bar{x} = \frac{1}{n_A}\sum_{i=1}^{n_A} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n_B}\sum_{j=1}^{n_B} y_j, \quad s_x^2 = \frac{1}{n_A - 1}\sum_{i=1}^{n_A}\left(x_i - \bar{x}\right)^2, \quad s_y^2 = \frac{1}{n_B - 1}\sum_{j=1}^{n_B}\left(y_j - \bar{y}\right)^2$$

（１）母平均および母分散の推定

Ｉ）μ_A と μ_B がいずれも未知で、σ_A^2 と σ_B^2 はいずれも既知であるが等分散でない場合を考える。大きさ n_A, n_B の標本による結合確率密度関数は、

$$(2\pi\sigma_A^2)^{-\frac{\boxed{\text{①}}}{2}} \times (2\pi\sigma_B^2)^{-\frac{\boxed{\text{②}}}{2}} \times \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_A^2} \times \sum_{i=1}^{n_A}\left(x_i - \boxed{\quad\text{③}\quad}\right)^2 - \frac{1}{2\sigma_B^2} \times \sum_{j=1}^{n_B}\left(y_j - \boxed{\quad\text{④}\quad}\right)^2 \right\}$$

となる。この結合確率密度関数の尤度関数を $L\left(\mu_A, \mu_B\right)$ とおくと、

$$\frac{\partial}{\partial \mu_A}\log L\left(\mu_A, \mu_B\right) = \frac{n_A}{\sigma_A^2}\left\{\boxed{\quad\text{⑤}\quad}\right\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_B}\log L\left(\mu_A, \mu_B\right) = \frac{n_B}{\sigma_B^2}\left\{\boxed{\quad\text{⑥}\quad}\right\} = 0$$

より、母平均の最尤推定量を求めることができる。

II）μ_A と μ_B がいずれも未知で、σ_A^2 と σ_B^2 も未知であるが $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ であることが分かっている場合を考える。$\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$ として、結合確率密度関数の尤度関数を $L\left(\mu_A, \mu_B, \sigma^2\right)$ とおくと、

$$\frac{\partial}{\partial \mu_A}\log L\left(\mu_A, \mu_B, \sigma^2\right) = \frac{n_A}{\sigma^2}\left\{\boxed{\quad\text{⑤}\quad}\right\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_B}\log L\left(\mu_A, \mu_B, \sigma^2\right) = \frac{n_B}{\sigma^2}\left\{\boxed{\quad\text{⑥}\quad}\right\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\left(\sigma^2\right)}\log L\left(\mu_A, \mu_B, \sigma^2\right) =$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\boxed{\quad\text{⑦}\quad} - \frac{1}{\boxed{\quad\text{⑧}\quad}}\left\{\sum_{i=1}^{n_A}\left(x_i - \boxed{\quad\text{③}\quad}\right)^2 + \sum_{j=1}^{n_B}\left(y_j - \boxed{\quad\text{④}\quad}\right)^2\right\}\right] = 0$$

より、σ^2 の最尤推定量 $\hat{\sigma}_L^2$ は

$$\hat{\sigma}_L^2 = \frac{1}{\boxed{⑦}}\left\{\sum_{i=1}^{n_A}\left(x_i - \boxed{⑨}\right)^2 + \sum_{j=1}^{n_B}\left(y_j - \boxed{⑩}\right)^2\right\}$$

となる。このとき、$E\left(\hat{\sigma}_L^2\right) = \frac{\boxed{⑪}}{\boxed{⑫}} \times \sigma^2$ のため、不偏推定量 $\hat{\sigma}_U^2$ は $\hat{\sigma}_U^2 = \frac{\boxed{⑫}}{\boxed{⑪}} \times \hat{\sigma}_L^2$ と表わすことができる。さらに、不偏推定量 $\hat{\sigma}_U^2$ の分散は $V\left(\hat{\sigma}_U^2\right) = \frac{\boxed{⑬}}{\boxed{⑪}}$ となる。また、検定統計量

$$t_1 = \frac{\boxed{⑨} - \boxed{⑩} - \left(\mu_A - \mu_B\right)}{\hat{\sigma}_U\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}}$$ は自由度 $\boxed{⑭}$ の t 分布に従うことが分かる。

（2）標本平均の差の検定

母分散 σ_A^2, σ_B^2 が未知であり、等しいと限らない場合はどのように工夫しても σ_A^2 および σ_B^2 によらない検定統計量を作ることはできない。しかし近似的に t 分布に従う検定統計量を作るウェルチの近似法が知られている。

$$u = \frac{\boxed{⑨} - \boxed{⑩} - \left(\mu_A - \mu_B\right)}{\sqrt{\boxed{⑮}}}$$

は標準正規分布に従う。ここで検定統計量

$$t_2 = \frac{\boxed{⑨} - \boxed{⑩} - \left(\mu_A - \mu_B\right)}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_A} + \frac{s_y^2}{n_B}}} = \frac{\dfrac{\boxed{⑨} - \boxed{⑩} - \left(\mu_A - \mu_B\right)}{\sqrt{\boxed{⑮}}}}{\sqrt{\dfrac{\boxed{⑯}}{\boxed{⑮}} \times \dfrac{\sum_{i=1}^{n_A}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{\sigma_A^2} + \dfrac{\boxed{⑰}}{\boxed{⑮}} \times \dfrac{\sum_{j=1}^{n_B}\left(y_j - \bar{y}\right)^2}{\sigma_B^2}}}$$

を考える。このとき

$$w = \frac{\boxed{⑯}}{\boxed{⑮}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n_A}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{\sigma_A^2} + \frac{\boxed{⑰}}{\boxed{⑮}} \times \frac{\sum_{j=1}^{n_B}\left(y_j - \bar{y}\right)^2}{\sigma_B^2}$$

とおくと、w は u と独立で、w の母集団の分布から計算した期待値 $E_1\left(w\right)$ および分散 $V_1\left(w\right)$ は

$E_1(w) = \boxed{⑱}$、$V_1(w) = \dfrac{\boxed{⑲}}{\left(\boxed{⑮}\right)^2}$ となる。

次に w の分布をガンマ分布 $\Gamma\left(\frac{1}{2}f, 2g\right)$ で近似することを考える。$\Gamma\left(\frac{1}{2}f, 2g\right)$ の確率密度関数を

$h(w)$ とすると、$h(w)=\dfrac{1}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}f\right)(2g)^{\frac{1}{2}f}}w^{\frac{1}{2}f-1}e^{-\frac{w}{2g}}$ $,w>0$ $(f>0,g>0)$ である。w のガンマ分布から計算した期待値 $E_2(w)$ および分散 $V_2(w)$ は $E_2(w)=\boxed{\text{⑳}}$、$V_2(w)=\boxed{\text{㉑}}$ となる。

$E_1(w)=E_2(w)$ かつ $V_1(w)=V_2(w)$ となるような f を求めると、$f=\dfrac{\left(\boxed{\text{⑮}}\right)^2}{\boxed{\text{㉒}}}$ となる。実際、このようにして求めた f および g に対応するガンマ分布 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}f,2g\right)$ は w の分布をよく近似していることが知られている。w が $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}f,2g\right)$ に従うとき $\dfrac{w}{g}$ は $\Gamma\left(\boxed{\text{㉓}},\boxed{\text{㉔}}\right)$、すなわち、自由度 f の χ^2 分布に従う。よって検定統計量 $t_2=u\div\sqrt{\dfrac{w}{fg}}$ は近似的に自由度 f の t 分布に従う。なお、自由度 f において、σ_A^2 および σ_B^2 は未知であるため、実務上はこれを不偏分散 s_x^2 および s_y^2 で置き換えたものを自由度として用いる。

