生保数理（問題）

問題１． 次の（１）～（８）について、各問の指示に従い、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
各５点（計４０点）

（１）　m 年間積立てた後、年金額 r の期始払年金を n 年間支払う年金積立保険の年払保険料 P_1 について考える。$3m$ 年間積立てた後、年金額 $\frac{3}{4}r$ の期始払年金を n 年間支払う年金積立保険の年払保険料 P_2 が 3.628、v^{2m} が 0.673 のとき、P_1 の値に最も近いものは次のうちどれか。

なお、積立期間と年金開始後の予定利率は同じとし、死亡等の脱退は考慮しないものとする。

（Ａ） 17.80　（Ｂ） 17.82　（Ｃ） 17.84　（Ｄ） 17.86　（Ｅ） 17.88
（Ｆ） 17.90　（Ｇ） 17.92　（Ｈ） 17.94　（Ｉ） 17.96　（Ｊ） 17.98

（２）　以下はある保険の選択期間 3 年の選択表および終局表における死亡率の一部である。

x	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	q_{x+3}	$x+3$
45	0.0115	0.0132	0.0146	0.0212	48
46	0.0122	0.0141	0.0162	0.0237	49
47	0.0128	0.0150	0.0178	0.0262	50
48	0.0135	0.0159	0.0194	0.0287	51
49	0.0142	0.0169	0.0210	0.0302	52
50	0.0151	0.0181	0.0226	0.0318	53
51	0.0162	0.0197	0.0242	0.0336	54
52	0.0173	0.0213	0.0258	0.0354	55
53	0.0184	0.0229	0.0274	0.0372	56
54	0.0195	0.0245	0.0290	0.0388	57

現在 A さん、B さんともに 48 歳であるが、A さんは 45 歳のときにこの保険に加入し、B さんは 47 歳のときに加入した。今から 5 年後にいずれか 1 人だけが生存している確率に最も近いものは次のうちどれか。

（Ａ） 0.199　（Ｂ） 0.202　（Ｃ） 0.205　（Ｄ） 0.208　（Ｅ） 0.211
（Ｆ） 0.214　（Ｇ） 0.217　（Ｈ） 0.220　（Ｉ） 0.223　（Ｊ） 0.226

（３）　ある集団が原因 A、B によって減少していく 2 重脱退表を考える。ここで、各脱退はそれぞれ独立かつ一年を通じて一様に発生するものとする。$l_{50}=99{,}150$、$q_{50}^{A}=0.00509$、51 歳における原因 A の中央脱退率 $m_{51}^{A}=0.00634$ であるとき、l_{52} の値に最も近いものは次のうちどれか。なお、原因 B の中央脱退率 m_x^B は年齢によらず一律 3%とする。

（Ａ） 92,300　（Ｂ） 92,305　（Ｃ） 92,310　（Ｄ） 92,315　（Ｅ） 92,320
（Ｆ） 92,325　（Ｇ） 92,330　（Ｈ） 92,335　（Ｉ） 92,340　（Ｊ） 92,345

（４） x 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険期間 30 年で、次の給付を行う養老保険の年払純保険料 P の値は 0.08890 であった。

【給付内容】

・ 死亡保険金：最初の 15 年間は 2、残りの 15 年間は 1
・ 生存保険金：15 年経過時に 1、満期時に 1

x 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1、保険期間 15 年の養老保険の年払純保険料 $P_{x:\overline{15}|}$ が 0.08920 となる場合、x 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1、保険期間 30 年の養老保険の年払純保険料 $P_{x:\overline{30}|}$ の値に最も近いのは次のうちどれか。
ただし、予定利率、予定死亡率はすべての保険で共通とし、予定利率 i=2.00%とする。

（Ａ）	0.04000	（Ｂ）	0.04002	（Ｃ）	0.04004	（Ｄ）	0.04006	（Ｅ）	0.04008
（Ｆ）	0.04010	（Ｇ）	0.04012	（Ｈ）	0.04014	（Ｉ）	0.04016	（Ｊ）	0.04018

（５） x 歳加入、保険料年払終身払込、保険金年度末支払、保険金額 1 の終身保険について、予定利率を i (i >0)から i' に変更することを考える。
予定利率変更前の年払純保険料を P、変更後の年払純保険料を P'とすると、$\dfrac{P}{P'} = \alpha > 0$ となり、
予定利率変更前の年金現価を $\ddot{a}_x$ 、変更後の年金現価を $\ddot{a}'_x$ とすると、$\dfrac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}'_x} = \beta > 0$ となった。
ここで、$\ddot{a}'_x = \dfrac{1-\alpha\cdot\beta}{\beta}\cdot\dfrac{1+i}{i}$ の関係が成り立つとき、変更後の予定利率 i'と等しいものは次のうちどれか。

（Ａ）	$\dfrac{i}{\alpha}$	（Ｂ）	$\dfrac{i}{\alpha\cdot\beta}$	（Ｃ）	$\dfrac{i}{\beta}$	（Ｄ）	$\alpha\cdot i$	（Ｅ）	$\alpha\cdot\beta\cdot i$
（Ｆ）	$\beta\cdot i$	（Ｇ）	$\dfrac{\alpha}{\beta}i$	（Ｈ）	$\dfrac{\beta}{\alpha}i$	（Ｉ）	0	（Ｊ）	いずれにも該当しない

（６） x 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1、保険期間 n 年、予定利率 i=1.00%の養老保険において、t 年経過後に払済保険へ変更する場合の払済保険金額は 0.6599 であった。このとき、t 年経過後に延長保険へ変更する場合の生存保険金額に最も近いものは次のうちどれか。
ただし、払済保険金額、生存保険金額を計算する場合に用いる解約返戻金は変更時点の平準純保険料式責任準備金と同額とし、払済保険の予定事業費は毎保険年度始に払済保険金額 1 に対し 0.002、延長保険の予定事業費は毎保険年度始に死亡保険金額 1 に対し 0.001、生存保険金額 1 に対し 0.001 とする。また、$P_{x:\overline{n}|} = 0.0458$、 $A_{x+t:\overset{1}{\overline{n-t}|}} = 0.9124$とする。

（Ａ）	0.60	（Ｂ）	0.61	（Ｃ）	0.62	（Ｄ）	0.63	（Ｅ）	0.64
（Ｆ）	0.65	（Ｇ）	0.66	（Ｈ）	0.67	（Ｉ）	0.68	（Ｊ）	0.69

（７） 40 歳加入、保険期間 20 年の、保険期間中に就業不能となった場合、その年度末から保険期間満了時まで生存を条件に年金額 1 を支払う就業不能年金特約を考える（就業不能となった場合、最後の年金は保険期間満了時に支払われる）。
保険料は年払とし、保険期間中に被保険者が就業している限り、毎年度始に払い込むものとする。死亡した場合、この特約からの給付はないものとする。

このとき、この特約の年払純保険料の値に最も近いものは次のうちどれか。ここで、計算基数は下表のとおりとする。
なお、死亡および就業不能はそれぞれ独立かつ 1 年を通じて一様に発生するものとする。また、就業不能者でない者は就業者であるものとし、就業不能者が回復して就業者に復帰することはないものとする。

x	N_x^{aa}	M_x^{aa}	N_x^{ii}	M_x^{ii}	N_x^{i}	M_x^{i}
40	1,712,520	11,134	35,185	1,036	1,256,939	28,039
41	1,632,504	11,003	34,774	1,031	1,188,614	27,142
…	…	…	…	…	…	…
60	314,460	3,931	16,438	548	192,476	6,352
61	257,832	3,218	14,359	469	156,377	5,078

（Ａ） 0.006　（Ｂ） 0.007　（Ｃ） 0.008　（Ｄ） 0.009　（Ｅ） 0.010
（Ｆ） 0.011　（Ｇ） 0.012　（Ｈ） 0.013　（Ｉ） 0.014　（Ｊ） 0.015

（８） 下表の給付を行う、x 歳加入、保険料年払全期払込、入院日額 δ 、保険期間 n 年の疾病入院保障保険 A および B を考える。

商品	給付種類	給付内容
A	疾病入院給付金	入院日数×入院日額を支払う。 ただし、不担保期間はなく、支払限度日数は 80 日とする。
B	疾病入院給付金	入院日数×入院日額を支払う。 ただし、不担保期間は 4 日で、支払限度日数は 76 日とする。

