数学（問題）

〔問題１から問題３を通じて必要であれば（付表）に記載された数値を用いなさい。〕

問題１． 次の（１）～（１２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

各５点（計６０点）

（1） A，B，C の3人がこの順番（$ABCABC$・・・）で2つのサイコロを同時に投げる試行を繰り返し、最初に2つのサイコロの目の合計が7となった者を勝ちと定める。このとき、B の勝つ確率は $\boxed{}$ である。

（A） $\dfrac{30}{91}$　（B） $\dfrac{36}{91}$　（C） $\dfrac{30}{101}$　（D） $\dfrac{36}{101}$

（E） $\dfrac{132}{397}$　（F） $\dfrac{144}{397}$　（G） $\dfrac{132}{407}$　（H） $\dfrac{144}{407}$

（2）箱 A には赤球が1個と白球が3個、箱 B には白球が4個入っている。箱 A，B からそれぞれ1個の球を同時に取り出し、A から取り出した球は B に、B から取り出した球は A に移し替える試行を繰り返す。この試行を4回繰り返したとき、赤球が箱 A に入っている確率は $\boxed{}$ である。

（A） $\dfrac{3}{4}$　（B） $\dfrac{5}{8}$　（C） $\dfrac{9}{16}$　（D） $\dfrac{13}{24}$

（E） $\dfrac{17}{32}$　（F） $\dfrac{25}{48}$　（G） $\dfrac{33}{64}$　（H） $\dfrac{65}{128}$

（３）確率変数 X_i（$i=1,\cdots,n$）（$n\geq 2$）は互いに独立で、すべて区間（$0,m$）（$m>0$）の一様分布に従うものとする。確率変数 Y を $\min(X_1,\cdots,X_n)$ とすると、Y の確率密度関数 $g(y)$ および期待値 $E(Y)$ はそれぞれ、

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{\boxed{\quad ① \quad}}{\boxed{\quad ② \quad}} & (0<y<m)\\[2ex] 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

$$E(Y)=\frac{\boxed{\quad ③ \quad}}{\boxed{\quad ④ \quad}}$$

である。

［①、②の選択肢］

（Ａ）1　（Ｂ）m^{n-1}　（Ｃ）m^n　（Ｄ）m^{n+1}　（Ｅ）$n\cdot(m-y)^{n-1}$

（Ｆ）$n\cdot m^n$　（Ｇ）$(m-y)^{n-1}$　（Ｈ）$(n-y)^{n-1}$　（Ｉ）$n\cdot m^{n-1}$　（Ｊ）$m\cdot(n-y)^{n-1}$

［③、④の選択肢］

（Ａ）1　（Ｂ）2　（Ｃ）m　（Ｄ）$m+1$　（Ｅ）$m+2$

（Ｆ）$2m$　（Ｇ）n　（Ｈ）$n+1$　（Ｉ）$n+2$　（Ｊ）$2n$

（４）確率変数 X ， Y は互いに独立で、同じ確率分布 $P(X=k)=P(Y=k)=p\cdot q^k$ （ $k=0,1,\cdots$ ）（ $p>0, q>0, p+q=1$ ）に従うものとする。確率変数 $Z=X+Y$ の積率母関数を $\phi(\theta)$ とおくと、

$$\phi(\theta)=\left(\frac{\boxed{①}}{1-\boxed{②}}\right)^2 \quad \left(\boxed{②}<1\right)$$ であり、

Z の原点のまわりの２次の積率は $\dfrac{\boxed{③}}{\boxed{④}}$ である。

（A） $p\cdot e^{\theta}$　（B） $p^2\cdot e^{\theta}$　（C） $q\cdot e^{\theta}$　（D） $q^2\cdot e^{\theta}$

（E） p　（F） p^2　（G） q　（H） q^2

（I） $2q$　（J） $2q\cdot(1+q)$　（K） $2q\cdot(1+2q)$　（L） $2q\cdot(1+3q)$

（５）あるレストランに A 氏は12時 x 分、B 氏は同日の12時 y 分にそれぞれ入店する。A 氏、B 氏とも入店してから店を出るまでの時間は t_0 （ $0<t_0<60$ ）分であり、レストランを出た後、再度入店することはないものとする。

このとき、A 氏、B 氏が同時刻にレストラン内にいる確率が $\dfrac{1}{3}$ となるように t_0 を定めると、

$$t_0=\boxed{①}\times\left\{\boxed{②}-\left(\boxed{③}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

である。

なお、x, y は、それぞれ区間（0,60）の一様分布に従う確率変数 X, Y の実現値であり、X, Y は互いに独立であるとする。

（A） 2　（B） 3　（C） 5　（D） 6　（E） 10

（F） 12　（G） 20　（H） 30　（I） 40　（J） 60

（6）互いに独立な 2 つの正規母集団 A : $N(\mu_A,1)$, B : $N(\mu_B,4)$ がある。母集団 A から大きさ n_A の標本を、母集団 B から大きさ n_B の標本をそれぞれ抽出し、母平均の差を区間推定する。両母集団からの標本の大きさの和 $n = n_A + n_B$ が一定であるとき、母平均の差の信頼区間の幅を最小にする標本数の組み合わせは n_A および n_B について、$\boxed{}$ の関係が成立するときである。

（A）$n_A = 2n_B$　　（B）$n_A = 3n_B$　　（C）$n_A = 4n_B$　　（D）$n_A = 5n_B$

（E）$2n_A = n_B$　　（F）$3n_A = n_B$　　（G）$4n_A = n_B$　　（H）$5n_A = n_B$

（7）ある会社では、毎年無作為に選んだ 20 人の男性社員に対して体重の調査を実施している。昨年の調査の結果は、平均 70 (kg)、分散 5 (kg^2) であった。この会社の男性社員の今年の平均体重について、帰無仮説を「平均体重は昨年から変化していない」として有意水準 5% で検定を行った結果、帰無仮説は採択された。このとき、今年の平均体重として取りうる値のうち、下限に最も近い数値は $\boxed{\quad ① \quad}$ (kg) であり、上限に最も近い数値は $\boxed{\quad ② \quad}$ (kg) である。ただし、この会社の男性社員の体重の分布は正規分布（母分散は未知）に従うものとする。

（A）67.5992　　（B）68.9263　　（C）68.9299　　（D）69.0200　　（E）69.1130

（F）70.8870　　（G）70.9800　　（H）71.0701　　（I）71.0737　　（J）72.4008

（８）表と裏の出る確率がともに等しくそれぞれ50% と考えられるコインがある。このコインを繰り返し投げた結果、表の出る回数が少なかったと言えるかどうかについて、帰無仮説 H_0 を「表の出る確率は50% である」として有意水準10% で検定を行った。

（ア）コインを 6 回投げて表が出た回数が1回であった場合、精密法での検定の結果、帰無仮説 H_0 は［　①　］される。

（イ）コインを12 回投げて表が出た回数が 5 回であった場合、近似法での検定の結果、帰無仮説 H_0 は［　②　］される。

（ウ）コインを 24 回投げて表が出た回数が 9 回であった場合、近似法での検定の結果、帰無仮説 H_0 は［　③　］される。

（A）　採択　　　　（B）　棄却

（９）3 種類のデータ x_{1i}, x_{2i}, y_i について 5 個の観測値 (x_{11}, x_{21}, y_1), (x_{12}, x_{22}, y_2), (x_{13}, x_{23}, y_3), (x_{14}, x_{24}, y_4), (x_{15}, x_{25}, y_5) が与えられている。ここで、