［①、②、⑦、⑪、⑫、⑭の選択肢］

（A） 1　（B） 2　（C） n_A-2　（D） n_A-1

（E） n_A　（F） n_A+1　（G） n_A+2　（H） n_B-2

（I） n_B-1　（J） n_B　（K） n_B+1　（L） n_B+2

（M） n_A+n_B-2　（N） n_A+n_B-1　（O） n_A+n_B　（P） n_A+n_B+1

（Q） n_A+n_B+2　（R） $(n_A-1)(n_B-1)$　（S） $(n_A-1)n_B$　（T） $n_A(n_B-1)$

（U） n_An_B　（V） $(n_A+1)n_B$　（W） $n_A(n_B+1)$　（X） $(n_A+1)(n_B+1)$

［③～⑥、⑨、⑩の選択肢］

（A） 1　（B） 2　（C） μ_A　（D） μ_B

（E） $\bar{x}-\mu_A$　（F） $\bar{x}-\mu_B$　（G） $\bar{x}$　（H） $\bar{x}+\mu_A$

（I） $\bar{x}+\mu_B$　（J） $n_A\bar{x}-\mu_A$　（K） $n_A\bar{x}-\mu_B$　（L） $n_A\bar{x}$

（M） $n_A\bar{x}+\mu_A$　（N） $n_A\bar{x}+\mu_B$　（O） $\bar{y}-\mu_A$　（P） $\bar{y}-\mu_B$

（Q） $\bar{y}$　（R） $\bar{y}+\mu_A$　（S） $\bar{y}+\mu_B$　（T） $n_B\bar{y}-\mu_A$

（U） $n_B\bar{y}-\mu_B$　（V） $n_B\bar{y}$　（W） $n_B\bar{y}+\mu_A$　（X） $n_B\bar{y}+\mu_B$

［⑧、⑬の選択肢］

（A）σ　（B）2σ　（C）3σ　（D）4σ

（E）σ^2　（F）$2\sigma^2$　（G）$3\sigma^2$　（H）$4\sigma^2$

（I）σ^3　（J）$2\sigma^3$　（K）$3\sigma^3$　（L）$4\sigma^3$

（M）σ^4　（N）$2\sigma^4$　（O）$3\sigma^4$　（P）$4\sigma^4$

［⑮～⑲、㉒の選択肢］

（A）0　（B）$\dfrac{1}{2}$　（C）1

（D）2　（E）$\dfrac{\sigma_A^2}{n_A^2}$　（F）$\dfrac{\sigma_A^2}{n_A(n_A-1)}$

（G）$\dfrac{\sigma_A^2}{n_A}$　（H）$\dfrac{\sigma_A^2}{n_A-1}$　（I）$\dfrac{\sigma_B^2}{n_B^2}$

（J）$\dfrac{\sigma_B^2}{n_B(n_B-1)}$　（K）$\dfrac{\sigma_B^2}{n_B}$　（L）$\dfrac{\sigma_B^2}{n_B-1}$

（M）$\dfrac{\sigma_A^2}{n_A^2}+\dfrac{\sigma_B^2}{n_B^2}$　（N）$\dfrac{\sigma_A^2}{n_A(n_A-1)}+\dfrac{\sigma_B^2}{n_B(n_B-1)}$　（O）$\dfrac{\sigma_A^2}{n_A}+\dfrac{\sigma_B^2}{n_B}$

（P）$\dfrac{\sigma_A^2}{n_A-1}+\dfrac{\sigma_B^2}{n_B-1}$　（Q）$\dfrac{\sigma_A^4}{n_A}+\dfrac{\sigma_B^4}{n_B}$　（R）$\dfrac{2\sigma_A^4}{n_A}+\dfrac{2\sigma_B^4}{n_B}$

（S）$\dfrac{\sigma_A^4}{n_A-1}+\dfrac{\sigma_B^4}{n_B-1}$　（T）$\dfrac{2\sigma_A^4}{n_A-1}+\dfrac{2\sigma_B^4}{n_B-1}$　（U）$\dfrac{\sigma_A^4}{n_A^2}+\dfrac{\sigma_B^4}{n_B^2}$

（V）$\dfrac{2\sigma_A^4}{n_A^2}+\dfrac{2\sigma_B^4}{n_B^2}$　（W）$\dfrac{\sigma_A^4}{n_A^2(n_A-1)}+\dfrac{\sigma_B^4}{n_B^2(n_B-1)}$　（X）$\dfrac{2\sigma_A^4}{n_A^2(n_A-1)}+\dfrac{2\sigma_B^4}{n_B^2(n_B-1)}$

（Y）$\dfrac{\sigma_A^4}{n_A(n_A-1)^2}+\dfrac{\sigma_B^4}{n_B(n_B-1)^2}$　（Z）$\dfrac{2\sigma_A^4}{n_A(n_A-1)^2}+\dfrac{2\sigma_B^4}{n_B(n_B-1)^2}$

［⑳、㉑、㉓、㉔の選択肢］

（A） $\frac{1}{2}$　（B） 1　（C） 2　（D） $\frac{1}{2}f$

（E） f　（F） $2f$　（G） $\frac{1}{2}g$　（H） g

（I） $2g$　（J） $\frac{1}{2}fg$　（K） fg　（L） $2fg$

（M） $\frac{1}{2}fg^2$　（N） fg^2　（O） $2fg^2$　（P） $\frac{1}{2}f^2g$

（Q） f^2g　（R） $2f^2g$

(付表)

Ⅰ.標準正規分布表

$P(x > 0.25) = 0.4013$

上側ε点 $u(\varepsilon)$ から確率εを求める表

$u(\varepsilon)\to\varepsilon$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.0*	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1*	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2*	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3*	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4*	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5*	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6*	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7*	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8*	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9*	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0*	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1*	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2*	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3*	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4*	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5*	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6*	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7*	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8*	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9*	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0*	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1*	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2*	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3*	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4*	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5*	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6*	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7*	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8*	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9*	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

$P(x > 1.9600) = 0.025$

確率εから上側ε点 $u(\varepsilon)$ を求める表

$\varepsilon \to u(\varepsilon)$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.00*	∞	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656
0.01*	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749
0.02*	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957
0.03*	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624
0.04*	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546
0.05*	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632
0.06*	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833
0.07*	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118
0.08*	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469
0.09*	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873
0.10*	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319
0.11*	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800
0.12*	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311
0.13*	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848
0.14*	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0450	1.0407
0.15*	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986
0.16*	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581
0.17*	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192
0.18*	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816
0.19*	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452
0.20*	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099
0.21*	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756
0.22*	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421
0.23*	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095
0.24*	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776
0.25*	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464
0.26*	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158
0.27*	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858
0.28*	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563
0.29*	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273
0.30*	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987
0.31*	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705
0.32*	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427
0.33*	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152
0.34*	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880
0.35*	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611
0.36*	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345
0.37*	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081
0.38*	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819
0.39*	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559
0.40*	0.2533	0.2508	0.2482	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301
0.41*	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045
0.42*	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789
0.43*	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535
0.44*	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282
0.45*	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030
0.46*	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778
0.47*	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527
0.48*	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276
0.49*	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025