ここで、「不担保期間」とは、その期間以内の入院日数を支払の対象外とするものであり、「支払限度日数」とは、一度の入院で支払われる最大の給付日数である。たとえば、商品 B において、80 日間入院した場合、 (80－4) ×入院日額を支払うが、81 日以上入院した場合でも、76×入院日額を支払う。

x 歳の入院発生率が q_x^h 、入院した者が t 日以上入院する確率が $2^{-\frac{t-1}{8}}$ （日帰り入院は入院日数 1 として考える）であるとき、商品 A の年払純保険料は商品 B の年払純保険料の k 倍となった。k の値に最も近いものは次のうちどれか。
なお、疾病入院給付金の支払は入院日数によらず年央に発生するものとし、疾病入院は 1 年間に 2 回以上発生しないものとする。

（Ａ） 1.1　（Ｂ） 1.2　（Ｃ） 1.3　（Ｄ） 1.4　（Ｅ） 1.5
（Ｆ） 1.6　（Ｇ） 1.7　（Ｈ） 1.8　（Ｉ） 1.9　（Ｊ） 2.0

問題 2. 次の（1）～（6）について、各問の指示に従い、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。

各７点（計４２点）

（1）　$\mathring{e}_x = ax+b$ のとき、$l_x = l_0 \cdot \boxed{\quad ① \quad}$ と表される。ここで、$\dfrac{\mu_{60}}{\mu_{30}} = \dfrac{3}{2}$、$\dfrac{l_{60}}{l_{30}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ とすると、

$\mathring{e}_{60} = \boxed{\quad ② \quad}$ となる。

①および②の空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれ次の選択肢の中から選びなさい。

ただし、a および b は x によらない定数とし、$0 \leqq x \leqq -\dfrac{b}{a}$、$-1 < a < 0$ とする。

【①の選択肢】

（A）$\left(1+\dfrac{ax}{b}\right)^{-\frac{a}{a+1}}$　（B）$\left(\dfrac{b}{ax+b}\right)^{\frac{a+1}{a}}$　（C）$\left(\dfrac{a+1}{ax+b}\right)^{-(a+1)}$　（D）$\left(1+\dfrac{ax}{b}\right)^{-2a}$

（E）$\left(\dfrac{b}{ax+b}\right)^{\frac{1}{a}}$　（F）$\log\left(2+\dfrac{ax}{b}\right)^{\frac{1}{\log 2}}$　（G）$\left(1+\dfrac{ax}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$　（H）$\left(1+\dfrac{ax}{b}\right)^{\frac{x}{b}}$

（I）$\left(\dfrac{b}{ax+b}\right)^{a(a+1)}$　（J）$\left(1+\dfrac{ax}{b}\right)^{\frac{a+1}{b}}$

【②の選択肢】

（A）5	（B）10	（C）15	（D）20	（E）25
（F）30	（G）35	（H）40	（I）45	（J）50

（2）　ある集団が原因 A、B によって減少していく 2 重脱退表を考える。$l_0 = a^2$（a は正の定数）、原因 A による脱退力が $\mu_x^A = \dfrac{2}{a-x}$ $(0 < x < a)$、原因 B による脱退力が $\mu_x^B = 1$ であるとき、原因 B による脱退者数 d_x^B を表わす式は次のうちどれか。

（A）$e^{-x} \cdot \{(a-x)^2+1\} - e^{-(x+1)} \cdot \{(a-x-1)^2+1\}$

（B）$e^{-x} \cdot \{(a-x)^2+a\} - e^{-(x+1)} \cdot \{(a-x-1)^2-1\}$

（C）$e^{-x} \cdot \{(a-x-1)^2+1\} - e^{-(x+1)} \cdot \{(a-x-2)^2+1\}$

（D）$e^{-x} \cdot \{(a-x-1)^2-1\} - e^{-(x+1)} \cdot \{(a-x)^2+a\}$

（E）$e^{-x} \cdot \{(a-x+1)^2+1\} - e^{-(x+1)} \cdot \{(a-x-1)^2-1\}$

（F）$e^{-(x+1)} \cdot \{(a-x+1)^2+1\} - e^{-x} \cdot \{(a-x-1)^2-1\}$

（G）$e^{-(x+1)} \cdot \{(a-x)^2+1\} - e^{-x} \cdot \{(a-x-1)^2+1\}$

（H）$e^{-(x+1)} \cdot \{(a-x)^2+a\} - e^{-x} \cdot \{(a-x-1)^2-1\}$

（I）$e^{-(x+1)} \cdot \{(a-x-1)^2+1\} - e^{-x} \cdot \{(a-x-2)^2+1\}$

（J）$e^{-(x+1)} \cdot \{(a-x-1)^2-1\} - e^{-x} \cdot \{(a-x)^2+a\}$

（３） 50 歳加入、保険料一時払、保険期間終身の次の給付を行う保険を考える。

【給付内容】

- 第 3 年度以前に死亡した場合、死亡した年度末に一時払営業保険料を保険金として支払う。
- 第 4 年度以降、第 10 年度以前に死亡した場合、死亡した年度末にその年度末の純保険料式責任準備金を保険金として支払う。ここで、純保険料式責任準備金とは、将来の死亡保険金の給付現価であり、将来の事業費支出現価は含まないものとする。
- 第 11 年度以降に死亡した場合、死亡した年度末に保険金 1 を支払う。

この保険の予定事業費は、新契約時に一時払営業保険料に対して 0.017、毎年度始（初年度も含む）に一時払営業保険料に対して 0.001 とする。

このとき、この保険の一時払営業保険料の値に最も近いものは次のうちどれか。

ただし、予定利率 i=1.00%、$A_{50:\overline{3|}}=0.9708$、$A_{50:\overline{3|}}^{\ 1}=0.9439$、$A_{50}=0.8042$、$A_{60}=0.8667$とする。

（Ａ） 0.800　（Ｂ） 0.805　（Ｃ） 0.810　（Ｄ） 0.815　（Ｅ） 0.820
（Ｆ） 0.825　（Ｇ） 0.830　（Ｈ） 0.835　（Ｉ） 0.840　（Ｊ） 0.845

（４） 40 歳加入、保険料年払 20 年払込、60 歳年金開始、年度始支払、年金額 1 の「10 年間年金原資保証付終身年金保険」を考える。

「10 年間年金原資保証付終身年金保険」とは、年金開始後、被保険者の生存を条件に終身で年金を支払い、最初の 10 年間に死亡した場合は、死亡した年度末に年金原資から既受取年金総額を控除した金額を給付する保険をいう。

なお、年金開始前に死亡した場合には、年度末に既払込保険料と同額を支払うこととする。

年金原資とは、年金開始時点における「10 年間年金原資保証付終身年金保険」の給付現価（死亡時の給付を含む）とし、年金開始後の予定事業費を含めた金額とする。

予定事業費は以下のとおりとする。

予定新契約費	新契約時にのみ、年金原資 1 に対し 0.02
予定維持費	毎年度始に、年金開始前は年金原資 1 に対し 0.001、年金開始後は年金額 1 に対し 0.005
予定集金費	保険料払込のつど、営業保険料 1 に対し 0.03

このとき、この保険の【①年金原資】および【②営業保険料】の値に最も近いものをそれぞれ次の選択肢の中から選びなさい。ここで、計算基数は下表のとおりとする。

x	D_x	N_x	M_x	R_x
40	65,413	2,145,074	44,175	1,710,259
60	49,560	982,283	39,834	857,705
70	39,312	530,036	34,064	481,747

【①年金原資の選択肢】

（Ａ） 21.11　（Ｂ） 21.32　（Ｃ） 21.53　（Ｄ） 21.74　（Ｅ） 21.95
（Ｆ） 22.16　（Ｇ） 22.37　（Ｈ） 22.58　（Ｉ） 22.79　（Ｊ） 23.00

【②営業保険料の選択肢】

（Ａ） 0.995　（Ｂ） 1.005　（Ｃ） 1.015　（Ｄ） 1.025　（Ｅ） 1.035
（Ｆ） 1.045　（Ｇ） 1.055　（Ｈ） 1.065　（Ｉ） 1.075　（Ｊ） 1.085

（5） 30 歳加入、保険料年払 20 年払込、保険金年度末支払、保険金額 1、保険期間 30 年の養老保険において、チルメル割合がαである全期チルメル式責任準備金を積み立てたところ、第 1 保険年度末の責任準備金が 0 となった。この保険をチルメル割合がαの 5 年チルメル式責任準備金で積み立てた場合、第 1 保険年度末の責任準備金 ${}^{20}_{1}V^{[5z]}_{30:\overline{30|}}$ の値に最も近いものは次のうちどれか。ただし、$\ddot{a}_{30:\overline{20|}} = 17.235$、$\ddot{a}_{30:\overline{5|}} = 4.846$、$A_{30:\overline{30|}} = 0.648$、$p_{30} = 0.99914$、予定利率 $i = 1.50\%$とする。