$\sum_{i=1}^{5} x_{1i} = 3$、$\sum_{i=1}^{5} x_{2i} = 4$、$\sum_{i=1}^{5} y_i = 16$、$\sum_{i=1}^{5} {x_{1i}}^2 = 3$、$\sum_{i=1}^{5} {x_{2i}}^2 = 4$、$\sum_{i=1}^{5} {y_i}^2 = 54$、$\sum_{i=1}^{5} x_{1i} x_{2i} = 2$

$\sum_{i=1}^{5} x_{1i} y_i = 10$、$\sum_{i=1}^{5} x_{2i} y_i = 14$

であった。

最小二乗法を用いて $y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ で線形回帰した場合、α，β_1，β_2 の推定値はそれぞれ［　①　］、［　②　］、［　③　］である。

（A）-3　　（B）$-\frac{5}{2}$　　（C）-2　　（D）$-\frac{3}{2}$

（E）-1　　（F）$-\frac{1}{2}$　　（G）$\frac{1}{2}$　　（H）1

（I）$\frac{3}{2}$　　（J）2　　（K）$\frac{5}{2}$　　（L）3

（１０）識別可能な$MA(1)$モデル$Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$（$E(\varepsilon_t) = 0, V(\varepsilon_t) = \sigma^2$）に従っていると考えられる時系列データ$\{y_t\}_{t=1}^{5}$が下表のとおり与えられている。このとき、標本自己相関からパラメータθ_0，θ_1を推定すると、θ_0に最も近い数値は［①］であり、θ_1に最も近い数値は［②］である。

t	1	2	3	4	5
y_t	20	19	18	21	20

［①の選択肢］

（Ａ）18.6　（Ｂ）18.8　（Ｃ）19.0　（Ｄ）19.2

（Ｅ）19.4　（Ｆ）19.6　（Ｇ）19.8　（Ｈ）20.0

［②の選択肢］

（Ａ）-5.5954　（Ｂ）-4.5530　（Ｃ）0.1787　（Ｄ）0.1914

（Ｅ）0.2196　（Ｆ）0.2446　（Ｇ）4.0888　（Ｈ）5.2253

（１１）確率過程$\{X_s\}$、$s \geq 0$を標準ブラウン運動とする。$t > s$とすると、

$E(X_t \cdot X_s) =$［①］、$E\left[(X_t - X_s)^2\right] =$［②］

である。

（Ａ）0　（Ｂ）1　（Ｃ）2　（Ｄ）s　（Ｅ）t

（Ｆ）st　（Ｇ）$t-s$　（Ｈ）$t+s$　（Ｉ）$st-s^2$　（Ｊ）$st+s^2$

（１２）確率密度関数 $g(x)$ および定数 c を用いて、確率密度関数が $f(x)$ である分布の確率変数を棄却法で生成したい。 $f(x)$ および $g(x)$ をそれぞれ、

$$f(x)=\frac{12}{11}(4x-4x^2+x^3) \qquad (0<x<1)$$

$$g(x)=1 \qquad (0<x<1)$$

とする。
このとき、 $f(x)$ に従う確率変数を求めるための繰り返し回数を最小にするような定数 c に最も近い数値は $\boxed{}$ である。

（A） 0.6465　　（B） 0.6667　　（C） 0.8066　　（D） 0.9465

（E） 1.0864　　（F） 1.1852　　（G） 1.2929　　（H） 1.4007

問題２． 次の（１）、（２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。
（２０点）

本問において、次のとおり記号を定義する。

X ：とりうる値が 0 以上の整数である離散的確率変数

$E(X)$ ：X の期待値、$V(X)$ ：X の分散、p_k ：X の確率分布

$$p_k = P(X = k) \quad (k = 0,1,2,\ldots)$$

$$q_k = P(X > k) \quad (k = 0,1,2,\ldots)$$

$$P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot s^k \qquad (|s| \le 1)$$

$$Q(s) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \cdot s^k \qquad (|s| \le 1)$$

また、本問において、$P(s)$、$Q(s)$ は収束するものとし、それぞれ $|s| < 1$ で微分可能とする。

さらに、$P'(1)$、$P''(1)$、$Q'(1)$ は、それぞれ s が下側（左側）から 1 に近づくときの極限値

$\lim_{s \to 1-0} P'(s)$、$\lim_{s \to 1-0} P''(s)$、$\lim_{s \to 1-0} Q'(s)$ とする。

（１） $P'(1)$、$P''(1)$ を用いて $E(X)$ および $V(X)$ を求める。

まず、$P(s)$ の定義より、$P(1) = \boxed{\quad ① \quad}$

次に、$P(s)$ を s について微分すると、

$$P'(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \boxed{\quad ② \quad}$$

と表される。

したがって、

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot p_k=\boxed{\quad ③ \quad}$$

となる。

さらに、$P^{'}(s)$を s について微分すると、

$$P^{''}(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\ \boxed{\quad ④ \quad}$$

と表されるので、

$$V(X)=\boxed{\quad ⑤ \quad}-\left\{\ \boxed{\quad ③ \quad}\ \right\}^2$$

となる。

（2） $Q(1)$、$Q^{'}(1)$を用いて $E(X)$ および $V(X)$ を求める。

まず、q_k の定義より、$q_0=\boxed{\quad ⑥ \quad}$

また、q_k と p_k の関係に着目すれば、$k\geq 1$ において q_k-q_{k-1} は p_k を用いて、

$$q_k-q_{k-1}=\boxed{\quad ⑦ \quad}\qquad (k\geq 1)$$

と表される。

次に、$Q(s)\cdot(1-s)$ を $P(s)$ を用いて表すと、

$$\begin{aligned}Q(s)\cdot(1-s)&=\sum_{k=0}^{\infty} q_k\cdot s^k\cdot(1-s)\\&=\sum_{k=0}^{\infty} q_k\cdot s^k-\sum_{k=0}^{\infty} q_k\cdot s^{k+1}\\&=\sum_{k=0}^{\infty} q_k\cdot s^k-\sum_{k=1}^{\infty} q_{k-1}\cdot s^k\\&=\boxed{\quad ⑧ \quad}\end{aligned}$$

となるので、$Q(1)$および$Q'(1)$は、$P'(1)$、$P''(1)$を用いて、

$$Q(1)=\boxed{\quad ⑨ \quad}$$

$$Q'(1)=\boxed{\quad ⑩ \quad}$$

と表される。

したがって、（1）の結果と合わせて考えると、$E(X)$および$V(X)$は、

$$E(X)=\boxed{\quad ⑪ \quad}$$

$$V(X)=\boxed{\quad ⑫ \quad}-\left\{\boxed{\quad ⑪ \quad}\right\}^2$$

となる。

さて、以下では具体的な数値に当てはめて考える。

ここでは、$q_k=P(X>k)$　（$k=0,1,2,\cdots$）が以下の漸化式を満たしているものとする。

$$\begin{cases} q_0=q_1=q_2=1 \\ q_k=\dfrac{3}{4}\cdot q_{k-1}+\dfrac{3}{16}\cdot q_{k-2}+\dfrac{3}{64}\cdot q_{k-3} \quad (k\geq 3) \end{cases}$$