Ⅱ.自由度φのχ^2分布の上側ε点： $\chi^2_\varphi(\varepsilon)$

φ ＼ε	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010
1	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	0.4549	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349
2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	1.3863	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103
3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	2.3660	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449
4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	3.3567	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767
5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	4.3515	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863
6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	5.3481	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
7	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	6.3458	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	7.3441	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	8.3428	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
10	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	9.3418	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	10.3410	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250
12	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	11.3403	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
13	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	12.3398	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	13.3393	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
15	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	14.3389	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779
16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	15.3385	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999
17	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	16.3382	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
18	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	17.3379	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053
19	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	18.3377	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909
20	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	19.3374	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662
21	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	20.3372	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
22	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	21.3370	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894
23	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	22.3369	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384
24	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	23.3367	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
25	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	24.3366	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141
26	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	25.3365	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417
27	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	26.3363	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629
28	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	27.3362	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782
29	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	28.3361	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879
30	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	29.3360	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922
31	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	30.3359	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914
32	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	31.3359	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858
33	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	32.3358	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755
34	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	33.3357	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609
35	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	34.3356	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421
36	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	35.3356	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192
37	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	36.3355	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925
38	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	37.3355	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621
39	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	38.3354	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281
40	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	39.3353	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907
41	22.9056	25.2145	27.3256	29.9071	40.3353	52.9485	56.9424	60.5606	64.9501
42	23.6501	25.9987	28.1440	30.7654	41.3352	54.0902	58.1240	61.7768	66.2062
43	24.3976	26.7854	28.9647	31.6255	42.3352	55.2302	59.3035	62.9904	67.4593
44	25.1480	27.5746	29.7875	32.4871	43.3352	56.3685	60.4809	64.2015	68.7095
45	25.9013	28.3662	30.6123	33.3504	44.3351	57.5053	61.6562	65.4102	69.9568
46	26.6572	29.1601	31.4390	34.2152	45.3351	58.6405	62.8296	66.6165	71.2014
47	27.4158	29.9562	32.2676	35.0814	46.3350	59.7743	64.0011	67.8206	72.4433
48	28.1770	30.7545	33.0981	35.9491	47.3350	60.9066	65.1708	69.0226	73.6826
49	28.9406	31.5549	33.9303	36.8182	48.3350	62.0375	66.3386	70.2224	74.9195
50	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	49.3349	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539

Ⅲ．分母の自由度n、分子の自由度mのF分布の上側 ε 点： $F_n^m(\varepsilon)$

$\varepsilon =$ 0.100

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.5263	9.0000	9.1618	9.2434	9.2926	9.3255	9.3491	9.3668	9.3805	9.3916
3	5.5383	5.4624	5.3908	5.3426	5.3092	5.2847	5.2662	5.2517	5.2400	5.2304
4	4.5448	4.3246	4.1909	4.1072	4.0506	4.0097	3.9790	3.9549	3.9357	3.9199
5	4.0604	3.7797	3.6195	3.5202	3.4530	3.4045	3.3679	3.3393	3.3163	3.2974
6	3.7759	3.4633	3.2888	3.1808	3.1075	3.0546	3.0145	2.9830	2.9577	2.9369
7	3.5894	3.2574	3.0741	2.9605	2.8833	2.8274	2.7849	2.7516	2.7247	2.7025
8	3.4579	3.1131	2.9238	2.8064	2.7264	2.6683	2.6241	2.5893	2.5612	2.5380
9	3.3603	3.0065	2.8129	2.6927	2.6106	2.5509	2.5053	2.4694	2.4403	2.4163
10	3.2850	2.9245	2.7277	2.6053	2.5216	2.4606	2.4140	2.3772	2.3473	2.3226

$\varepsilon =$ 0.050

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782

$\varepsilon =$ 0.025

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168

$\varepsilon =$ 0.010

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.3992
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.0510
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491

$\varepsilon =$ 0.005

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.5013	199.0000	199.1664	199.2497	199.2996	199.3330	199.3568	199.3746	199.3885	199.3996
3	55.5520	49.7993	47.4672	46.1946	45.3916	44.8385	44.4341	44.1256	43.8824	43.6858
4	31.3328	26.2843	24.2591	23.1545	22.4564	21.9746	21.6217	21.3520	21.1391	20.9667
5	22.7848	18.3138	16.5298	15.5561	14.9396	14.5133	14.2004	13.9610	13.7716	13.6182
6	18.6350	14.5441	12.9166	12.0275	11.4637	11.0730	10.7859	10.5658	10.3915	10.2500
7	16.2356	12.4040	10.8824	10.0505	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138	8.3803
8	14.6882	11.0424	9.5965	8.8051	8.3018	7.9520	7.6941	7.4959	7.3386	7.2106
9	13.6136	10.1067	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411	6.4172
10	12.8265	9.4270	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676	5.8467

Ⅳ．自由度φのt分布の上側ε点：$t_{\varphi}(\varepsilon)$

φ ＼ε	0.100	0.050	0.025
1	3.0777	6.3138	12.7062
2	1.8856	2.9200	4.3027
3	1.6377	2.3534	3.1824
4	1.5332	2.1318	2.7764
5	1.4759	2.0150	2.5706
6	1.4398	1.9432	2.4469
7	1.4149	1.8946	2.3646
8	1.3968	1.8595	2.3060
9	1.3830	1.8331	2.2622
10	1.3722	1.8125	2.2281
11	1.3634	1.7959	2.2010
12	1.3562	1.7823	2.1788
13	1.3502	1.7709	2.1604
14	1.3450	1.7613	2.1448
15	1.3406	1.7531	2.1314
16	1.3368	1.7459	2.1199
17	1.3334	1.7396	2.1098
18	1.3304	1.7341	2.1009
19	1.3277	1.7291	2.0930
20	1.3253	1.7247	2.0860
21	1.3232	1.7207	2.0796
22	1.3212	1.7171	2.0739
23	1.3195	1.7139	2.0687
24	1.3178	1.7109	2.0639
25	1.3163	1.7081	2.0595

Ⅴ．自然対数表

x	$\log x$
1.1	0.0953
1.2	0.1823
1.3	0.2624
1.4	0.3365
1.5	0.4055
1.6	0.4700
1.7	0.5306
1.8	0.5878
1.9	0.6419
2.0	0.6931
2.5	0.9163
3.0	1.0986
3.5	1.2528
4.0	1.3863
4.5	1.5041
5.0	1.6094
5.5	1.7047
6.0	1.7918
6.5	1.8718
7.0	1.9459
7.5	2.0149
8.0	2.0794
8.5	2.1401
9.0	2.1972
9.5	2.2513
10.0	2.3026

Ⅵ．指数関数表

x	$exp(x)$
-0.10	0.9048
-0.09	0.9139
-0.08	0.9231
-0.07	0.9324
-0.06	0.9418
-0.05	0.9512
-0.04	0.9608
-0.03	0.9704
-0.02	0.9802
-0.01	0.9900
0.00	1.0000
0.01	1.0101
0.02	1.0202
0.03	1.0305
0.04	1.0408
0.05	1.0513
0.06	1.0618
0.07	1.0725
0.08	1.0833
0.09	1.0942
0.10	1.1052

以上

数学 (解答例)

問題１

（１）

X ：依頼を受けた時点を表す確率変数

Y ：依頼を受けてから作成完了するまでの時間を表す確率変数

とすると、求める確率は $P(X+Y>30\cdot 24=720)$ である。

$$
\begin{aligned}
P(X+Y>720) &= 1-P(X+Y\le 720)\\
&= 1-\{P(X+Y\le 720 \mid X<600)P(X<600)\\
&\quad +P(X+Y\le 720 \mid 600\le X<624)P(600\le X<624)\\
&\quad +P(X+Y\le 720 \mid 624\le X<648)P(624\le X<648)\\
&\quad +P(X+Y\le 720 \mid 648\le X)P(648\le X)\}\\
&= 1-\left(1\cdot\frac{600}{720}+\frac{2}{3}\cdot\frac{24}{720}+\frac{1}{3}\cdot\frac{24}{720}+0\cdot\frac{72}{720}\right)=\frac{2}{15}
\end{aligned}
$$