（Ａ）	0.00508	（Ｂ）	0.00524	（Ｃ）	0.00540	（Ｄ）	0.00556	（Ｅ）	0.00572
（Ｆ）	0.00588	（Ｇ）	0.00604	（Ｈ）	0.00620	（Ｉ）	0.00636	（Ｊ）	0.00652

（6） (x)が(y)に先立って死亡すればそれぞれの死亡の年度末に保険金 0.5 ずつを支払い、(y)が(x)に先立って死亡すれば、(x)の死亡の年度末に保険金 1 を支払う保険を考える。保険料は(x)と(y)の共存中に払い込まれるとしたとき、この保険の年払純保険料の値に最も近いものは次のうちどれか。ただし、予定利率は $i = 1.50\%$、$\ddot{a}_{xy} = 31.41$、$\ddot{a}_{x} = 32.39$、$\ddot{a}_{y} = 39.83$とする。

（Ａ）	0.0130	（Ｂ）	0.0134	（Ｃ）	0.0138	（Ｄ）	0.0142	（Ｅ）	0.0146
（Ｆ）	0.0150	（Ｇ）	0.0154	（Ｈ）	0.0158	（Ｉ）	0.0162	（Ｊ）	0.0166

余白ページ

問題 3. 次の（1）、（2）について、各問の指示に従い、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
各９点（計１８点）

（1） 期末払生命年金ではあるが、期中の死亡に対しては前期末から死亡までの端数期間に比例した額を即時に支払う完全年金について考える。

(a) 次の①～⑩の空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれ選択肢の中から 1 つ選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

x 歳加入、期末払の n 年完全年金の現価を $\mathring{a}_{x:\overline{n|}}$ とすると、

$$\mathring{a}_{x:\overline{n|}} = a_{x:\overline{n|}} + \alpha$$

$$\alpha = \sum_{t=0}^{n-1} \int_0^1 s \cdot \boxed{\text{①}} \cdot \boxed{\text{②}} \cdot \mu_{x+t+s} ds$$

と書ける。ここに、α は期中の死亡に対して支払う年金の現価である。
よって、

$$\mathring{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} \int_0^1 \left(\boxed{\text{③}} + s \cdot \boxed{\text{①}} \right) \cdot \boxed{\text{②}} \cdot \mu_{x+t+s} ds + \boxed{\text{④}} \cdot {}_n p_x \quad \cdots \quad (\mathrm{I})$$

と表すことができる。

x 歳加入、期末払の n 年連続年金の現価を $\bar{a}_{x:\overline{n|}}$ とすると、

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} \int_0^1 \boxed{\text{⑤}} \cdot \boxed{\text{②}} \cdot \mu_{x+t+s} ds + \boxed{\text{⑥}} \cdot {}_n p_x \quad \cdots \quad (\mathrm{II})$$

また、

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \boxed{\text{⑦}} \cdot a_{\overline{n|}} \quad \cdots \quad (\mathrm{III})$$

$$\boxed{\text{⑤}} = \boxed{\text{⑧}} + \frac{v^t - v^{t+s}}{\delta} = \boxed{\text{⑦}} \cdot \boxed{\text{⑨}} + \frac{v^{t+s}}{\delta} \cdot \left\{ (1+i)^s - 1 \right\} \quad \cdots \quad (\mathrm{IV})$$

ここで、$(1+i)^s - 1 \fallingdotseq si$ を用いて(IV)を整理し、これと(III)を用いて、(I)と(II)を比較すれば、

$$\mathring{a}_{x:\overline{n|}} \fallingdotseq \boxed{\text{⑩}} \cdot \bar{a}_{x:\overline{n|}}$$

が成り立つ。

(b) $v = e^{-0.02}$、死力は年齢によらず一定で $\mu = 0.005$ のとき、$\dfrac{\mathring{a}_{x:\overline{20|}}}{a_{x:\overline{20|}}}$ の値に最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。なお、解答にあたっては(a)の結果を用い、必要であれば $e^{-0.005} = 0.99501$ を用いなさい。

【(a)の選択肢】

（ア） 1	（イ） t	（ウ） n	（エ） $\ddot{a}_{\overline{t\vert}}$	（オ） $a_{\overline{t\vert}}$
（カ） $\bar{a}_{\overline{t\vert}}$	（キ） $\ddot{a}_{\overline{t+1\vert}}$	（ク） $a_{\overline{t+1\vert}}$	（ケ） $\bar{a}_{\overline{t+1\vert}}$	（コ） $\ddot{a}_{\overline{t+s\vert}}$
（サ） $a_{\overline{t+s\vert}}$	（シ） $\bar{a}_{\overline{t+s\vert}}$	（ス） $\ddot{a}_{\overline{n\vert}}$	（セ） $a_{\overline{n\vert}}$	（ソ） $\bar{a}_{\overline{n\vert}}$
（タ） p_x	（チ） ${}_{t}p_x$	（ツ） ${}_{t+s}p_x$	（テ） ${}_{n}p_x$	（ト） q_x
（ナ） ${}_{t\vert}q_x$	（ニ） ${}_{t+s\vert}q_x$	（ヌ） ${}_{n\vert}q_x$	（ネ） δ	（ノ） i
（ハ） d	（ヒ） v	（フ） v^t	（ヘ） v^{t+s}	（ホ） v^n
（マ） $\dfrac{i}{\delta}$	（ミ） $\dfrac{\delta}{i}$	（ム） $\dfrac{d}{\delta}$	（メ） $\dfrac{\delta}{d}$	

【(b)の選択肢】

（Ａ） 1.0021	（Ｂ） 1.0023	（Ｃ） 1.0025	（Ｄ） 1.0027	（Ｅ） 1.0029
（Ｆ） 1.0031	（Ｇ） 1.0033	（Ｈ） 1.0035	（Ｉ） 1.0037	（Ｊ） 1.0039

（２） 2 人の被保険者 X、Y の年齢をそれぞれ x 歳、y 歳とし、2 人は同一の生命表に従うとする。ここで、X、Y のいずれかが死亡した後、もう一方が死亡したとき、保険金 1 を即時に支払い、契約が消滅する連生保険を考える。
保険料は連続払で契約が継続している限り払い込み続けるものとし、$\bar{P}^{(\infty)}_{\overline{xy}}$ はこの保険の連続払平準純保険料、${}_tV^{(\infty)}_{\overline{xy}}$、${}_tV'_y$ 、${}_tV'_x$ はこの保険の経過 t における平準純保険料式責任準備金で、それぞれ X と Y が 共存中、X 死亡後 Y 生存中、Y 死亡後 X 生存中の場合を表すものとする。

次の①～⑮の空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれ選択肢の中から 1 つ選びなさい。なお、②と③、⑤と⑥、⑦と⑧、⑨と⑩、⑪～⑬はそれぞれ順不同で、同じ選択肢を複数回用いてもよい。また、選択肢（⑤、⑥）の組と、選択肢（⑦、⑧）の組も、順不同とする。

(a) X、Y の少なくとも一方が生存している場合に支払われる連続払の連生年金 $\bar{a}_{\overline{xy}}$ について、経過 t における微分 $\dfrac{d}{dt}\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}$ を考える。

$$\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}=\int_0^\infty v^s\cdot{}_sp_{\overline{x+t,y+t}}ds=\int_0^\infty v^s\cdot\left({}_sp_{x+t}+{}_sp_{y+t}-{}_sp_{x+t,y+t}\right)ds=\bar{a}_{x+t}+\bar{a}_{y+t}-\bar{a}_{x+t,y+t}$$

であるので、 $\bar{A}_{x+t,y+t}+\boxed{①}\cdot\bar{a}_{x+t,y+t}=1$ 等を用いて、$\dfrac{d}{dt}\bar{a}_{x+t}$、$\dfrac{d}{dt}\bar{a}_{y+t}$、$\dfrac{d}{dt}\bar{a}_{x+t,y+t}$ を計算して組み合わせると、

$$\frac{d}{dt}\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}=\left(\boxed{①}+\boxed{②}+\boxed{③}\right)\cdot\boxed{④}-\boxed{⑤}\cdot\boxed{⑥}-\boxed{⑦}\cdot\boxed{⑧}-1$$

と表すことができる。

(b) 次に、X、Y 共存中の平準純保険料式責任準備金 ${}_tV^{(\infty)}_{\overline{xy}}$ について、経過 t における微分 $\dfrac{d}{dt}{}_tV^{(\infty)}_{\overline{xy}}$ を考える。
まず、将来法による ${}_tV^{(\infty)}_{\overline{xy}}$ の計算式より、

$${}_tV^{(\infty)}_{\overline{xy}}=1-\left(\boxed{⑨}+\boxed{⑩}\right)\cdot\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}\quad\cdots\quad(\mathrm{I})$$