このとき、上記の結果を用いて計算すると、$E(X)$および$V(X)$は、

$$E(X)=\boxed{\quad ⑬ \quad}$$

$$V(X)=\boxed{\quad ⑭ \quad}$$

と求めることができる。

［①、⑥、⑦の選択肢］

（A） 0　（B） 1　（C） $-p_0$　（D） p_0

（E） $1-p_0$　（F） p_1　（G） p_1-p_0　（H） $-p_{k-1}$

（I） p_{k-1}　（J） $-p_k$　（K） p_k　（L） p_k-p_{k-1}

［②、④の選択肢］

（A） $k\cdot p_k\cdot s^{k-1}$　（B） $k\cdot p_k\cdot s^{k}$　（C） $k\cdot p_k\cdot s^{k+1}$

（D） $(k-1)\cdot p_k\cdot s^{k}$　（E） $(k+1)\cdot p_k\cdot s^{k}$　（F） $k\cdot(k-1)\cdot p_k\cdot s^{k-2}$

（G） $k^2\cdot p_k\cdot s^{k-1}$　（H） $k\cdot(k+1)\cdot p_k\cdot s^{k+2}$　（I） $k\cdot(k-1)\cdot p_k\cdot s^{k-1}$

（J） $k\cdot(k+1)\cdot p_k\cdot s^{k+1}$

［③、⑤、⑨、⑩の選択肢］

（A） $-P'(1)$　（B） $\dfrac{P'(1)}{2}$　（C） $P'(1)$　（D） $2P'(1)$

（E） $1+P'(1)$　（F） $1-P'(1)$　（G） $\dfrac{P''(1)}{2}-P'(1)$　（H） $-P''(1)$

（I） $\dfrac{P''(1)}{2}$　（J） $P''(1)$　（K） $2P''(1)$　（L） $\dfrac{P''(1)}{2}+P'(1)$

（M） $P''(1)-P'(1)$　（N） $P''(1)+P'(1)$　（O） $-1+P''(1)$　（P） $1+P''(1)$

［⑧の選択肢］

（A） $-P(s)$　（B） $-s\cdot P(s)$　（C） $1-s\cdot P(s)$　（D） $P(s)$

（E） $s\cdot P(s)$　（F） $1+s\cdot P(s)$　（G） $-1+P(s)$　（H） $1-P(s)$

［⑪、⑫の選択肢］

（Ａ）$\dfrac{Q(1)}{2}$　（Ｂ）$Q(1)$　（Ｃ）$2Q(1)$　（Ｄ）$\dfrac{Q'(1)}{2}$

（Ｅ）$2Q'(1)$　（Ｆ）$\dfrac{Q'(1)}{2}-Q(1)$　（Ｇ）$\dfrac{Q'(1)}{2}+Q(1)$　（Ｈ）$Q'(1)+Q(1)$

（Ｉ）$2Q'(1)-Q(1)$　（Ｊ）$2Q'(1)+Q(1)$

［⑬の選択肢］

（Ａ）42　（Ｂ）66　（Ｃ）84　（Ｄ）96

（Ｅ）116　（Ｆ）132　（Ｇ）148　（Ｈ）168

［⑭の選択肢］

（Ａ）6,240　（Ｂ）6,336　（Ｃ）6,432　（Ｄ）6,516

（Ｅ）6,600　（Ｆ）6,684　（Ｇ）6,768　（Ｈ）6,828

問題３．次の（１）、（２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（２０点）

（１）平均 2 の指数分布に従う母集団からの標本変量を（$X_1, X_2, \cdots, X_n$）とするとき、統計量 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ の従う確率分布を求める。

ア．$n = 2$ のとき

X_i（$i = 1,2$）の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \boxed{\quad ① \quad} \times \exp\left(-\dfrac{x}{2}\right) & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

であることを用いると、$X = X_1 + X_2$ の確率密度関数 $f_{X,2}(x)$ は

$$f_{X,2}(x) = \begin{cases} \boxed{\quad ② \quad} \times \exp\left(-\dfrac{x}{2}\right) & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

となる。

イ．$n \geq 3$ のとき

$n = 3$ のときを考えると、$X = X_1 + X_2 + X_3$ の確率密度関数 $f_{X,3}(x)$ は

$$f_{X,3}(x) = \begin{cases} \int_0^x f_{X,2}(s) \cdot f(x-s)ds & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

と表されることから、同様の関係を帰納的に用いれば、$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ の確率密度関数 $f_{X,n}(x)$ は

$$f_{X,n}(x) = \begin{cases} \dfrac{\boxed{\quad ③ \quad}}{\boxed{\quad ④ \quad}} \times \exp\left(-\dfrac{x}{2}\right) & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

となる。

すなわち、統計量 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ は自由度 $2n$（$n \geq 1$）の χ^2 分布に従うことがわかる。

（2）ある電気部品の寿命時間は指数分布に従うことが知られているが、その母平均μは未知である。いま、信頼係数$(1-\varepsilon)$のもとで、母平均μの区間推定を以下の2通りの場合に分けて行う。

ア．観測データの中途打ち切りがない場合

n個の部品の寿命時間を測定したところ、観測データとして（$t_1, t_2, \cdots, t_n$）が得られたとする。
まず、寿命時間の標本変量を（$T_1, T_2, \cdots, T_n$）とし、母平均μの最尤推定量$\hat{\mu}_1$を求める。
標本変量（$T_1, T_2, \cdots, T_n$）の確率密度関数を尤度関数$l(\mu)$と考えて、

$$l(\mu) = \frac{\exp\left(-\boxed{\text{⑤}}\right)}{\boxed{\text{⑥}}}$$

$$\frac{\partial \log l(\mu)}{\partial \mu} = \frac{\boxed{\text{⑦}} - \boxed{\text{⑧}}}{\mu^2}$$

となることから、$\hat{\mu}_1 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$ となる。

次に、$\hat{\mu}_1$の分布を調べるために、$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = n\hat{\mu}_1$の分布を考えれば、（1）の結果より、統計量 $\boxed{\text{⑨}}$ $\times T$は自由度$2n$のχ^2分布に従う。

ここで、$P\left(T \le h_1(\mu)\right) = \dfrac{\varepsilon}{2}$、$P\left(T \ge h_2(\mu)\right) = \dfrac{\varepsilon}{2}$を満たす$h_1(\mu)$および$h_2(\mu)$を

$$h_1(\mu) = \boxed{\text{⑩}} \times \chi^2_{2n}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$h_2(\mu) = \boxed{\text{⑩}} \times \chi^2_{2n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