よって、解答は（H）

（２）

$k=2$ 、すなわち $t=4$ で点 P が原点 $(0,0)$ にいる事象の数は、

- 右と左の移動それぞれ２回ずつ：$\binom{4}{2}=6$ 通り

- 上と下の移動それぞれ２回ずつ：$\binom{4}{2}=6$ 通り

- 上下左右それぞれ１回ずつの移動：$=4\times 3\times 2\times 1=24$ 通り

であり、総事象は $4^4=256$ 通りであることから、$k=2$ で点 P が原点 $(0,0)$ にいる確率は

$$\frac{6+6+24}{256}=\frac{9}{64}$$

次に $t=2k$ で原点 $(0,0)$ にいる確率を考える。

これは、右に進む回数 n を、上に進む回数を m とすると、原点にいるためには左に進む回数は n 、下に進む回数は m であることから m 、n 、k が満たすべき関係は

$2n+2m=2k \Leftrightarrow n+m=k$ となる。

従って求める確率は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n+m=k}\binom{2k}{n}\binom{2k-n}{n}\binom{2k-2n}{m}\binom{2k-2n-m}{m}\left(\frac{1}{4}\right)^{2k}\\
&=\sum_{n+m=k}\frac{(2k)!}{(n!)^2(m!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2k}\\
&=\sum_{n=0}^{k}\frac{(2k)!}{(n!)^2((k-n)!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2k}\\
&=\frac{(2k)!}{(k!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2k}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}^2\\
&=\frac{(2k)!}{(k!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2k}\binom{2k}{k}\\
&=\frac{((2k)!)^2}{(k!)^4}\left(\frac{1}{4}\right)^{2k}
\end{aligned}
$$

これにkの値を順番に入れていくと、
$k=1$の時

$$\frac{(2!)^2}{(1!)^4}\left(\frac{1}{4}\right)^2=0.250$$

$k=2$の時

$$\frac{(4!)^2}{(2!)^4}\left(\frac{1}{4}\right)^4=0.141$$

$k=3$の時

$$\frac{(6!)^2}{(3!)^4}\left(\frac{1}{4}\right)^6=0.098$$

$k=4$の時

$$\frac{(8!)^2}{(4!)^4}\left(\frac{1}{4}\right)^8=0.075$$

$k=5$の時

$$\frac{(10!)^2}{(5!)^4}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=0.061$$

したがって、点Pが原点$(0,0)$にいる確率が0.07未満となるkは5以上となる。

よって、解答は　①（H）　②（D）

（３）

点Pが面積$\dfrac{ab}{2}$の直角三角形OAB内で一様に分布していることから、確率変数X,Yの同時確率密度関数は$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{ab} & ((x,y)\in D)\\ 0 & ((x,y)\notin D)\end{cases}$となる。

ここで、$D:0\le x\le a, 0\le y\le b\left(1-\dfrac{x}{a}\right)$に注意すると、

$$E(X)=\iint_D xf(x,y)dxdy=\frac{2}{ab}\int_0^a x\left(\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}dy\right)dx=\frac{2}{a}\int_0^a x\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=\frac{a}{3}$$

$$E(X^2)=\iint_D x^2 f(x,y)dxdy=\frac{2}{ab}\int_0^a x^2\left(\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}dy\right)dx=\frac{2}{a}\int_0^a x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=\frac{a^2}{6}$$

よって、$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\dfrac{a^2}{6}-\left(\dfrac{a}{3}\right)^2=\dfrac{a^2}{18}$

また、上式においてaとbを入れ替えることにより、$E(Y)=\dfrac{b}{3},E(Y^2)=\dfrac{b^2}{6},V(Y)=\dfrac{b^2}{18}$

次に、

$$E(XY)=\iint_D xyf(x,y)dxdy=\frac{2}{ab}\int_0^a x\left(\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}ydy\right)dx=\frac{b}{a}\int_0^a x\left(1-\frac{x}{a}\right)^2dx=\frac{b}{a}\int_0^a\left(x-\frac{2x^2}{a}+\frac{x^3}{a^2}\right)dx=\frac{ab}{12}$$

よって、$C(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\dfrac{ab}{12}-\dfrac{a}{3}\cdot\dfrac{b}{3}=-\dfrac{ab}{36}$

また、相関係数$R(X,Y)$は

$$R(X,Y)=\frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=\frac{-\dfrac{ab}{36}}{\dfrac{a}{\sqrt{18}}\cdot\dfrac{b}{\sqrt{18}}}=-\frac{1}{2}$$となる。

よって、解答は　①（H）　②（B）

（4）

i回目のゲームでのAさんの得点を$\mathrm{a_i}$、Bさんの得点を$\mathrm{b_i}$とする。

ここで、i回目のゲームでAさんが壷から取り出した球の番号を$\mathrm{k_i}$ $(\mathrm{k_i}=1,2,3)$とし、

j $(\mathrm{j}=1,\cdots,\mathrm{k_i})$回目に投げたサイコロの出目を$\mathrm{a_{ij}}$とする。このとき、

$$\mathrm{E}[\mathrm{a_{ij}}]=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$$ より、

$$\mathrm{E}[\mathrm{a_i}]=\sum_{n=1}^{3}\mathrm{E}[\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{k_i}}\mathrm{a_{ij}}\,|\,\mathrm{k_i}=n]\cdot P[\mathrm{k_i}=n]$$

$$=\frac{1}{3}(\mathrm{E}[\mathrm{a_{i1}}]+\mathrm{E}[\mathrm{a_{i1}}+\mathrm{a_{i2}}]+\mathrm{E}[\mathrm{a_{i1}}+\mathrm{a_{i2}}+\mathrm{a_{i3}}])=\frac{1}{3}\times6\times\frac{7}{2}=7$$

$$\mathrm{E}[\mathrm{b_i}]=\frac{1}{6}(2+4+6+8+10+12)=7$$

また、

$$\mathrm{E}[\mathrm{a_{ij}^2}]=\frac{1}{6}(1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)=\frac{91}{6}$$ より、

$$\mathrm{E}[\mathrm{a_i^2}]=\sum_{n=1}^{3}\mathrm{E}[\,(\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{k_i}}\mathrm{a_{ij}})^2\,|\,\mathrm{k_i}=n]\cdot P[\mathrm{k_i}=n]$$

$$=\frac{1}{3}\{\mathrm{E}[\mathrm{a_{i1}^2}]+\mathrm{E}[(\mathrm{a_{i1}}+\mathrm{a_{i2}})^2]+\mathrm{E}[(\mathrm{a_{i1}}+\mathrm{a_{i2}}+\mathrm{a_{i3}})^2]\}$$

$$=\frac{1}{3}\{\mathrm{E}[\mathrm{a_{i1}^2}]+(\mathrm{E}[\mathrm{a_{i1}^2}]+2\mathrm{E}[\mathrm{a_{i1}}]\mathrm{E}[\mathrm{a_{i2}}]+\mathrm{E}[\mathrm{a_{i2}^2}])$$

$$+(\mathrm{E}[\mathrm{a_{i1}^2}]+\mathrm{E}[\mathrm{a_{i2}^2}]+\mathrm{E}[\mathrm{a_{i3}^2}]+2\mathrm{E}[\mathrm{a_{i1}}]\mathrm{E}[\mathrm{a_{i2}}]+2\mathrm{E}[\mathrm{a_{i1}}]\mathrm{E}[\mathrm{a_{i3}}]+2\mathrm{E}[\mathrm{a_{i2}}]\mathrm{E}[\mathrm{a_{i3}}])\}$$

$$=\frac{1}{3}(6\times\frac{91}{6}+2\times4\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2})=63$$

$$\mathrm{E}[\mathrm{b_i^2}]=\frac{1}{6}(2^2+4^2+6^2+8^2+10^2+12^2)=\frac{182}{3}$$