これを t で微分して(a)の結果を代入すれば、

$$\frac{d}{dt}{}_tV^{(\infty)}_{\overline{xy}}=-\left(\boxed{⑨}+\boxed{⑩}\right)\cdot\frac{d}{dt}\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}$$
$$=-\left(\boxed{⑨}+\boxed{⑩}\right)\cdot\left\{\left(\boxed{①}+\boxed{②}+\boxed{③}\right)\cdot\boxed{④}-\boxed{⑤}\cdot\boxed{⑥}-\boxed{⑦}\cdot\boxed{⑧}-1\right\}$$

また、(Ｉ)より、

$$\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}=\frac{1-{}_tV^{(\infty)}_{\overline{xy}}}{\boxed{⑨}+\boxed{⑩}}$$ であり、同様に、

$$\bar{a}_{x+t}=\frac{1-{}_tV'_x}{\boxed{⑨}+\boxed{⑩}}、\bar{a}_{y+t}=\frac{1-{}_tV'_y}{\boxed{⑨}+\boxed{⑩}}$$ より、

$$\frac{d}{dt}{}_tV^{(\infty)}_{\overline{xy}}=\left(\boxed{⑪}+\boxed{⑫}+\boxed{⑬}\right)\cdot\boxed{⑭}+\boxed{⑮}-\left(\mu_{y+t}\cdot{}_tV'_x+\mu_{x+t}\cdot{}_tV'_y\right)$$

という微分方程式で表すことができる。

【選択肢】

（ア） i	（イ） v	（ウ） d	（エ） δ	（オ） μ_x
（カ） μ_y	（キ） μ_{xy}	（ク） μ_{x+t}	（ケ） μ_{y+t}	（コ） $\mu_{x+t,y+t}$
（サ） $\mu_{\overline{x+t,y+t}}$	（シ） $\bar{a}_x$	（ス） $\bar{a}_y$	（セ） $\bar{a}_{xy}$	（ソ） $\bar{a}_{\overline{xy}}$
（タ） $\bar{a}_{x+t}$	（チ） $\bar{a}_{y+t}$	（ツ） $\bar{a}_{x+t,y+t}$	（テ） $\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}$	（ト） $\bar{A}_{x+t}$
（ナ） $\bar{A}_{y+t}$	（ニ） $\bar{A}_{\overset{1}{x+t},y+t}$	（ヌ） $\bar{A}_{x+t,\overset{1}{y+t}}$	（ネ） $\bar{A}_{\overline{x+t,y+t}}$	（ノ） $\bar{P}^{(\infty)}_{\overline{xy}}$
（ハ） ${}_tV'_x$	（ヒ） ${}_tV'_y$	（フ） ${}_tV^{(\infty)}_{\overline{xy}}$	（ヘ） ${}_{t+1}V'_x$	（ホ） ${}_{t+1}V'_y$
（マ） ${}_{t+1}V^{(\infty)}_{\overline{xy}}$	（ミ） $\dfrac{d}{dt}{}_tV^{(\infty)}_{\overline{xy}}$	（ム） $\dfrac{d}{dt}{}_tV'_x$	（メ） $\dfrac{d}{dt}{}_tV'_y$	

以上

生保数理（解答例）

問題１.

設問	解答	配点	設問	解答	配点
（１）	**（G）**	５点	（５）	**（Ｉ）**	５点
（２）	**（D）**	５点	（６）	**（F）**	５点
（３）	**（B）**	５点	（７）	**（E）**	５点
（４）	**（B）**	５点	（８）	**（D）**	５点

（１）

$$P_1 = r \cdot \frac{{}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} = r \cdot \frac{v^m \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}$$

$$P_2 = \frac{3}{4} r \cdot \frac{{}_{3m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{3m}|}} = \frac{3}{4} r \cdot \frac{v^{3m} \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}}{\left(1 + v^m + v^{2m}\right) \cdot \ddot{a}_{\overline{m}|}}$$

以上より、

$$P_1 = \frac{4 \cdot \left(1 + v^m + v^{2m}\right)}{3v^{2m}} \cdot P_2 = 17.9216$$

<u>解答：**（G）**</u>

（２）

A さんが５年後に生存している確率は、

$$(1-0.0212)\cdot(1-0.0237)\cdot(1-0.0262)\cdot(1-0.0287)\cdot(1-0.0302) = 0.87656$$

B さんが５年後に生存している確率は、

$$(1-0.0150)\cdot(1-0.0178)\cdot(1-0.0262)\cdot(1-0.0287)\cdot(1-0.0302) = 0.88745$$

よって、５年後にいずれか１人だけが生存している確率は、

$$0.87656(1-0.88745) + (1-0.87656)\cdot 0.88745 = 0.20820$$

<u>解答：**（D）**</u>

（３）

$$q_{50}^{B*} = \frac{2 \times m_{50}^B}{2 + m_{50}^B} = \frac{2 \times 0.03}{2.03} = 0.02956$$

$$q_{50}^{A*} = \frac{q_{50}^A}{1 - 0.5 q_{50}^{B*}} = \frac{0.00509}{1 - 0.5 \cdot 0.02956} = 0.00517$$

より、

$$l_{51} = l_{50} \cdot (1 - q_{50}^{A*}) \cdot (1 - q_{50}^{B*}) = 99{,}150 \times (1 - 0.00517) \times (1 - 0.02956) = 95{,}722$$

また、

$$q_{51}^{A*}=\frac{2\times m_{51}^{A}}{2+m_{51}^{A}}=\frac{2\times 0.00634}{2.00634}=0.00632$$

$$q_{51}^{B*}=\frac{2\times m_{51}^{B}}{2+m_{51}^{B}}=\frac{2\times 0.03}{2.03}=0.02956$$

より、

$$l_{52}=l_{51}\cdot(1-q_{51}^{A*})\cdot(1-q_{51}^{B*})=95{,}722\times(1-0.00632)\times(1-0.02956)=92{,}305$$

解答：（**B**）

（4）

収支相等の原則に基づき、次の式が成り立つ。

$$P\ddot{a}_{x:\overline{30|}}=2A_{x:\overline{15|}}^{1}+A_{x:\overline{15|}}^{\ \ 1}+(A_{x:\overline{30|}}^{1}-A_{x:\overline{15|}}^{1})+A_{x:\overline{30|}}^{\ \ 1}=A_{x:\overline{15|}}+A_{x:\overline{30|}}$$

この式を変形すると、

$$P=\frac{A_{x:\overline{15|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{30|}}}+P_{x:\overline{30|}}=\frac{1-d\cdot\ddot{a}_{x:\overline{15|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{30|}}}+P_{x:\overline{30|}}=\frac{1-d\cdot\dfrac{1}{P_{x:\overline{15|}}+d}}{\dfrac{1}{P_{x:\overline{30|}}+d}}+P_{x:\overline{30|}}\qquad\left(\because\quad \ddot{a}_{x:\overline{15|}}=\frac{1}{P_{x:\overline{15|}}+d}\right)$$

$$=\frac{P_{x:\overline{30|}}+d}{P_{x:\overline{15|}}+d}\cdot P_{x:\overline{15|}}+P_{x:\overline{30|}}$$

よって、

$$P_{x:\overline{30|}}=\frac{P\cdot(P_{x:\overline{15|}}+d)-d\cdot P_{x:\overline{15|}}}{2P_{x:\overline{15|}}+d}=\frac{0.08890\cdot(0.08920+\dfrac{0.02}{1.02})-\dfrac{0.02}{1.02}\times 0.08920}{2\times 0.08920+\dfrac{0.02}{1.02}}$$

$$=\frac{0.0079240}{0.1980078}=0.0400186$$

解答：（**B**）

（5）

$P=\dfrac{A_x}{\ddot{a}_x}=\dfrac{1-d\cdot\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x}$ であるから、$\alpha=\dfrac{P}{P'}=\dfrac{1-d\cdot\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x}\cdot\dfrac{\ddot{a}'_x}{1-d'\cdot\ddot{a}'_x}=\dfrac{1-d\cdot\ddot{a}_x}{1-d'\cdot\ddot{a}'_x}\cdot\dfrac{1}{\beta}$

また、与式 $\ddot{a}'_x=\dfrac{1-\alpha\cdot\beta}{\beta}\cdot\dfrac{1+i}{i}$ を変形すると、

$$d\cdot\beta\cdot\ddot{a}'_x=1-\alpha\cdot\beta$$

$$d\cdot\ddot{a}_x=1-\alpha\cdot\beta$$

$$\alpha\cdot\beta=1-d\cdot\ddot{a}_x$$

これらより、$\alpha\cdot\beta=\dfrac{1-d\cdot\ddot{a}_x}{1-d'\cdot\ddot{a}'_x}=1-d\cdot\ddot{a}_x$ であるから、$d'\cdot\ddot{a}'_x=0$