として定めることができる。

なお、$\chi^2_\phi(\varepsilon)$は自由度ϕのχ^2分布の上側ε点である。

したがって、標本変量を標本値に書き直して、信頼係数$(1-\varepsilon)$のもとで、母平均μの信頼区間を以下のとおり得ることができる。

$$\frac{\boxed{\text{⑪}}}{\chi^2_{2n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i < \mu < \frac{\boxed{\text{⑪}}}{\chi^2_{2n}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$$

イ．観測データの中途打ち切りがある場合

N 個（$N>n$）の部品の寿命時間を測定したところ、n 個の観測データとして（$t_1,t_2,\cdots,t_n$）（$0\le t_1<t_2<\cdots<t_n$）が得られ、また、残りの（$N-n$）個の観測データは t_n 以上であることが分かったとする。

このとき、標本変量（$T_1,T_2,\cdots,T_n$）の確率密度関数 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ は、n 個の順序統計量の確率密度関数を考えて、

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases}\dfrac{\boxed{⑫}}{\boxed{⑬}}\times\exp\left(-\dfrac{\boxed{⑭}+\boxed{⑮}\times t_n}{\boxed{⑯}}\right) & (0\le t_1<t_2<\cdots<t_n)\\ 0 & (\text{上記以外})\end{cases}$$

となる。

これは母平均 μ の尤度関数と考えることができるので、最尤推定量 $\hat{\mu}_2$ として

$$\hat{\mu}_2=\frac{\boxed{⑰}+\boxed{⑱}\times T_n}{\boxed{⑲}}$$

が得られる。

以下、（2）ア. と同様に考えて、母平均 μ の信頼区間を得ることができる。

［①、②の選択肢］

（A） $\frac{1}{4}$　（B） $\frac{1}{2}$　（C） 2　（D） $\frac{x}{4}$　（E） $\frac{x}{2}$

（F） x　（G） $2x$　（H） $4x$　（I） $\frac{x^2}{4}$　（J） x^2

［③、④の選択肢］

（A） x^{n-1}　（B） x^n　（C） $x^{2(n-1)}$　（D） $2n$

（E） $2n!$　（F） 2^{n-1}　（G） 2^n　（H） $2^{n-1}(n-1)!$

（I） $2^n(n-1)!$　（J） $2^n n!$

［⑤、⑥、⑦、⑧の選択肢］

（A） n　（B） $2n$　（C） n^2　（D） μ

（E） $n\mu$　（F） μ^2　（G） μ^{n-1}　（H） μ^n

（I） μ^{n+1}　（J） 2^{n-1}　（K） 2^n　（L） 2^{n+1}

（M） $\sum_{i=1}^{n} t_i$　（N） $\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n} t_i$　（O） $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$　（P） $\frac{\mu}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$

［⑨、⑩、⑪の選択肢］

（A） n　（B） $2n$　（C） $\frac{\mu}{2}$　（D） μ

（E） 2μ　（F） $n\mu$　（G） $\frac{1}{\mu}$　（H） $\frac{2}{\mu}$

（I） $\frac{n}{\mu}$　（J） $\frac{2n}{\mu}$　（K） $\frac{\mu}{n}$　（L） $\frac{\mu}{2n}$

［⑫、⑬、⑭、⑮、⑯、⑰、⑱、⑲の選択肢］

（A） n　（B） μ　（C） N　（D） $(N-n)$

（E） $n\mu$　（F） $N\mu$　（G） μ^{N-n}　（H） μ^{n}

（I） μ^{N}　（J） 2^{N-1}　（K） 2^{N}　（L） 2^{N+1}

（M） $\sum_{i=1}^{n} t_i$　（N） $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$　（O） $\frac{\mu}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$　（P） $\sum_{i=1}^{n} T_i$

（Q） $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$　（R） $\frac{\mu}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$　（S） $n!$　（T） $N!$

（U） $\mu^{n} n!$　（V） $\mu^{n} N!$　（W） $\mu^{n}(N-n)!$　（X） $\mu^{n} n!(N-n)!$

(付表)

Ⅰ.標準正規分布表

$P(x > 0.25) = 0.4013$

上側ε点 $u(\varepsilon)$ から確率εを求める表

$u(\varepsilon)\to\varepsilon$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.0*	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1*	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2*	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3*	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4*	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5*	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6*	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7*	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8*	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9*	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0*	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1*	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2*	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3*	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4*	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5*	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6*	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7*	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8*	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9*	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0*	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1*	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2*	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3*	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4*	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5*	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6*	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7*	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8*	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9*	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

$P(x > 1.9600) = 0.025$

確率εから上側ε点 $u(\varepsilon)$ を求める表

$\varepsilon \to u(\varepsilon)$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.00*	∞	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656
0.01*	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749
0.02*	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957
0.03*	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624
0.04*	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546
0.05*	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632
0.06*	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833
0.07*	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118
0.08*	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469
0.09*	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873
0.10*	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319
0.11*	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800
0.12*	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311
0.13*	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848
0.14*	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0450	1.0407
0.15*	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986
0.16*	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581
0.17*	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192
0.18*	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816
0.19*	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452
0.20*	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099
0.21*	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756
0.22*	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421
0.23*	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095
0.24*	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776
0.25*	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464
0.26*	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158
0.27*	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858
0.28*	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563
0.29*	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273
0.30*	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987
0.31*	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705
0.32*	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427
0.33*	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152
0.34*	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880
0.35*	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611
0.36*	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345
0.37*	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081
0.38*	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819
0.39*	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559
0.40*	0.2533	0.2508	0.2482	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301
0.41*	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045
0.42*	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789
0.43*	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535
0.44*	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282
0.45*	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030
0.46*	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778
0.47*	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527
0.48*	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276
0.49*	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025

Ⅱ.自由度φのχ^2分布の上側ε点： $\chi^2_\varphi(\varepsilon)$

φ ＼ ε	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010
1	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	0.4549	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349
2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	1.3863	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103
3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	2.3660	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449
4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	3.3567	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767
5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	4.3515	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863
6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	5.3481	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
7	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	6.3458	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	7.3441	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	8.3428	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
10	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	9.3418	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	10.3410	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250
12	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	11.3403	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
13	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	12.3398	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	13.3393	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
15	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	14.3389	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779
16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	15.3385	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999
17	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	16.3382	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
18	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	17.3379	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053
19	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	18.3377	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909
20	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	19.3374	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662
21	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	20.3372	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
22	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	21.3370	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894
23	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	22.3369	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384
24	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	23.3367	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
25	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	24.3366	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141
26	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	25.3365	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417
27	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	26.3363	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629
28	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	27.3362	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782
29	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	28.3361	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879
30	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	29.3360	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922
31	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	30.3359	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914
32	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	31.3359	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858
33	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	32.3358	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755
34	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	33.3357	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609
35	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	34.3356	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421
36	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	35.3356	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192
37	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	36.3355	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925
38	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	37.3355	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621
39	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	38.3354	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281
40	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	39.3353	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907
41	22.9056	25.2145	27.3256	29.9071	40.3353	52.9485	56.9424	60.5606	64.9501
42	23.6501	25.9987	28.1440	30.7654	41.3352	54.0902	58.1240	61.7768	66.2062
43	24.3976	26.7854	28.9647	31.6255	42.3352	55.2302	59.3035	62.9904	67.4593
44	25.1480	27.5746	29.7875	32.4871	43.3352	56.3685	60.4809	64.2015	68.7095
45	25.9013	28.3662	30.6123	33.3504	44.3351	57.5053	61.6562	65.4102	69.9568
46	26.6572	29.1601	31.4390	34.2152	45.3351	58.6405	62.8296	66.6165	71.2014
47	27.4158	29.9562	32.2676	35.0814	46.3350	59.7743	64.0011	67.8206	72.4433
48	28.1770	30.7545	33.0981	35.9491	47.3350	60.9066	65.1708	69.0226	73.6826
49	28.9406	31.5549	33.9303	36.8182	48.3350	62.0375	66.3386	70.2224	74.9195
50	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	49.3349	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539