これより、$\mathrm{X_i}=a_\mathrm{i}-b_\mathrm{i}$とおくと、

$$\mathrm{E}[\mathrm{X_i}]=\mathrm{E}[a_\mathrm{i}-b_\mathrm{i}]=\mathrm{E}[a_\mathrm{i}]-\mathrm{E}[b_\mathrm{i}]=7-7=0$$

$$\mathrm{V}[\mathrm{X_i}]=\mathrm{E}[\mathrm{X_i^2}]-\mathrm{E}[\mathrm{X_i}]^2=\mathrm{E}[(a_\mathrm{i}-b_\mathrm{i})^2]-0^2=\mathrm{E}[a_\mathrm{i}^2]-2\mathrm{E}[a_\mathrm{i}]\mathrm{E}[b_\mathrm{i}]+\mathrm{E}[b_\mathrm{i}^2]=63-2\times7\times7+\frac{182}{3}=\frac{77}{3}$$

中心極限定理より、$\overline{\mathrm{X}}=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$は、平均$0$、分散$\dfrac{77}{3n}$の正規分布に従う。

これより、与えられた条件から

$$P[|\overline{X}|\le0.7]\ge0.95$$

$P[\frac{\left|\overline{X}\right|-0}{\sqrt{77/(3n)}} \leq \frac{0.7-0}{\sqrt{77/(3n)}}] \geq 0.95$ より、

$\frac{0.7}{\sqrt{77/(3n)}} \geq 1.96$　これを解いて、$n \geq 201.23$

最低限必要な回数は202回となる。

よって、解答は（D）

（5）

＜近似法による区間推定＞

標本数 $n=10$、標本平均 $\bar{x}=\frac{13}{10}$＝1.3　より

信頼区間の上限は、$\bar{x}+u(\varepsilon/2)\cdot\sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}=1.3+1.96\times\sqrt{\frac{1.3}{10}}=2.0067$

信頼区間の下限は、$\bar{x}-u(\varepsilon/2)\cdot\sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}=1.3-1.96\times\sqrt{\frac{1.3}{10}}=0.5933$

よって、信頼区間の幅は

2.0067－0.5933＝$\boxed{1.4134}$

＜精密法による区間推定＞

標本数 $n=10$、母集団からの標本の総和 $k=13$、自由度 $\phi=2(k+1)=28$，$\phi'=2k=26$　より、

信頼区間の上限は $\frac{\chi_{\phi}{}^2(\varepsilon/2)}{2n}=\frac{44.4608}{2\times10}=2.2230$

信頼区間の下限は $\frac{\chi_{\phi'}{}^2(1-\varepsilon/2)}{2n}=\frac{13.8439}{2\times10}=0.6922$

よって、信頼区間の幅は

2.2230－0.6922＝$\boxed{1.5308}$

ゆえに、解答は　①（G）　②（I）

（6）

帰無仮説 H_0、対立仮説 H_1 を

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 100 \\ H_1 : \mu = 105 \end{cases}$$

として仮説検定を行う。

まず、n 個の標本変量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ は、それぞれ独立で、平均 μ、分散 σ^2 の正規分布

に従うとすると、標本平均 $\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$ は平均 μ 、分散 $\dfrac{\sigma^2}{n}$ の正規分布に従い、$\overline{X}$ を標準化した $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}$ は標準正規分布に従う。

有意水準（第１種の誤りが起こる確率）が 5%であるため、

$$P\{\overline{X}\geqq k \mid \mu=100\}=P\left\{Z\geqq\frac{k-100}{\sqrt{\dfrac{5^2}{15}}}\right\}=0.05$$

標準正規分布表より標準正規分布の上側 5%点は 1.6449 であるから、

$$\frac{k-100}{\sqrt{\dfrac{5^2}{15}}}=1.6449 \qquad \therefore k \fallingdotseq 102.1236$$

よって、第２種の誤りが起こる確率は、

$$P\{\overline{X}<k \mid \mu=105\}=P\left\{Z<\frac{102.1236-105}{\sqrt{\dfrac{5^2}{15}}}=-2.228\right\}=P\{Z\geqq 2.228\}$$

標準正規分布表より $P\{Z\geqq 2.228\}\fallingdotseq 0.0129$

よって検出力は $1-0.0129=\boxed{0.9871}$

ゆえに、解答は　（Ｉ）

（７）

Ａ成分の含有率について、n 回の定量分析を行って得た値 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ に対し、平均値 $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ を計算し、$\overline{x}\leqq\mu_0-u(\varepsilon)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ のとき不合格、$\overline{x}\geqq\mu_0-u(\varepsilon)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ のとき合格とすると、含有率 $\mu_0=90\%$ 以上の合格確率を 97%とする必要から $\varepsilon=1-0.97=0.03$ 。

また、$\mu=87\%$ 以下の合格確率が $1-0.99=0.01$ 以下となるため、以下の算式が成り立つ。

$$P\left\{\overline{X}\geqq\mu_0-u(\varepsilon)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}\leqq 0.01$$

ここで $\overline{X}$ は平均 $\mu=87(\%)$ および標準偏差 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ の正規分布に従っているので、標準化すると、

$$P\left\{\frac{\overline{X}-87}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geqq \frac{\mu_0-87-u(\varepsilon)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right\} = P\left\{U \geqq \frac{\mu_0-87-u(\varepsilon)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right\} \leqq 0.01 \quad \varepsilon = 0.03$$

$\mu_0 = 90(\%)$ および $\sigma = 2.0(\%)$ を代入し、n について解くと、

$$u(0.01) \leqq \frac{\mu_0-87-u(0.03)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\mu_0-87}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - u(0.03)$$

$$n \geqq \left\{\frac{u(0.01)+u(0.03)}{\mu_0-87}\right\}^2 \sigma^2 = \left\{\frac{2.3263+1.8808}{90-87}\right\}^2 2^2 = 7.87$$

上記を満たす最小の整数 n は $\boxed{8}$。

また、平均値が $\mu_0 - u(0.03)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 以下のときにこの製品を不合格とすれば良い。

$\mu_0 - u(0.03)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ に $\mu_0 = 90(\%)$、$\sigma = 2.0(\%)$ および $n = 8$ を代入すると、

$$\mu_0 - u(0.03)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \boxed{88.67(\%)}$$

ゆえに、解答は　①（F）　②（F）

（８）

比例抽出法により求められるＡ政党支持者の推定値 z_P は

$$z_P = \sum_{i=1}^{3} \frac{N_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = 350 \times \frac{50}{100} + 450 \times \frac{40}{100} + 300 \times \frac{35}{100} = 460 \text{ 万人}$$

よって支持率は $460/1100 = \boxed{41.82\%}$

　また、支持者数の分散は、N_i ：年齢階級 i の人口、f ：抜取比（＝標本の大きさ÷人口）とすると、

$$\begin{aligned} V(z_P) &= \frac{1-f}{f} \sum_{i=1}^{3} N_i \sigma_i^2 \\ &= \left(1 - \frac{0.07}{350}\right) \times \frac{350}{0.07} (350 \times 0.5 \times 0.5 + 450 \times 0.4 \times 0.6 + 300 \times 0.35 \times 0.65) \times 10{,}000 \\ &= 13{,}184{,}862{,}500 \end{aligned}$$