したがって、$i'=0$

解答：（**I**）

（６）

払済保険金額を S 、払済保険への変更時点の平準純保険料式責任準備金を ${}_tV$ とおくと、

$${}_tV = S\cdot(A_{x+t:\overline{n-t}|} + 0.002\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}) = S\cdot(1+(0.002-d)\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|})$$

また、

$${}_tV = 1-\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$ より、$$\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = \frac{1-{}_tV}{P_{x:\overline{n}|}+d}$$

よって、

$${}_tV = S\cdot\left(1+\frac{0.002-d}{P_{x:\overline{n}|}+d}\cdot(1-{}_tV)\right)$$

$${}_tV = \left(S\cdot(1+\frac{0.002-d}{P_{x:\overline{n}|}+d})\right)\Big/\left(1+S\cdot\frac{0.002-d}{P_{x:\overline{n}|}+d}\right)$$

$$=\left(0.6599\cdot(1+\frac{0.002-\frac{0.01}{1.01}}{0.0458+\frac{0.01}{1.01}})\right)\Big/\left(1+0.6599\cdot\frac{0.002-\frac{0.01}{1.01}}{0.0458+\frac{0.01}{1.01}}\right)$$

$$=\frac{0.566295}{0.906395}=0.624777$$

生存保険金額を S' とすると、

$$S'=\frac{{}_tV-(A^{\ \ 1}_{x+t:\overline{n-t}|}+0.001\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|})}{A_{x+t:\overset{1}{\overline{n-t}|}}+0.001\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}$$

$$=\frac{{}_tV-(A_{x+t:\overline{n-t}|}-A_{x+t:\overset{1}{\overline{n-t}|}}+0.001\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|})}{A_{x+t:\overset{1}{\overline{n-t}|}}+0.001\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}=\frac{{}_tV-(1+(0.001-d)\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}-A_{x+t:\overset{1}{\overline{n-t}|}})}{A_{x+t:\overset{1}{\overline{n-t}|}}+0.001\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}$$

ここで、

$$\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}=\frac{1-{}_tV}{P_{x:\overline{n}|}+d}=\frac{1-0.624777}{0.0458+\frac{0.01}{1.01}}=6.736379$$

を用いると、

$$S'=\frac{0.624777-(1+(0.001-\frac{0.01}{1.01})\cdot6.736379-0.9124)}{0.9124+0.001\times6.736379}$$

$$=\frac{0.597137}{0.919136}=0.649672$$

解答：**（Ｆ）**

（７）

加入時に就業者であった者が、年度始に就業者である限り保険料を支払い、年度末に就業不能となって生存している場合に年金を受け取るため、求める純保険料は

$$P_x^D=\frac{a^{ai}_{40:\overline{20}|}}{\ddot{a}^{aa}_{40:\overline{20}|}}=\frac{N^{ii}_{41}-N^{ii}_{61}-D^{ii}_{40}\cdot a^{i}_{40:\overline{20}|}}{N^{aa}_{40}-N^{aa}_{60}}=\frac{N^{ii}_{41}-N^{ii}_{61}-\frac{D^{ii}_{40}}{D^{i}_{40}}\cdot\left(N^{i}_{41}-N^{i}_{61}\right)}{N^{aa}_{40}-N^{aa}_{60}}$$

これに基数表より値を代入して

$$P_x^D = \frac{34{,}774 - 14{,}359 - \dfrac{35{,}185 - 34{,}774}{1{,}256{,}939 - 1{,}188{,}614} \cdot (1{,}188{,}614 - 156{,}377)}{1{,}712{,}520 - 314{,}460} = 0.01016$$

解答：（E）

（8）

入院日数がちょうど t 日となる確率を p_t とすると、商品 A および商品 B の年払純保険料 P_A および P_B はそれぞれ次のように書ける。

$$P_A = \frac{\dfrac{1}{D_x}\displaystyle\sum_{s=0}^{n-1} v^{s+1/2} \cdot D_{x+s} \cdot q_{x+s}^h \cdot \left\{\sum_{t=1}^{\infty} p_t \cdot \min(t, 80)\right\}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \cdot \delta$$

$$P_B = \frac{\dfrac{1}{D_x}\displaystyle\sum_{s=0}^{n-1} v^{s+1/2} \cdot D_{x+s} \cdot q_{x+s}^h \cdot \left\{\sum_{t=5}^{\infty} p_t \cdot \min(t-4, 76)\right\}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \cdot \delta$$

ここで、$2^{-\frac{1}{8}}$ を a とおくと、 $p_t = a^{t-1} - a^t$ であり、

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{\infty} p_t \cdot \min(t, 80) &= \sum_{t=1}^{80} t \cdot (a^{t-1} - a^t) + \sum_{t=81}^{\infty} 80 \cdot (a^{t-1} - a^t) \\ &= 1 \cdot (a^0 - a^1) \\ &\quad + 2 \cdot (a^1 - a^2) \\ &\quad + 3 \cdot (a^2 - a^3) \\ &\quad + 4 \cdot (a^3 - a^4) \\ &\quad + \cdots + 80 \cdot (a^{79} - a^{80}) + 80 \cdot (a^{80} - a^{81}) + \cdots \\ &= \frac{1 - a^{80}}{1 - a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{t=5}^{\infty} p_t \cdot \min(t-4, 76) &= \sum_{t=5}^{80} (t-4) \cdot (a^{t-1} - a^t) + \sum_{t=81}^{\infty} 76 \cdot (a^{t-1} - a^t) \\ &= 1 \cdot (a^4 - a^5) \\ &\quad + 2 \cdot (a^5 - a^6) \\ &\quad + 3 \cdot (a^6 - a^7) \\ &\quad + \cdots + 76 \cdot (a^{79} - a^{80}) + 76 \cdot (a^{80} - a^{81}) + \cdots \\ &= a^4 \cdot \frac{1 - a^{76}}{1 - a}\end{aligned}$$

となるので、

$a^4 = 2^{-\frac{4}{8}} = 2^{-\frac{1}{2}} = 0.7071$、 $a^{80} = 2^{-10} = 0.000976$ より、

$$P_A / P_B = \frac{\dfrac{1 - a^{80}}{1 - a}}{a^4 \cdot \dfrac{1 - a^{76}}{1 - a}} = \frac{1 - a^{80}}{a^4 - a^{80}} = 1.415$$

を得る。

解答：（D）

問題 2.

設問	解答	配点	設問	解答	配点
（1）	①（B）②（H）	7 点	（4）	①（D）②（G）	7 点
（2）	（C）	7 点	（5）	（F）	7 点
（3）	（D）	7 点	（6）	（E）	7 点

※（1）（4）は、それぞれ完答の場合のみ得点。

（1）

$\mathring{e}_x$ を x で微分すると、

$$\frac{d}{dx}\mathring{e}_x = \frac{d}{dx}\int_0^{-\frac{b}{a}-x} {}_t p_x \, dt$$

$$= \int_0^{-\frac{b}{a}-x} \frac{d}{dx}\left(\frac{l_{x+t}}{l_x}\right) dt$$

$$= \int_0^{-\frac{b}{a}-x} \left(\frac{\frac{d}{dx}l_{x+t}\cdot l_x - l_{x+t}\cdot\frac{d}{dx}l_x}{(l_x)^2}\right) dt$$

ここで、$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\cdot\frac{d}{dx}l_x$ 、$\mu_{x+t} = -\frac{1}{l_{x+t}}\cdot\frac{d}{dx}l_{x+t}$ から、

$$\frac{d}{dx}\mathring{e}_x = \int_0^{-\frac{b}{a}-x} \left(-\frac{l_{x+t}}{l_x}\mu_{x+t} + \frac{l_{x+t}}{l_x}\mu_x\right) dt$$

$$= -\frac{1}{l_x}\int_0^{-\frac{b}{a}-x} l_{x+t}\mu_{x+t}\,dt + \mu_x\int_0^{-\frac{b}{a}-x}\frac{l_{x+t}}{l_x}\,dt$$

$$= \mu_x \mathring{e}_x - 1$$

これに $\mathring{e}_x = ax+b$ を代入して

$$\mu_x = \frac{a+1}{ax+b}$$

を得る。さらに、$l_x = l_0 \cdot e^{-\int_0^x \mu_t dt}$ であり、

$$-\int_0^x \mu_t dt = -\int_0^x \frac{a+1}{at+b}dt$$

$$= -\frac{a+1}{a}\left[\log(at+b)\right]_0^x$$

$$= -\frac{a+1}{a}\log\frac{ax+b}{b}$$

から、

$$l_x = l_0 \cdot e^{-\frac{a+1}{a}\log\frac{ax+b}{b}}$$

$$= l_0 \cdot \left(\frac{b}{ax+b}\right)^{\frac{a+1}{a}}$$

を得る。

次に、得られたμ_x、l_xの式を$\dfrac{\mu_{60}}{\mu_{30}}=\dfrac{3}{2}$、$\dfrac{l_{60}}{l_{30}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$に適用すると

$$\frac{\mu_{60}}{\mu_{30}}=\frac{\dfrac{a+1}{60a+b}}{\dfrac{a+1}{30a+b}}=\frac{30a+b}{60a+b}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{l_{60}}{l_{30}}=\left(\frac{\dfrac{b}{60a+b}}{\dfrac{b}{30a+b}}\right)^{\frac{a+1}{a}}=\left(\frac{30a+b}{60a+b}\right)^{\frac{a+1}{a}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{a+1}{a}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