Ⅲ．分母の自由度n 、分子の自由度m のF分布の上側 ε 点 : $F_n^m(\varepsilon)$

$\varepsilon =$ 0.100

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.5263	9.0000	9.1618	9.2434	9.2926	9.3255	9.3491	9.3668	9.3805	9.3916
3	5.5383	5.4624	5.3908	5.3426	5.3092	5.2847	5.2662	5.2517	5.2400	5.2304
4	4.5448	4.3246	4.1909	4.1072	4.0506	4.0097	3.9790	3.9549	3.9357	3.9199
5	4.0604	3.7797	3.6195	3.5202	3.4530	3.4045	3.3679	3.3393	3.3163	3.2974
6	3.7759	3.4633	3.2888	3.1808	3.1075	3.0546	3.0145	2.9830	2.9577	2.9369
7	3.5894	3.2574	3.0741	2.9605	2.8833	2.8274	2.7849	2.7516	2.7247	2.7025
8	3.4579	3.1131	2.9238	2.8064	2.7264	2.6683	2.6241	2.5893	2.5612	2.5380
9	3.3603	3.0065	2.8129	2.6927	2.6106	2.5509	2.5053	2.4694	2.4403	2.4163
10	3.2850	2.9245	2.7277	2.6053	2.5216	2.4606	2.4140	2.3772	2.3473	2.3226

$\varepsilon =$ 0.050

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782

$\varepsilon =$ 0.025

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168

$\varepsilon =$ 0.010

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.3992
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.0510
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491

$\varepsilon =$ 0.005

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.5013	199.0000	199.1664	199.2497	199.2996	199.3330	199.3568	199.3746	199.3885	199.3996
3	55.5520	49.7993	47.4672	46.1946	45.3916	44.8385	44.4341	44.1256	43.8824	43.6858
4	31.3328	26.2843	24.2591	23.1545	22.4564	21.9746	21.6217	21.3520	21.1391	20.9667
5	22.7848	18.3138	16.5298	15.5561	14.9396	14.5133	14.2004	13.9610	13.7716	13.6182
6	18.6350	14.5441	12.9166	12.0275	11.4637	11.0730	10.7859	10.5658	10.3915	10.2500
7	16.2356	12.4040	10.8824	10.0505	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138	8.3803
8	14.6882	11.0424	9.5965	8.8051	8.3018	7.9520	7.6941	7.4959	7.3386	7.2106
9	13.6136	10.1067	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411	6.4172
10	12.8265	9.4270	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676	5.8467

Ⅳ．自由度φのt分布の上側ε点：$t_{\varphi}(\varepsilon)$

φ ＼ε	0.100	0.050	0.025
1	3.0777	6.3138	12.7062
2	1.8856	2.9200	4.3027
3	1.6377	2.3534	3.1824
4	1.5332	2.1318	2.7764
5	1.4759	2.0150	2.5706
6	1.4398	1.9432	2.4469
7	1.4149	1.8946	2.3646
8	1.3968	1.8595	2.3060
9	1.3830	1.8331	2.2622
10	1.3722	1.8125	2.2281
11	1.3634	1.7959	2.2010
12	1.3562	1.7823	2.1788
13	1.3502	1.7709	2.1604
14	1.3450	1.7613	2.1448
15	1.3406	1.7531	2.1314
16	1.3368	1.7459	2.1199
17	1.3334	1.7396	2.1098
18	1.3304	1.7341	2.1009
19	1.3277	1.7291	2.0930
20	1.3253	1.7247	2.0860
21	1.3232	1.7207	2.0796
22	1.3212	1.7171	2.0739
23	1.3195	1.7139	2.0687
24	1.3178	1.7109	2.0639
25	1.3163	1.7081	2.0595

Ⅴ．自然対数表

x	$\log x$
1.1	0.0953
1.2	0.1823
1.3	0.2624
1.4	0.3365
1.5	0.4055
1.6	0.4700
1.7	0.5306
1.8	0.5878
1.9	0.6419
2.0	0.6931
2.5	0.9163
3.0	1.0986
3.5	1.2528
4.0	1.3863
4.5	1.5041
5.0	1.6094
5.5	1.7047
6.0	1.7918
6.5	1.8718
7.0	1.9459
7.5	2.0149
8.0	2.0794
8.5	2.1401
9.0	2.1972
9.5	2.2513
10.0	2.3026

Ⅵ．指数関数表

x	$exp(x)$
-0.10	0.9048
-0.09	0.9139
-0.08	0.9231
-0.07	0.9324
-0.06	0.9418
-0.05	0.9512
-0.04	0.9608
-0.03	0.9704
-0.02	0.9802
-0.01	0.9900
0.00	1.0000
0.01	1.0101
0.02	1.0202
0.03	1.0305
0.04	1.0408
0.05	1.0513
0.06	1.0618
0.07	1.0725
0.08	1.0833
0.09	1.0942
0.10	1.1052

以上

数学（解答例）

（１）

２つのサイコロの目が７となる組み合わせは、(1,6)、(2,5)、(3,4)、(4,3)、(5,2)、(6,1)の６通りであるため、その確率は$\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

Aが勝つ確率をpとおくと、Bが勝つ確率は$\dfrac{5}{6}p$、Cが勝つ確率は$\dfrac{25}{36}p$と表せる。

引き分けはないため、

$$p+\frac{5}{6}p+\frac{25}{36}p=\frac{91}{36}p=1$$

よって$p=\dfrac{36}{91}$となる。したがって、Bが勝つ確率は、$\dfrac{5}{6}p=\dfrac{30}{91}$

よって、解答は　（Ａ）

（無限等比級数を使用する解答）

1周り目で勝つ確率は$\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}$、２周り目で勝つ確率は$\left(\dfrac{5}{6}\right)^4\times\dfrac{1}{6}$、３周り目で勝つ確率は