よって標準誤差は$\dfrac{\sqrt{13{,}184{,}862{,}500}}{11{,}000{,}000} = \boxed{1.044\%}$

ゆえに、解答は　①（B）　②（D）

（9）

プロビット・モデルにおいてαおよびβを推定するためには、$y' = F^{-1}(y)$としてyを変換したデータy'に対して線形回帰を行えばよい。プロビット・モデルにおいてFは標準正規分布の分布関数であるから、標準正規分布表を用いてyをy'に変換すると下表のとおりとなる。

x	1.4	1.8	2.9	4.3	5.3
y	10%	24%	52%	91%	92%
y'	-1.2816	-0.7063	0.0502	1.3408	1.4051

これをもとにαとβの推定量$\hat{\alpha}$と$\hat{\beta}$を、上記の変換したデータから線形回帰により計算すると、

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})(y_i' - \overline{y'})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2} = 0.71$$

$$\hat{\alpha} = \overline{y'} - \hat{\beta}\bar{x} = -2.07$$

よって、解答は　①（B）　②（G）

（１０）

毎年４月初での学年の異動を表す推移確率行列は、

$$P = \begin{array}{c} \\ \text{現在の学年} \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \text{1年後の学年} \\ \downarrow \end{array}$$

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{卒業生} & \text{3年生} & \text{2年生} & \text{1年生} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{卒業生} \\ \text{3年生} \\ \text{2年生} \\ \text{1年生} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.85 & 0.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.95 & 0.05 \end{pmatrix} \end{array}$$

であるから、

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9775 & 0.0225 & 0 & 0 \\ 0.765 & 0.225 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0.855 & 0.1425 & 0.0025 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.996625 & 0.003375 & 0 & 0 \\ 0.95625 & 0.04275 & 0.001 & 0 \\ 0.72675 & 0.2565 & 0.016625 & 0.000125 \end{pmatrix}$$

これより、$t+3$年4月初に新入生が入学した直後の卒業生、3年生、2年生、1年生の人数をそれぞれ、x、y、z、wとすると、毎年の入学者が100人であることから、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}^T P^3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}^T P^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}^T P + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 268 \\ 116 \\ 111 \\ 105 \end{pmatrix}^T$$

よって、<u>解答は　①（A）　②（C）　③（D）</u>

（１１）

まずは、最小二乗法によりパラメータϕ_0, ϕ_1を推定する。

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$ とすると、$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

これより、$X^T X = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & 30 \end{pmatrix}, \left(X^T X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$

よって、$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_0 \\ \hat{\phi}_1 \end{pmatrix} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} 1.00 \\ 0.67 \end{pmatrix}$

次に、標本自己相関からパラメータϕ_0, ϕ_1を推定する。

標本自己相関 $\hat{\rho}_1 = \dfrac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_0} = \dfrac{\sum_{t=2}^{6}(y_t - \overline{y})(y_{t-1} - \overline{y})}{\sum_{t=1}^{6}(y_t - \overline{y})^2}$, $\overline{y} = \dfrac{5}{2}$ から、$\hat{\rho}_1 = \dfrac{1}{2}$

ここで、$AR(1)$ モデルでは $\rho_1 = \phi_1$ より、$\hat{\phi}_1 = \dfrac{1}{2} = 0.50$

また、 $AR(1)$ モデルでは $E(Y_t) = \mu = \dfrac{\phi_0}{1-\phi_1}$ であるので、 $\hat{\mu} = \overline{y} = \dfrac{5}{2}$ を用いて、

$\hat{\phi}_0 = \hat{\mu} \cdot (1 - \hat{\phi}_1) = \dfrac{5}{4} = 1.25$

よって、解答は　①（C）　②（F）　③（H）　④（A）

（１２）

大人の入場者数を X （万人）、子どもの入場者数を Y （万人）とすると、標準正規分布に従う確率変数 Z_1, Z_2 により以下のように表すことができる。

大人：$X = 80$ 万＋８万× Z_1

子ども：$Y = 40$ 万＋５万× Z_2

そして、$[0,1]$ 区間の一様分布に従う確率変数 U の実現値を用いて、逆関数法により入場料を求める。

大人	U	$Z_1 = F^{-1}(U)$	入場者数 X ［万人］	単価 ［円］	入場料［万円］ (＝ X ×単価)
1か月目	0.872	1.1359	89.0872	5,000	445,436
2か月目	0.127	−1.1407	70.8744	5,000	354,372

子ども	U	$Z_2 = F^{-1}(U)$	入場者数 Y ［万人］	単価 ［円］	入場料［万円］ (＝ Y ×単価)
1か月目	0.224	−0.7588	36.206	3,000	108,618
2か月目	0.574	0.1866	40.933	3,000	122,799

以上より、２か月の大人の総入場料は、

$445{,}436 + 354{,}372 = 799{,}808$ （万円）

また、２か月の子どもの総入場料は、

$108{,}618 + 122{,}799 = 231{,}417$ （万円）

よって、解答は　①（D）　②（C）

問題２

（１）

X,Y の結合確率密度関数は $h(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{Q(x,y)}{2}}$ である。

ただし、

$$Q(x,y)=\frac{1}{1-\rho^2}\left\{\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{1-\rho^2}\left\{\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right\}^2+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}$$

と変形できるから、Y の確率密度関数は

$$g(y)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x,y)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left(-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2{}^2}\right)$$
$$\times\underline{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right\}^2\right)dx}$$

である。ここで、この下線部の被積分関数は x の関数として正規分布の確率密度関数であるから、この積分の値は1に等しいことがわかる。

ゆえに、$g(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left(-\dfrac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2{}^2}\right)$ となり、Y は正規分布 $N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$ に従うことがわかる。

次に、X,Y の結合確率密度関数は $h(x,y)$ 、Y の確率密度関数は $g(y)$ であるから、
条件 $Y=y$ のもとでの X の確率密度関数は

$$f(x\mid y)=\frac{h(x,y)}{g(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right\}^2\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left\{x-\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right)\right\}^2\right)$$

と変形される。

よって、$f(x\mid y)$ は x の関数とみたとき、正規分布 $N\left(\mu_1+\rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\sigma_1{}^2(1-\rho^2)\right)$ の確率密度関数とみなせるから、求める回帰関数は

$$E(X\mid Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x\mid y)dx=\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)$$

となることがわかる。

したがって、解答は　①（Q）　②（P）　③（E）　④（B）　⑤（F）　⑥（Q）
⑦（K）　⑧（T）　⑨（T）

（2）
確率変数 Z の積率母関数は

$$\phi(\theta)=E\left(e^{\theta Z}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\times\exp\left(-\frac{1-8\theta}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right\}\right)dxdy$$

である。

ここで、θ の値が 0 の近傍にあるとき、$u=\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\sqrt{1-8\theta},\quad v=\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}\sqrt{1-8\theta}$ なる変数変換をすれば、

$$\phi(\theta)=(1-8\theta)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2-2\rho uv+v^2)\right)dudv$$

と変形される。
ここで、この被積分関数は 2 変量正規分布 $N(0,0,1,1,\rho)$ の確率密度関数であることがわかるから、この積分の値は1に等しい。
ゆえに、$\phi(\theta)=(1-8\theta)^{-1}$ となることがわかる。
よって、確率変数 Z は平均 8 の指数分布に従うことがわかる。

したがって、解答は　⑩（J）　⑪（S）　⑫（W）　⑬（Q）　⑭（E）　⑮（Q）

⑯（H）

（3）
確率ベクトル (X,Y) の積率母関数は

$$\psi(\theta_1,\theta_2)=E\left(e^{\theta_1X+\theta_2Y}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta_1x+\theta_2y}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)\right)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{Q_0(x,y)}{2}}dxdy$$

である。ただし、

$$Q_0(x,y)=\frac{1}{1-\rho^2}(x^2-2\rho xy+y^2-2(1-\rho^2)\theta_1 x-2(1-\rho^2)\theta_2 y)=A(x,y)+B(y)+C$$