すなわち、$\dfrac{a+1}{a}=-\dfrac{1}{2}$なので、$a=-\dfrac{2}{3}$となり、これを$\dfrac{30a+b}{60a+b}=\dfrac{3}{2}$に代入して$b=80$となる。

したがって、$\mathring{e}_{60}=-\dfrac{2}{3}\cdot 60+80=40$となる。

解答：①（**B**）②（**H**）

（２）

$$l_x=l_0\cdot\exp\left\{-\int_0^x\mu_t dt\right\}=l_0\cdot\exp\left\{-\int_0^x(\mu_t^A+\mu_t^B)dt\right\}=l_0\cdot\exp\left\{-\int_0^x\left(\frac{2}{a-t}+1\right)dt\right\}$$

$$=l_0\cdot\exp\left\{[2\log(a-t)]_0^x-[t]_0^x\right\}=a^2\cdot\exp\left\{\log\left(\frac{a-x}{a}\right)^2-x\right\}=(a-x)^2\cdot e^{-x}$$

$$d_x^A=\int_0^1 l_{x+s}\cdot\mu_{x+s}^A ds=\int_x^{x+1}l_t\cdot\mu_t^A dt=\int_x^{x+1}(a-t)^2\cdot e^{-t}\cdot\frac{2}{a-t}dt=\int_x^{x+1}2\cdot(a-t)\cdot e^{-t}dt$$

$$=2\cdot\left\{[-(a-t)\cdot e^{-t}]_x^{x+1}-\int_x^{x+1}e^{-t}\ dt\right\}=2\cdot\left\{-(a-x-1)\cdot e^{-(x+1)}+(a-x)\cdot e^{-x}+e^{-(x+1)}-e^{-x}\right\}$$

$$=2\cdot\left\{e^{-x}\cdot(a-x-1)-e^{-(x+1)}\cdot(a-x-2)\right\}$$

以上より、

$$d_x^B=l_x-l_{x+1}-d_x^A=e^{-x}\cdot(a-x)^2-e^{-(x+1)}\cdot(a-x-1)^2-2\cdot\left\{e^{-x}\cdot(a-x-1)-e^{-(x+1)}\cdot(a-x-2)\right\}$$

$$=e^{-x}\cdot\left\{(a-x)^2-2(a-x)+1+1\right\}-e^{-(x+1)}\cdot\left\{(a-x-1)^2-2(a-x-1)+1+1\right\}$$

$$=e^{-x}\cdot\left\{(a-x-1)^2+1\right\}-e^{-(x+1)}\cdot\left\{(a-x-2)^2+1\right\}$$

解答：（**C**）

（３）

一時払純保険料をP、一時払営業保険料をP^*、第t年度末の純保険料式責任準備金を${}_tV$とした場合、ファクラーの再帰式より、

$t=1$のとき、 ${}_0V+P=vq_{50}\cdot P^*+vp_{50}\cdot{}_1V$ … (I)

$t=2,3$のとき、 ${}_{t-1}V=vq_{50+t-1}\cdot P^*+vp_{50+t-1}\cdot{}_tV$ … (II)

$t=4$～10のとき、 ${}_{t-1}V=v\cdot{}_tV$ … (III)

$t\geqq 11$のとき、 ${}_{t-1}V=vq_{50+t-1}+vp_{50+t-1}\cdot{}_tV$ … (IV)

となる。

ここで、(I)および(II)より、

$P = P^* \cdot A^{1}_{50:\overline{3}|} + A_{50:\overline{3}|}^{\ \ 1} \cdot {}_3V$

また、

(III)より、 ${}_3V = v^7 \cdot {}_{10}V = v^7 \cdot A_{60}$

題意より、 $P^* = P + 0.017 \cdot P^* + 0.001 \cdot \ddot{a}_{50} \cdot P^*$

以上より、

$$P^* = \frac{A_{50:\overline{3}|}^{\ \ 1} \cdot v^7 \cdot A_{60}}{1 - 0.017 - 0.001 \cdot \ddot{a}_{50} - A^{1}_{50:\overline{3}|}}$$

$$= \frac{0.9439 \cdot 1.01^{-7} \cdot 0.8667}{0.983 - 0.001 \cdot (1 - 0.8042) \cdot \frac{1.01}{0.01} - (0.9708 - 0.9439)}$$

$$= \frac{0.763036}{0.936324} = 0.814927$$

解答：（D）

（４）

年金原資を F 、年金開始後の予定維持費率を γ' とすると、

$$F = (1 + \gamma') \cdot \ddot{a}_{60} + \left(F \cdot A^{1}_{60:\overline{10}|} - (IA)^{1}_{60:\overline{10}|} \right)$$

よって、

$$F = \frac{(1 + \gamma') \cdot \ddot{a}_{60} - (IA)^{1}_{60:\overline{10}|}}{1 - A^{1}_{60:\overline{10}|}}$$

ここで、

$$\ddot{a}_{60} = \frac{N_{60}}{D_{60}} = \frac{982{,}283}{49{,}560} = 19.82008$$

$$A^{1}_{60:\overline{10}|} = \frac{M_{60} - M_{70}}{D_{60}} = \frac{39{,}834 - 34{,}064}{49{,}560} = 0.11642$$

$$(IA)^{1}_{60:\overline{10}|} = \frac{R_{60} - R_{70} - 10M_{70}}{D_{60}} = \frac{857{,}705 - 481{,}747 - 10 \times 34{,}064}{49{,}560} = 0.71263$$

より、

$$F = \frac{(1 + 0.005) \cdot 19.82008 - 0.71263}{1 - 0.11642} = 21.73719$$

を得る。

営業保険料を P^* 、予定新契約費率を α 、予定集金費率を β 、年金開始前の予定維持費率を γ 、F（年金開始後の予定事業費は F の計算の際に含まれていることに注意）を用いて収支相等の式を書くと

$$P^* \cdot \ddot{a}_{40:\overline{20}|} = \frac{D_{60}}{D_{40}} \cdot F + P^* \cdot (IA)^{1}_{40:\overline{20}|} + \alpha \cdot F + \beta \cdot P^* \cdot \ddot{a}_{40:\overline{20}|} + \gamma \cdot F \cdot \ddot{a}_{40:\overline{20}|}$$

であるから、これを解くと、

$$P^* = \frac{\frac{D_{60}}{D_{40}} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{40:\overline{20}|}}{(1 - \beta) \cdot \ddot{a}_{40:\overline{20}|} - (IA)^{1}_{40:\overline{20}|}} \cdot F$$

ここで、

$$\ddot{a}_{40:\overline{20}|} = \frac{N_{40} - N_{60}}{D_{40}} = \frac{2{,}145{,}074 - 982{,}283}{65{,}413} = 17.77615$$

$$(IA)^{1}_{40:\overline{20}|}=\frac{R_{40}-R_{60}-20\cdot M_{60}}{D_{40}}=\frac{1{,}710{,}259-857{,}705-20\times 39{,}834}{65{,}413}=0.85417$$

より、

$$P^{*}=\frac{\dfrac{49{,}560}{65{,}413}+0.02+0.001\times 17.77615}{(1-0.03)\cdot 17.77615-0.85417}\times 21.73719=1.05501$$

解答：①（D）②（G）

（5）

$$ {}^{20}_{1}V^{[z]}_{30:\overline{30}|}=A_{31:\overline{29}|}-\left({}_{20}P_{30:\overline{30}|}+\frac{\alpha}{\ddot{a}_{30:\overline{20}|}}\right)\cdot\ddot{a}_{31:\overline{19}|}=0$$

$$\alpha=\left({}_{19}P_{31:\overline{29}|}-{}_{20}P_{30:\overline{30}|}\right)\cdot\ddot{a}_{30:\overline{20}|}$$