$\left(\dfrac{5}{6}\right)^7\times\dfrac{1}{6}$・・・であるため、求める確率は、

$$\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4\times\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^7\times\frac{1}{6}+\cdots=\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\left(1+\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^6+\cdots\right)$$

$$=\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3}=\frac{30}{91}$$

（２）

n回目の試行後に赤球が箱Aにある確率をp_n、箱Bにある確率をq_nとする。

このとき、題意より明らかに$p_0=1$、$p_n+q_n=1$である。

1回目の試行後に、赤球が箱Aにあるのは、箱A、Bから共に白球が取り出されて他の箱に移される場合である。箱Aから白球が取り出される確率は$\frac{3}{4}$、箱Bから白球が取り出される確率は1であり、それぞれの球は互いに独立に取り出されると考えられるので、

$$p_1=\frac{3}{4}\times 1=\frac{3}{4}$$

となる。

n回目$(n\geq 2)$の試行後に赤球が箱Aにあるのは、

・$(n-1)$回目の試行後に赤球が箱Aにあって、n回目の試行で白球同士が交換される場合

・$(n-1)$回目の試行後に赤球が箱Bにあって、n回目の試行で箱Aの白球と箱Bの赤球が交換される場合

のいずれかであり、両者は排反な事象である。よって、漸化式

$$p_n=\frac{3}{4}\times p_{n-1}+\frac{1}{4}\times q_{n-1}\quad (n\geq 2)$$

が成立する。この漸化式を整理すると、

$$p_n=\frac{3}{4}\times p_{n-1}+\frac{1}{4}\times(1-p_{n-1})=\frac{1}{2}\times p_{n-1}+\frac{1}{4}$$

$$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\left(p_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$$

となる。この漸化式を解くと、

$$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\left(p_{n-1}-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(p_{n-2}-\frac{1}{2}\right)=\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\left(p_1-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

であるから、

$$p_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

を得る。したがって求める確率は、

$$p_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{32} = \boxed{\frac{17}{32}}$$

よって、解答は（**E**）

（３）

確率変数 X_i （$i=1,\cdots,n$ ）の確率密度関数を $f(x_i)$ とおくと、$f(x_i)$ はそれぞれ

$$f(x_i)=\frac{1}{m} \quad (0<x_i<m)$$

である（上記以外の区間では $f(x_i)=0$ ）から、$P(Y<y)$ を $0<y<m$ について求めると、

$$P(Y<y)=1-P(Y\geq y)=1-\prod_{i=1}^{n}P(X_i\geq y)$$

$$=1-\prod_{i=1}^{n}(1-P(X_i<y))=1-\left(1-\frac{y}{m}\right)^n$$

となる。したがって、Y の確率密度関数 $g(y)$ は、

$$g(y)=\frac{d}{dy}P(Y<y)=\frac{n}{m}\cdot\left(1-\frac{y}{m}\right)^{n-1}=\frac{n(m-y)^{n-1}}{m^n} \qquad (0<y<m)$$

となる（上記以外の区間では $g(y)=0$ ）。

よって、求める期待値 $E(Y)$ は、

$$E(Y)=\int_0^m y\cdot\frac{n(m-y)^{n-1}}{m^n}dy$$

$$=\frac{n}{m^n}\times\left\{\left[-y\cdot\frac{(m-y)^n}{n}\right]_0^m+\int_0^m\frac{(m-y)^n}{n}dy\right\}$$

$$=\frac{1}{m^n}\times\left[-\frac{(m-y)^{n+1}}{n+1}\right]_0^m=\frac{m}{n+1}$$

よって、解答は　①　（Ｅ）　②　（Ｃ）　③　（Ｃ）　④　（Ｈ）

（４）

確率変数 X の積率母関数を $\phi_X(\theta)$、確率変数 Y の積率母関数を $\phi_Y(\theta)$ とおくと、$\phi_X(\theta)$、$\phi_Y(\theta)$ はそれぞれ次のとおりとなる。

$$\phi_X(\theta)=\phi_Y(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{\theta k}pq^k=p\sum_{k=0}^{\infty}(qe^{\theta})^k=\frac{p}{1-qe^{\theta}} \qquad (qe^{\theta}<1)$$

また、X と Y が互いに独立であるとき、確率変数 $Z=X+Y$ の積率母関数 $\phi(\theta)$ は X,Y それぞれの積率母関数の積に等しくなることから、

$$\phi(\theta)=\phi_X(\theta)\cdot\phi_Y(\theta)=\left(\frac{p}{1-qe^{\theta}}\right)^2$$

$$\phi'(\theta)=\frac{2p^2qe^{\theta}}{(1-qe^{\theta})^3}$$

$$\phi''(\theta)=2p^2q\frac{e^{\theta}\cdot(1-qe^{\theta})^3-e^{\theta}\cdot 3(1-qe^{\theta})^2(-qe^{\theta})}{(1-qe^{\theta})^6}=2p^2qe^{\theta}\frac{(1+2qe^{\theta})}{(1-qe^{\theta})^4}$$

よって、Z の原点のまわりの２次の積率は、

$$\phi''(0)=2p^2q\frac{(1+2q)}{(1-q)^4}=\frac{2q(1+2q)}{p^2}$$

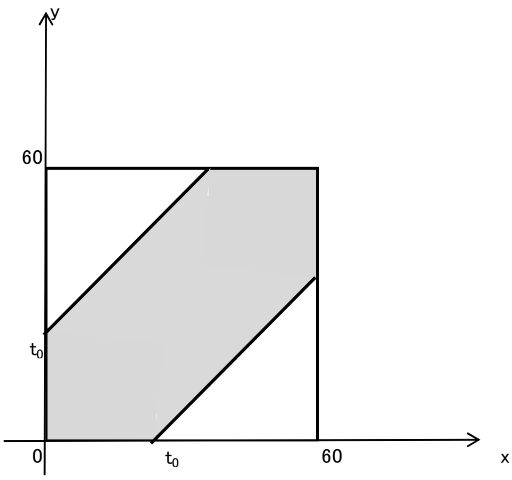
よって、解答は　①（Ｅ）②（Ｃ）③（Ｋ）④（Ｆ）

（５）
A 氏と B 氏が同時刻にレストラン内にいる確率は $P(|X-Y|<t_0)$ である。
X, Y は互いに独立であり、それぞれ $(0,60)$ の一様分布に従うことから、上記の確率は下図の正方形に占める色付部分の領域の割合である。
題意から、

$$\frac{60^2-(60-t_0)^2}{60^2}=\frac{1}{3}$$

を満たす t_0 を求めればよい。

上式を t_0 について解くと、$t_0=20\cdot\left(3\pm\sqrt{6}\right)$ が得られるが、$t_0<60$ であることから、求める t_0 は $20\cdot\left(3-\sqrt{6}\right)$ である。



よって、解答は　①（Ｇ）②（Ｂ）③（Ｄ）

（６）

平均値の差$\delta = \mu_A - \mu_B$、統計量$\overline{X}_A = \dfrac{1}{n_A}\sum_{i=1}^{n_A} X_i$ （X_i （$i = 1,2,\cdots,n_A$））、

$\overline{X}_B = \dfrac{1}{n_B}\sum_{i=1}^{n_B} Y_i$ （Y_i （$i = 1,2,\cdots,n_B$））とする。

$V(\overline{X}_A - \overline{X}_B) = \dfrac{\sigma_A^2}{n_A} + \dfrac{\sigma_B^2}{n_B} = \dfrac{1}{n_A} + \dfrac{4}{n_B}$ より

統計量$U = \dfrac{\overline{X}_A - \overline{X}_B - \delta}{\sqrt{\dfrac{1}{n_A} + \dfrac{4}{n_B}}}$は、標準正規分布$N(0,1)$に従う。従って、$\delta$の信頼係数$1\text{-}\varepsilon$の