とすると、

$$A(x,y)=\frac{1}{1-\rho^2}\left\{x-\rho y-(1-\rho^2)\theta_1\right\}^2, B(y)=(y-\theta_2-\rho\theta_1)^2, C=-(\theta_1{}^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2{}^2)$$

となる。

ゆえに、$\psi(\theta_1,\theta_2)=e^{-\frac{C}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{B(y)}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{A(x,y)}{2}}dx\right\}dy$ と変形される。

ここで、$e^{-\frac{A(x,y)}{2}}$ を x の関数として考えると、

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{A(x,y)}{2}}dx=\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}$$

となることがわかる。

同様にして、$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{B(y)}{2}}dy=\sqrt{2\pi}$ となることがわかる。

よって、$\psi(\theta_1,\theta_2)=e^{\frac{1}{2}(\theta_1{}^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2{}^2)}$ を得る。

これより、X の積率母関数は $\psi(\theta_1,0)=e^{\frac{\theta_1{}^2}{2}}$ となり、X は正規分布 $N(0,1)$ に従うことがわかるので、X の期待値、分散は $E(X)=0, V(X)=1$ となる。

同様にして、Y は正規分布 $N(0,1)$ に従うことがわかるので、Y の期待値、分散は $E(Y)=0, V(Y)=1$ となる。

ここで、$\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\psi(\theta_1,\theta_2)=e^{\frac{1}{2}(\theta_1{}^2+2\rho\theta_1\theta_2+\theta_2{}^2)}\left\{(\theta_1+\rho\theta_2)(\rho\theta_1+\theta_2)+\rho\right\}$ より、

$$E(XY)=\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\psi(0,0)=\rho$$

となることがわかる。

ゆえに、求める相関係数は、X,Y の共分散を $C(X,Y)$ とすると、

$$R(X,Y)=\frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=\rho$$

である。

したがって、解答は　⑰（Ｆ）　⑱（Ｙ）　⑲（Ｋ）　⑳（Ｒ）　㉑（Ｌ）　㉒（Ａ）　㉓（Ｅ）　㉔（Ｊ）　㉕（Ｏ）　㉖（Ｏ）

問題３

（１）

Ⅰ）結合確率密度関数は、

$$(2\pi\times\sigma_A^2)^{-\frac{n_A}{2}}\times(2\pi\times\sigma_B^2)^{-\frac{n_B}{2}}\times\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_A^2}\sum_{i=1}^{n_A}(x_i-\mu_A)^2-\frac{1}{2\sigma_B^2}\sum_{j=1}^{n_B}(y_j-\mu_B)^2\right\}$$

この結合確率密度関数の尤度関数を $L(\mu_A,\mu_B)$ とすると、

$$\log L(\mu_A,\mu_B)$$

$$=-\frac{n_A}{2}\log(2\pi\sigma_A^2)-\frac{n_B}{2}\log(2\pi\sigma_B^2)+\left\{-\frac{1}{2\sigma_A^2}\sum_{i=1}^{n_A}(x_i-\mu_A)^2-\frac{1}{2\sigma_B^2}\sum_{j=1}^{n_B}(y_j-\mu_B)^2\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu_A}\log L(\mu_A,\mu_B)=-\frac{1}{2\sigma_A^2}\times(-2)\times\left\{\sum_{i=1}^{n_A}(x_i-\mu_A)\right\}=\frac{n_A}{\sigma_A^2}(\bar{x}-\mu_A)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu_B}\log L(\mu_A,\mu_B)=-\frac{1}{2\sigma_B^2}\times(-2)\times\left\{\sum_{j=1}^{n_B}(y_j-\mu_B)\right\}=\frac{n_B}{\sigma_B^2}(\bar{y}-\mu_B)=0$$

より、母平均の最尤推定値を求めることができる。

よって解答は、①（Ｅ）②（Ｊ）③（Ｃ）④（Ｄ）⑤（Ｅ）⑥（Ｐ）

Ⅱ）結合確率密度関数は、

$$(2\pi\times\sigma^2)^{-\frac{n_A+n_B}{2}}\times\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{n_A}(x_i-\mu_A)^2+\sum_{j=1}^{n_B}(y_j-\mu_B)^2\right\}\right]$$

この結合確率密度関数の尤度関数を $L(\mu_A,\mu_B,\sigma^2)$ とすると、

$$\log L(\mu_A,\mu_B,\sigma^2)=-\frac{n_A+n_B}{2}\log(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{n_A}(x_i-\mu_A)^2+\sum_{j=1}^{n_B}(y_j-\mu_B)^2\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu_A}\log L(\mu_A,\mu_B,\sigma^2)=-\frac{1}{2\sigma^2}\times(-2)\times\left\{\sum_{i=1}^{n_A}(x_i-\mu_A)\right\}=\frac{n_A}{\sigma^2}(\bar{x}-\mu_A)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu_B}\log L(\mu_A,\mu_B,\sigma^2)=-\frac{1}{2\sigma^2}\times(-2)\times\left\{\sum_{j=1}^{n_B}(y_j-\mu_B)\right\}=\frac{n_B}{\sigma^2}(\bar{y}-\mu_B)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial(\sigma^2)}\log L(\mu_A,\mu_B,\sigma^2)=-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(n_A+n_B)-\frac{1}{\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{n_A}(x_i-\mu_A)^2+\sum_{j=1}^{n_B}(y_j-\mu_B)^2\right\}\right]=0$$

より、σ^2の最尤推定量は、

$$\hat{\sigma}_L^2=\frac{1}{n_A+n_B}\left\{\sum_{i=1}^{n_A}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{j=1}^{n_B}(y_j-\bar{y})^2\right\}$$

となる。このとき、$\sum_{i=1}^{n_A}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}\right)^2$ と $\sum_{j=1}^{n_B}\left(\frac{y_i-\bar{y}}{\sigma}\right)^2$ はそれぞれ自由度n_A-1、n_B-1の

χ^2分布に従うので、

$$E(\hat{\sigma}_L^2)=\frac{1}{n_A+n_B}E\left(\sum_{i=1}^{n_A}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{j=1}^{n_B}(y_j-\bar{y})^2\right)=\frac{1}{n_A+n_B}\{\sigma^2(n_A-1)+\sigma^2(n_B-1)\}$$

$$=\frac{n_A+n_B-2}{n_A+n_B}\times\sigma^2$$

よってσ^2の不偏推定量は$\hat{\sigma}_U^2=\dfrac{n_A+n_B}{n_A+n_B-2}\times\hat{\sigma}_L^2$。また、不偏推定量$\hat{\sigma}_U^2$の分散は

$\sum_{i=1}^{n_A}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}\right)^2,\sum_{j=1}^{n_B}\left(\frac{y_j-\bar{y}}{\sigma}\right)^2$ がそれぞれ自由度$n_A-1,\ n_B-1$のχ^2分布に従うことから

$$V(\hat{\sigma}_U^2)=\left(\frac{n_A+n_B}{n_A+n_B-2}\right)^2\times V\left(\frac{1}{n_A+n_B}\left(\sum_{i=1}^{n_A}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{j=1}^{n_B}(y_j-\bar{y})^2\right)\right)$$

$$=\frac{\sigma^4}{(n_A+n_B-2)^2}\{2(n_A-1)+2(n_B-1)\}=\frac{2\sigma^4}{n_A+n_B-2}$$

となる。また、検定統計量

$$t_1=\frac{\bar{x}-\bar{y}-(\mu_A-\mu_B)}{\hat{\sigma}_U\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}}$$

は自由度n_A+n_B-2のt分布に従うことが分かる。

よって解答は、<u>⑦（O）⑧（E）⑨（G）⑩（Q）⑪（M）⑫（O）⑬（N）⑭（M）</u>

（２）

$$u=\frac{\bar{x}-\bar{y}-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A}+\dfrac{\sigma_B^2}{n_B}}}$$