よって、

$$\begin{aligned}
{}^{20}_{1}V^{[5z]}_{30:\overline{30}|}&=A_{31:\overline{29}|}-{}_{20}P_{30:\overline{30}|}\cdot\ddot{a}_{31:\overline{19}|}-\frac{\alpha}{\ddot{a}_{30:\overline{5}|}}\cdot\ddot{a}_{31:\overline{4}|}\\
&=\left({}_{19}P_{31:\overline{29}|}-{}_{20}P_{30:\overline{30}|}\right)\cdot\ddot{a}_{31:\overline{19}|}-\left({}_{19}P_{31:\overline{29}|}-{}_{20}P_{30:\overline{30}|}\right)\cdot\ddot{a}_{30:\overline{20}|}\cdot\frac{\ddot{a}_{31:\overline{4}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{5}|}}\\
&=\left(\frac{A_{31:\overline{29}|}}{\ddot{a}_{31:\overline{19}|}}-\frac{A_{30:\overline{30}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{20}|}}\right)\cdot\left(\ddot{a}_{31:\overline{19}|}-\ddot{a}_{30:\overline{20}|}\cdot\frac{\ddot{a}_{31:\overline{4}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{5}|}}\right)\\
&=\left(\frac{\dfrac{A_{30:\overline{30}|}-v\cdot(1-p_{30})}{v\cdot p_{30}}}{\dfrac{\ddot{a}_{30:\overline{20}|}-1}{v\cdot p_{30}}}-\frac{A_{30:\overline{30}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{20}|}}\right)\cdot\left(\frac{\ddot{a}_{30:\overline{20}|}-1}{v\cdot p_{30}}-\ddot{a}_{30:\overline{20}|}\cdot\frac{\ddot{a}_{30:\overline{5}|}-1}{v\cdot p_{30}\cdot\ddot{a}_{30:\overline{5}|}}\right)\\
&=\left(\frac{A_{30:\overline{30}|}-v\cdot(1-p_{30})}{\ddot{a}_{30:\overline{20}|}-1}-\frac{A_{30:\overline{30}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{20}|}}\right)\cdot\left(\frac{\ddot{a}_{30:\overline{5}|}\cdot(\ddot{a}_{30:\overline{20}|}-1)}{v\cdot p_{30}\cdot\ddot{a}_{30:\overline{5}|}}-\frac{\ddot{a}_{30:\overline{20}|}\cdot(\ddot{a}_{30:\overline{5}|}-1)}{v\cdot p_{30}\cdot\ddot{a}_{30:\overline{5}|}}\right)\\
&=\left(\frac{A_{30:\overline{30}|}-v\cdot(1-p_{30})}{\ddot{a}_{30:\overline{20}|}-1}-\frac{A_{30:\overline{30}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{20}|}}\right)\cdot\left(\frac{\ddot{a}_{30:\overline{20}|}-\ddot{a}_{30:\overline{5}|}}{v\cdot p_{30}\cdot\ddot{a}_{30:\overline{5}|}}\right)\\
&=\left(\frac{0.648-\dfrac{1}{1.015}\cdot(1-0.99914)}{17.235-1}-\frac{0.648}{17.235}\right)\cdot\left(\frac{17.235-4.846}{\dfrac{1}{1.015}\cdot 0.99914\cdot 4.846}\right)\\
&=0.0058790
\end{aligned}$$

解答：（F）

（６）
年払純保険料を P とすると、

$$P = \frac{0.5A_{\overset{1}{x}y} + 0.5A_{x\overset{2}{y}} + A_{\overset{2}{x}y}}{\ddot{a}_{xy}}$$

$$= \frac{0.5A_{\overset{1}{x}y} + 0.5\left(A_y - A_{x\overset{1}{y}}\right) + \left(A_x - A_{\overset{1}{x}y}\right)}{\ddot{a}_{xy}}$$

$$= \frac{A_x + 0.5A_y - 0.5\left(A_{\overset{1}{x}y} + A_{x\overset{1}{y}}\right)}{\ddot{a}_{xy}}$$

$$= \frac{A_x + 0.5A_y - 0.5\,A_{xy}}{\ddot{a}_{xy}}$$

$$= \frac{1 - d\left(\ddot{a}_x + 0.5\ddot{a}_y - 0.5\ddot{a}_{xy}\right)}{\ddot{a}_{xy}}$$

$$= \frac{1 - \dfrac{0.015}{1.015} \cdot \left(32.39 + 0.5 \times 39.83 - 0.5 \times 31.41\right)}{31.41}$$

$$= 0.014617$$

<u>解答：（**E**）</u>

問題 3.

設問			解答	配点
（１）	(a)	①	**（ヘ）**	１点（完答のみ）
		②	**（ツ）**	
		③	**（オ）**	１点（完答のみ）
		④	**（セ）**	
		⑤	**（シ）**	１点（完答のみ）
		⑥	**（ソ）**	
		⑦	**（マ）**	１点
		⑧	**（カ）**	１点（完答のみ）
		⑨	**（オ）**	
		⑩	**（ミ）**	１点
	(b)		**（C）**	3点

設問		解答	配点
（２）	①	**（エ）**	１点
	②	**（ク）**	１点（完答のみ）
	③	**（ケ）**	
	④	**（テ）**	１点
	⑤	**（ケ）**	１点（完答のみ）
	⑥	**（タ）**	
	⑦	**（ク）**	１点（完答のみ）
	⑧	**（チ）**	
	⑨	**（エ）**	１点（完答のみ）
	⑩	**（ノ）**	
	⑪	**（ク）**	１点（完答のみ）
	⑫	**（ケ）**	
	⑬	**（エ）**	
	⑭	**（フ）**	１点
	⑮	**（ノ）**	１点

※（２）の②と③、⑤と⑥、⑦と⑧、⑨と⑩、⑪～⑬はそれぞれ順不同。また、選択肢（⑤、⑥）の組と、選択肢（⑦、⑧）の組も、順不同。

（１）

(a) x 歳加入、期末払の n 年完全年金の現価を $\mathring{a}_{x:\overline{n}|}$ とすると、

$$\mathring{a}_{x:\overline{n}|}=a_{x:\overline{n}|}+\alpha$$

$$\alpha=\sum_{t=0}^{n-1}\int_0^1 s\cdot\boxed{\text{①}\,v^{t+s}}\cdot\boxed{\text{②}\,{}_{t+s}p_x}\cdot\mu_{x+t+s}ds$$

と書ける。ここに、α は期中の死亡に対して支払う年金の現価である。

よって、

$$\mathring{a}_{x:\overline{n}|}=\sum_{t=0}^{n-1}\int_0^1\left(\boxed{\text{③}\,a_{\overline{t}|}}+s\cdot\boxed{\text{①}\,v^{t+s}}\right)\cdot\boxed{\text{②}\,{}_{t+s}p_x}\cdot\mu_{x+t+s}ds+\boxed{\text{④}\,a_{\overline{n}|}}\cdot{}_np_x\quad\cdots\quad(\text{I})$$

と表すことができる。

x 歳加入、期末払の n 年連続年金の現価を $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ とすると、

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|}=\sum_{t=0}^{n-1}\int_0^1\boxed{\text{⑤}\,\bar{a}_{\overline{t+s}|}}\cdot\boxed{\text{②}\,{}_{t+s}p_x}\cdot\mu_{x+t+s}ds+\boxed{\text{⑥}\,\bar{a}_{\overline{n}|}}\cdot{}_np_x\quad\cdots\quad(\text{II})$$

また、

$$\bar{a}_{\overline{n}|}=\boxed{\text{⑦}\,\frac{i}{\delta}}\cdot a_{\overline{n}|}\quad\cdots\quad(\text{III})$$

$$\boxed{\text{⑤}\,\bar{a}_{\overline{t+s}|}}=\boxed{\text{⑧}\,\bar{a}_{\overline{t}|}}+\frac{v^t-v^{t+s}}{\delta}=\boxed{\text{⑦}\,\frac{i}{\delta}}\cdot\boxed{\text{⑨}\,a_{\overline{t}|}}+\frac{v^{t+s}}{\delta}\cdot\left\{(1+i)^s-1\right\}\quad\cdots\quad(\text{IV})$$

ここで、$(1+i)^s-1\fallingdotseq si$ を用いて(IV)を整理し、これと(III)を用いて、(I)と(II)を比較すれば、

$$\mathring{a}_{x:\overline{n}|}\fallingdotseq\boxed{\text{⑩}\,\frac{\delta}{i}}\cdot\bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