信頼区間について、

$$\overline{X}_A - \overline{X}_B - u\left(\varepsilon/2\right)\times\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{4}{n_B}} < \delta < \overline{X}_A - \overline{X}_B + u\left(\varepsilon/2\right)\times\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{4}{n_B}}$$

を得る。よって$\sqrt{\dfrac{1}{n_A} + \dfrac{4}{n_B}}$を最小にすればよい。$n_A + n_B = n$とおく。

標本数n_Aとn_Bの組み合わせの中で、最も幅の狭い区間を作るには、

$$\frac{d}{dn_A}V(\overline{X}_A - \overline{X}_B) = \frac{d}{dn_A}\left(\frac{1}{n_A} + \frac{4}{n_B}\right) = \frac{d}{dn_A}\left(\frac{1}{n_A} + \frac{4}{n - n_A}\right) = -\frac{1}{n_A^2} + \frac{4}{(n - n_A)^2} = 0$$

これを解いて、$2n_A = n_B$ となるようにn_Aとn_Bを選べばよい。

よって、解答は　**（Ｅ）**

（７）

標本平均、標本分散を $\bar{x}$ 、s^2 とすると、

$\bar{x} = 70$ 、$s^2 = 5$

また、今年の平均を x とすると、帰無仮説 H_0 は「$\bar{x} = x$」と表すことができる。母分散が未知であること、および、帰無仮説 H_0 が採択されたことから、

$$x - t_{19}(0.025) \cdot \frac{s}{\sqrt{19}} < \bar{x} < x + t_{19}(0.025) \cdot \frac{s}{\sqrt{19}}$$

付表より、$t_{19}(0.025) = 2.0930$ であるので、

$$x - 1.0737 < 70 < x + 1.0737$$

よって、

$$68.9263 < x < 71.0737$$

よって、解答は　①（Ｂ）、②（Ｉ）

（８）

対立仮説「このコイン投げにおいて、表の出る確率は p_0 よりも低い」に対して、帰無仮説 H_0「このコイン投げにおいて、表の出る確率は50%である」を精密法によって検定するには、標本数を n 、表の出る回数を k 、有意水準を ε とした場合、

$n_1 = 2(k+1)$ 、 $n_2 = 2(n-k)$

と置いて $F_{n_2}^{n_1}(\varepsilon)$ の値を求め、

$$\frac{n_2 p_0}{n_1(1-p_0)} > F_{n_2}^{n_1}(\varepsilon)$$

のときに H_0 を棄却すればよい。

$p_0 = 50\%$ 、 $\varepsilon = 10\%$ であるので、

6回中1回が表であった場合、 $n=6$ 、 $k=1$ であるので、

$n_1 = 4$ 、 $n_2 = 10$ 　より、 $F_{n_2}^{n_1}(\varepsilon) = F_{10}^{4}(0.1) = 2.6053$

$$\frac{n_2 p_0}{n_1(1-p_0)} = \frac{10 \cdot 0.5}{4 \cdot 0.5} = 2.5$$

よって、帰無仮説 H_0 は採択される。

12回中5回が表であった場合、近似法では、

$$\left| \frac{\frac{5}{12} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \cdot \sqrt{12} \right| = \left| \frac{\frac{5}{12} - 0.5}{\sqrt{0.5(1-0.5)}} \cdot \sqrt{12} \right| = \left| \frac{\frac{5}{12} - 0.5}{0.5} \cdot \sqrt{12} \right| = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{12} = 0.5774$$

$u(0.1) = 1.2816$

よって、帰無仮説 H_0 は採択される。

24回中9回が表であった場合、近似法では、

$$\left| \frac{\frac{9}{24} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \cdot \sqrt{24} \right| = \left| \frac{\frac{9}{24} - 0.5}{\sqrt{0.5(1-0.5)}} \cdot \sqrt{24} \right| = \left| \frac{\frac{9}{24} - 0.5}{0.5} \cdot \sqrt{24} \right| = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{24} = 1.2247$$

$u(0.1) = 1.2816$

よって、帰無仮説 H_0 は採択される。

よって、解答は　①（Ａ）、②（Ａ）、③（Ａ）

（９）

最小二乗法による回帰係数は、誤差の二乗和である下記Qを最小にするものとして推定される。

$$Q=\sum_{i=1}^{5}\{y_i-(\alpha+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i})\}^2$$

これは、$\dfrac{\partial Q}{\partial \alpha}=\dfrac{\partial Q}{\partial \beta_1}=\dfrac{\partial Q}{\partial \beta_2}=0$となる場合であるから、

次の連立方程式の解が求めるα,β_1,β_2となる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial \alpha}=-2\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\{y_i-(\alpha+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i})\} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial \beta_1}=-2\displaystyle\sum_{i=1}^{5}x_{1i}\{y_i-(\alpha+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i})\} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial \beta_2}=-2\displaystyle\sum_{i=1}^{5}x_{2i}\{y_i-(\alpha+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i})\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{5}y_i=5\alpha+\beta_1\sum_{i=1}^{5}x_{1i}+\beta_2\sum_{i=1}^{5}x_{2i} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{5}x_{1i}y_i=\alpha\sum_{i=1}^{5}x_{1i}+\beta_1\sum_{i=1}^{5}x_{1i}{}^2+\beta_2\sum_{i=1}^{5}x_{1i}x_{2i} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{5}x_{2i}y_i=\alpha\sum_{i=1}^{5}x_{2i}+\beta_1\sum_{i=1}^{5}x_{1i}x_{2i}+\beta_2\sum_{i=1}^{5}x_{2i}{}^2 \end{cases}$$

与えられた数値を代入すると、

$$\begin{cases} 16=5\alpha+3\beta_1+4\beta_2 \\ 10=3\alpha+3\beta_1+2\beta_2 \\ 14=4\alpha+2\beta_1+4\beta_2 \end{cases}$$

これらを解くと、$\alpha=1,\beta_1=1,\beta_2=2$

よって、解答は　①（Ｈ）　②（Ｈ）　③（Ｊ）

（１０）

$\theta_0 = \frac{1}{5}\sum_{t=1}^{5} y_t = 19.6$ である。よって $\boxed{\theta_0 = 19.600}$

時差1の標準自己相関 ρ_1 は、$\bar{y} = \frac{1}{5}\sum_{t=1}^{5} y_t$ とすると

$$\rho_1 = \frac{\sum_{t=2}^{5}(y_t - \bar{y})(y_{t-1} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{5}(y_t - \bar{y})^2} = \frac{-0.96}{5.20} = \frac{-0.192}{1.04} = -0.184615$$ となる。

$MA(1)$ モデルにおいては $\rho_1 = -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^{\,2}}$ であるから、

これを θ_1 について解くと $\theta_1 = 0.1914$　θ_1＝5.2253 となるが、識別可能性より $|1/\theta| \geqq 1$ で