は標準正規分布に従う。ここで検定統計量

$$t_2=\frac{\bar{x}-\bar{y}-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\dfrac{s_x^2}{n_A}+\dfrac{s_y^2}{n_B}}}=\frac{\dfrac{\bar{x}-\bar{y}-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_A^2}{n_A}+\dfrac{\sigma_B^2}{n_B}\right)}}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A(n_A-1)}}{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A}+\dfrac{\sigma_B^2}{n_B}}\times\dfrac{\sum_{i=1}^{n_A}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma_A^2}+\dfrac{\dfrac{\sigma_B^2}{n_B(n_B-1)}}{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A}+\dfrac{\sigma_B^2}{n_B}}\times\dfrac{\sum_{j=1}^{n_B}(y_j-\bar{y})^2}{\sigma_B^2}}}$$

を考える。このとき

$$w=\frac{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A(n_A-1)}}{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A}+\dfrac{\sigma_B^2}{n_B}}\times\frac{\sum_{i=1}^{n_A}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma_A^2}+\frac{\dfrac{\sigma_B^2}{n_B(n_B-1)}}{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A}+\dfrac{\sigma_B^2}{n_B}}\times\frac{\sum_{j=1}^{n_B}(y_j-\bar{y})^2}{\sigma_B^2}$$

とおくと、w は u と独立で、w の母集団の分布から計算した期待値 $E_1(w)$ および分散 $V_1(w)$ は $\dfrac{\sum_{i=1}^{n_A}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma_A^2}$、$\dfrac{\sum_{j=1}^{n_B}(y_j-\bar{y})^2}{\sigma_B^2}$ がそれぞれ自由度 $n_A-1,\ n_B-1$ の χ^2 分布に従うことから、

$$E_1(w)=\frac{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A(n_A-1)}}{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A}+\dfrac{\sigma_B^2}{n_B}}\times(n_A-1)+\frac{\dfrac{\sigma_B^2}{n_B(n_B-1)}}{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A}+\dfrac{\sigma_B^2}{n_B}}\times(n_B-1)=1$$

$$V_1(w)=\left\{\frac{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A(n_A-1)}}{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A}+\dfrac{\sigma_B^2}{n_B}}\right\}^2\times 2(n_A-1)+\left\{\frac{\dfrac{\sigma_B^2}{n_B(n_B-1)}}{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A}+\dfrac{\sigma_B^2}{n_B}}\right\}\times 2(n_B-1)$$

$$=\frac{\dfrac{2\sigma_A^4}{n_A^2(n_A-1)}+\dfrac{2\sigma_B^4}{n_B^2(n_B-1)}}{\left(\dfrac{\sigma_A^2}{n_A}+\dfrac{\sigma_B^2}{n_B}\right)^2}$$

となる。

次にwの分布をガンマ分布$\Gamma\left(\frac{1}{2}f, 2g\right)$で近似することを考える。$w$のガンマ分布から計算した期待値$E_2(w)$および分散$V_2(w)$は$E_2(w)=\frac{1}{2}f\times 2g = fg$、$V_2(w)=\frac{1}{2}f\times(2g)^2 = 2fg^2$となる。$E_1(w)=E_2(w)$かつ$V_1(w)=V_2(w)$となるような$f$を求めると、

$$f=\frac{\left(\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}\right)^2}{\frac{\sigma_A^4}{n_A^2(n_A-1)}+\frac{\sigma_B^4}{n_B^2(n_B-1)}}$$

となる。実際、このようにして求めたfおよびgに対応するガンマ分布$\Gamma\left(\frac{1}{2}f, 2g\right)$は$w$の分布をよく近似していることが知られている。

wが$\Gamma\left(\frac{1}{2}f, 2g\right)$に従うとき$\frac{w}{g}$は$\Gamma\left(\frac{1}{2}f, 2\right)$、すなわち、自由度$f$の$\chi^2$分布に従う。

よって検定統計量$t_2 = u \div \sqrt{\frac{w}{fg}}$は近似的に自由度$f$の$t$分布に従う。なお、自由度$f$において、$\sigma_A^2$および$\sigma_B^2$は未知であるため、実務上はこれを不偏分散$s_x^2$および$s_y^2$で置き換えた以下の式を自由度として用いる。

$$f^*=\frac{\left(\frac{s_x^2}{n_A}+\frac{s_y^2}{n_B}\right)^2}{\frac{s_x^4}{n_A^2(n_A-1)}+\frac{s_y^4}{n_B^2(n_B-1)}}$$

よって<u>解答は、⑮（O）⑯（F）⑰（J）⑱（C）⑲（X）⑳（K）㉑（O）㉒（W）㉓（D）㉔（C）</u>

問題１

（１）	（Ｈ）		5点	（９）	①	（Ｂ）	3点
（２）	①	（Ｈ）	2点		②	（Ｇ）	2点
	②	（Ｄ）	3点	（１０）	①	（Ａ）	1点
（３）	①	（Ｈ）	3点		②	（Ｃ）	2点
	②	（Ｂ）	2点		③	（Ｄ）	2点
（４）	（Ｄ）		5点	（１１）	①	（Ｃ）	完答で2点
（５）	①	（Ｇ）	2点		②	（Ｆ）	
	②	（Ｉ）	3点		③	（Ｈ）	完答で3点
（６）	（Ｉ）		5点		④	（Ａ）	
（７）	①	（Ｆ）	3点	（１２）	①	（Ｄ）	2点
	②	（Ｆ）	2点		②	（Ｃ）	3点
（８）	①	（Ｂ）	2点				
	②	（Ｄ）	3点				

問題２

（１）	①	（Ｑ）	完答で1点		⑭	（Ｅ）	完答で1点
	②	（Ｐ）			⑮	（Ｑ）	
	③	（Ｅ）	1点		⑯	（Ｈ）	2点
	④	（Ｂ）	完答で1点	（３）	⑰	（Ｆ）	1点
	⑤	（Ｆ）			⑱	（Ｙ）	完答で1点
	⑥	（Ｑ）	1点		⑲	（Ｋ）	
	⑦	（Ｋ）	完答で1点		⑳	（Ｒ）	1点
	⑧	（Ｔ）			㉑	（Ｌ）	1点
	⑨	（Ｔ）	1点		㉒	（Ａ）	完答で1点
（２）	⑩	（Ｊ）	完答で1点		㉓	（Ｅ）	
	⑪	（Ｓ）			㉔	（Ｊ）	1点
	⑫	（Ｗ）	1点		㉕	（Ｏ）	1点
	⑬	（Ｑ）	1点		㉖	（Ｏ）	1点

問題３

（１）	①	（Ｅ）	完答で２点	（２）	⑮	（Ｏ）	１点
	②	（Ｊ）			⑯	（Ｆ）	完答で２点
	③	（Ｃ）			⑰	（Ｊ）	
	④	（Ｄ）			⑱	（Ｃ）	１点
	⑤	（Ｅ）	完答で１点		⑲	（Ｘ）	１点
	⑥	（Ｐ）			⑳	（Ｋ）	１点
	⑦	（Ｏ）	完答で２点		㉑	（Ｏ）	１点
	⑧	（Ｅ）			㉒	（Ｗ）	１点
	⑨	（Ｇ）	完答で１点		㉓	（Ｄ）	１点
	⑩	（Ｑ）			㉔	（Ｃ）	１点
	⑪	（Ｍ）	完答で２点				
	⑫	（Ｏ）					
	⑬	（Ｎ）	１点				
	⑭	（Ｍ）	１点				

以上