が成り立つ。

(b)

$${}_t p_x = e^{-0.005t}$$

$$\mathring{a}_{x:\overline{20|}} \fallingdotseq \frac{\delta}{i} \cdot \bar{a}_{x:\overline{20|}} = \frac{\delta}{i} \cdot \int_0^{20} {}_t p_x \cdot v^t dt = \frac{\delta}{i} \cdot \frac{1}{0.025}\left(1 - e^{-0.5}\right)$$

$$a_{x:\overline{20|}} = \sum_{t=1}^{20} v^t \cdot {}_t p_x = \sum_{t=1}^{20} e^{-(\delta+\mu)\cdot t} = \sum_{t=1}^{20} e^{-0.025t} = \frac{1-e^{-0.5}}{1-e^{-0.025}} e^{-0.025}$$

よって、

$$\frac{\mathring{a}_{x:\overline{20|}}}{a_{x:\overline{20|}}} \fallingdotseq \frac{\delta}{i} \cdot \frac{1-e^{-0.025}}{0.025 \cdot e^{-0.025}} = \frac{0.02 \cdot \left(1 - 0.99501 1^{5}\right)}{0.025 \cdot \left(0.99501 - 0.99501 1^{5}\right)} = 1.002514$$

<u>解答：（**C**）</u>

（２）

(a) X、Y の少なくとも一方が生存している場合に支払われる連続払の連生年金 $\bar{a}_{\overline{xy}}$ について、経過 t における微分 $\frac{d}{dt}\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}$ を考える。

$$\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}} = \int_0^\infty v^s \cdot {}_s p_{\overline{x+t,y+t}} ds = \int_0^\infty v^s \cdot \left({}_s p_{x+t} + {}_s p_{y+t} - {}_s p_{x+t,y+t}\right) ds = \bar{a}_{x+t} + \bar{a}_{y+t} - \bar{a}_{x+t,y+t}$$

であり、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bar{a}_{x+t,y+t} &= \frac{d}{dt}\int_0^\infty v^s \cdot {}_s p_{x+t,y+t} ds \\
&= \int_0^\infty v^s \cdot \left\{\left(\frac{d}{dt} {}_s p_{x+t}\right) \cdot {}_s p_{y+t} + {}_s p_{x+t} \cdot \left(\frac{d}{dt} {}_s p_{y+t}\right)\right\} ds \\
&= \int_0^\infty v^s \cdot {}_s p_{x+t} \cdot \left(\mu_{x+t} - \mu_{x+t+s}\right) {}_s p_{y+t} ds + \int_0^\infty v^s \cdot {}_s p_{x+t} \cdot \left(\mu_{y+t} - \mu_{y+t+s}\right) {}_s p_{y+t} ds \\
&= \mu_{x+t} \cdot \int_0^\infty v^s \cdot {}_s p_{x+t} \cdot {}_s p_{y+t} ds - \int_0^\infty v^s \cdot {}_s p_{x+t} \cdot {}_s p_{y+t} \cdot \mu_{x+t+s} ds \\
&\quad + \mu_{y+t} \cdot \int_0^\infty v^s \cdot {}_s p_{x+t} \cdot {}_s p_{y+t} ds - \int_0^\infty v^s \cdot {}_s p_{x+t} \cdot {}_s p_{y+t} \cdot \mu_{y+t+s} ds \\
&= \left(\mu_{x+t} + \mu_{y+t}\right) \cdot \bar{a}_{x+t,y+t} - \bar{A}_{x+t,y+t} \\
&= \left(\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta\right) \cdot \bar{a}_{x+t,y+t} - 1 \quad (\because \bar{A}_{x+t,y+t} + \boxed{①\delta} \cdot \bar{a}_{x+t,y+t} = 1)
\end{aligned}$$

同様に

$$\frac{d}{dt}\bar{a}_{x+t} = \left(\mu_{x+t} + \delta\right) \cdot \bar{a}_{x+t} - 1 、 \frac{d}{dt}\bar{a}_{y+t} = \left(\mu_{y+t} + \delta\right) \cdot \bar{a}_{y+t} - 1$$

よって、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}} &= \left(\mu_{x+t} + \delta\right) \cdot \bar{a}_{x+t} - 1 + \left(\mu_{y+t} + \delta\right) \cdot \bar{a}_{y+t} - 1 - \left(\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta\right) \cdot \bar{a}_{x+t,y+t} + 1 \\
&= \left(\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta\right) \cdot \left(\bar{a}_{x+t} + \bar{a}_{y+t} - \bar{a}_{x+t,y+t}\right) - \mu_{y+t} \cdot \bar{a}_{x+t} - \mu_{x+t} \cdot \bar{a}_{y+t} - 1 \\
&= \left(\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta\right) \cdot \bar{a}_{\overline{x+t,y+t}} - \mu_{y+t} \cdot \bar{a}_{x+t} - \mu_{x+t} \cdot \bar{a}_{y+t} - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}} &= \left(\boxed{①\delta} + \boxed{②\mu_{x+t}} + \boxed{③\mu_{y+t}}\right) \cdot \boxed{④\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}} \\
&\quad - \boxed{⑤\mu_{y+t}} \cdot \boxed{⑥\bar{a}_{x+t}} - \boxed{⑦\mu_{x+t}} \cdot \boxed{⑧\bar{a}_{y+t}} - 1
\end{aligned}$$

(b) 次に、X、Y 共存中の平準純保険料式責任準備金 ${}_tV_{\overline{xy}}^{(\infty)}$ について、経過 t における微分 $\dfrac{d}{dt}{}_tV_{\overline{xy}}^{(\infty)}$ を考える。

まず、${}_tV_{\overline{xy}}^{(\infty)} = \bar{A}_{\overline{x+t,y+t}} - \bar{P}_{\overline{xy}}^{(\infty)} \cdot \bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}$ および $\bar{A}_{\overline{x+t,y+t}} + \delta \cdot \bar{a}_{\overline{x+t,y+t}} = 1$ より、

$$ {}_tV_{\overline{xy}}^{(\infty)} = 1 - \left(\boxed{⑨\delta} + \boxed{⑩\bar{P}_{\overline{xy}}^{(\infty)}} \right) \cdot \bar{a}_{\overline{x+t,y+t}} \quad \cdots \quad (\mathrm{I}) $$

これを t で微分して(a)の結果を代入すれば、

$$ \frac{d}{dt}{}_tV_{\overline{xy}}^{(\infty)} = -\left(\delta + \bar{P}_{\overline{xy}}^{(\infty)}\right) \cdot \frac{d}{dt}\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}} $$

$$ = -\left(\delta + \bar{P}_{\overline{xy}}^{(\infty)}\right) \cdot \left\{ \left(\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta\right) \cdot \bar{a}_{\overline{x+t,y+t}} - \mu_{y+t} \cdot \bar{a}_{x+t} - \mu_{x+t} \cdot \bar{a}_{y+t} - 1 \right\} $$

また、(I)より、

$$ \bar{a}_{\overline{x+t,y+t}} = \frac{1 - {}_tV_{\overline{xy}}^{(\infty)}}{\delta + \bar{P}_{\overline{xy}}^{(\infty)}} $$ であり、同様に、$\bar{a}_{x+t} = \dfrac{1 - {}_tV'_x}{\delta + \bar{P}_{\overline{xy}}^{(\infty)}}$、$\bar{a}_{y+t} = \dfrac{1 - {}_tV'_y}{\delta + \bar{P}_{\overline{xy}}^{(\infty)}}$ より

$$ \frac{d}{dt}{}_tV_{\overline{xy}}^{(\infty)} = -\left\{ \left(\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta\right) \cdot \left(1 - {}_tV_{\overline{xy}}^{(\infty)}\right) - \mu_{y+t} \cdot \left(1 - {}_tV'_x\right) - \mu_{x+t} \cdot \left(1 - {}_tV'_y\right) - \delta - \bar{P}_{\overline{xy}}^{(\infty)} \right\} $$

$$ = \left(\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta\right) \cdot {}_tV_{\overline{xy}}^{(\infty)} + \bar{P}_{\overline{xy}}^{(\infty)} - \left(\mu_{y+t} \cdot {}_tV'_x + \mu_{x+t} \cdot {}_tV'_y\right) $$

$$ \frac{d}{dt}{}_tV_{\overline{xy}}^{(\infty)} = \left(\boxed{⑪\mu_{x+t}} + \boxed{⑫\mu_{y+t}} + \boxed{⑬\delta} \right) \cdot \boxed{⑭{}_tV_{\overline{xy}}^{(\infty)}} + \boxed{⑮\bar{P}_{\overline{xy}}^{(\infty)}} - \left(\mu_{y+t} \cdot {}_tV'_x + \mu_{x+t} \cdot {}_tV'_y\right) $$

という微分方程式で表すことができる。