ある必要性があるため $\boxed{\theta_1 = 0.1914}$ となる。

よって、解答は　①　（Ｆ）　②　（Ｄ）

（１１）

確率過程$\{X_s\}$、$s \geq 0$が標準ブラウン運動であることから、標準ブラウン運動の性質より、

X_sは平均$E[X_s] = 0$、分散$V[X_s] = s$の正規分布に従う。また、X_sと$X_t - X_s$は独立と

なる（独立増分性)。したがって、

$$E(X_t \cdot X_s) = E[X_s \cdot (X_t - X_s + X_s)]$$

$$= E[X_s^2 + X_s \cdot (X_t - X_s)]$$

$$= E[X_s^2] + E[X_s \cdot (X_t - X_s)]$$

$$= V[X_s] + E[X_s] \cdot E[(X_t - X_s)] = s + 0$$

$$\boxed{= s}$$

また、

$$E[(X_t - X_s)^2] = E[X_t^2 - 2X_t X_s + X_s^2]$$

$$= E[X_t^2] - 2 \cdot E[X_t \cdot X_s] + E[X_s^2]$$

$$= V[X_t] - 2 \cdot E[X_t \cdot X_s] + V[X_s]$$

$$= t - 2s + s$$

$$\boxed{= t - s}$$

よって、解答は　①　（Ｄ）　②　（Ｇ）

（１２）

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を微分して、

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{12}{11}(4-8x+3x^2)$　より、

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は、$x=\dfrac{2}{3}$ で最大値 $\dfrac{128}{99}=1.2929$ をとる。

よって、解答は　**（G）**

問題２

（１）

まず、$P(s)$の定義より、$P(1)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

次に、$P(s)$をsについて微分すると、

$$P'(s)=\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k \cdot s^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k \cdot s^{k-1}$$

と表される。ここで、

$$P'(1)=\lim_{s\to 1-0} P'(s)=\lim_{s\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k \cdot s^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k$$

であるから、

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = P'(1)$$

となる。さらに、$P'(s)$をsについて微分すると、

$$P''(s)=\sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot p_k \cdot s^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot p_k \cdot s^{k-2}$$

と表される。ここで、

$$P''(1)=\lim_{s\to 1-0} P''(s)=\lim_{s\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot p_k \cdot s^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot p_k$$

$$= E[X \cdot (X-1)]$$

$$= E(X^2) - E(X)$$

$$= E(X^2) - P'(1)$$

であるから、

$$E(X^2) = P''(1) + P'(1)$$

となる。したがって、

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=P''(1)+P'(1)-\{P'(1)\}^2$$

となる。

よって、<u>解答は　①　（Ｂ）　②　（Ａ）　③　（Ｃ）　④　（Ｆ）　⑤　（Ｎ）</u>

（２）

まず、q_k の定義より、

$$q_0=P(X>0)=1-P(X=0)=1-p_0$$

また、q_k と p_k の関係に着目すれば、$k\geq 1$ において q_k-q_{k-1} は p_k を用いて、

$$q_k-q_{k-1}=P(X>k)-P(X>k-1)=\sum_{t=k+1}^{\infty}p_t-\sum_{t=k}^{\infty}p_t=-p_k \quad (k\geq 1)$$

と表される。

次に、$Q(s)\cdot(1-s)$ を $P(s)$ を用いて表すと、

$$Q(s)\cdot(1-s)=\sum_{k=0}^{\infty}q_k\cdot s^k\cdot(1-s)=\sum_{k=0}^{\infty}q_k\cdot s^k-\sum_{k=0}^{\infty}q_k\cdot s^{k+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}q_k\cdot s^k-\sum_{k=1}^{\infty}q_{k-1}\cdot s^k$$

$$=q_0+\sum_{k=1}^{\infty}q_k\cdot s^k-\sum_{k=1}^{\infty}q_{k-1}\cdot s^k=q_0+\sum_{k=1}^{\infty}(q_k-q_{k-1})\cdot s^k$$

$$=1-p_0-\sum_{k=1}^{\infty}p_k\cdot s^k=1-\sum_{k=0}^{\infty}p_k\cdot s^k$$

$$=1-P(s) \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (A)$$

となる。

ここで、(A)式の両辺をsについて微分すると、

(A)式の左辺は、$Q'(s)\cdot(1-s)-Q(s)$

(A)式の右辺は、$-P'(s)$

となり、

$$\lim_{s\to 1-0}\{Q'(s)\cdot(1-s)-Q(s)\}=-Q(1)$$

$$\lim_{s\to 1-0}\{-P'(s)\}=-P'(1)$$

であるから、

$$Q(1)=P'(1)$$

と表される。また、(A)式の両辺をsについて二階微分すると、

(A)式の左辺は、$Q''(s)\cdot(1-s)-2Q'(s)$

(A)式の右辺は、$-P''(s)$

となるので、同様に整理すると、

$$Q'(1)=\frac{P''(1)}{2}$$

と表される。

したがって、（１）の結果と合わせて考えると、$E(X)$および$V(X)$はそれぞれ、

$$E(X)=P'(1)=Q(1)$$

$$V(X)=P''(1)+P'(1)-\{P'(1)\}^2=2Q'(1)+Q(1)-\{Q(1)\}^2$$

となる。

さて、q_k が以下の漸化式を満たす場合を考える。

$$\begin{cases} q_0 = q_1 = q_2 = 1 \\ q_k = \dfrac{3}{4} \cdot q_{k-1} + \dfrac{3}{16} \cdot q_{k-2} + \dfrac{3}{64} \cdot q_{k-3} \quad (k \geq 3) \end{cases}$$

漸化式より、$k \geq 3$ において、

$$q_3 = \frac{3}{4} \cdot q_2 + \frac{3}{16} \cdot q_1 + \frac{3}{64} \cdot q_0$$

$$q_4 = \frac{3}{4} \cdot q_3 + \frac{3}{16} \cdot q_2 + \frac{3}{64} \cdot q_1$$

$$\cdots$$

が成立する。両辺に s^k を乗じると、

$$q_3 \cdot s^3 = \frac{3}{4} \cdot q_2 \cdot s^3 + \frac{3}{16} \cdot q_1 \cdot s^3 + \frac{3}{64} \cdot q_0 \cdot s^3$$

$$q_4 \cdot s^4 = \frac{3}{4} \cdot q_3 \cdot s^4 + \frac{3}{16} \cdot q_2 \cdot s^4 + \frac{3}{64} \cdot q_1 \cdot s^4$$

$$\cdots$$

となるので、

$$\sum_{k=3}^{\infty} q_k \cdot s^k = \frac{3}{4} \cdot s \cdot \sum_{k=2}^{\infty} q_k \cdot s^k + \frac{3}{16} \cdot s^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot s^k + \frac{3}{64} \cdot s^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q_k \cdot s^k$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (B)$$

と表される。

さらに、$Q(s)$ の定義および $q_0 = q_1 = q_2 = 1$ を用いて、(B) 式を $Q(s)$ について解くと、

$$Q(s) - 1 - s - s^2 = \frac{3}{4} \cdot s \cdot \{Q(s) - 1 - s\} + \frac{3}{16} \cdot s^2 \cdot \{Q(s) - 1\} + \frac{3}{64} \cdot s^3 \cdot Q(s)$$

$$\frac{Q(s)}{64}\cdot\left(64-48s-12s^2-3s^3\right)=\frac{1}{64}\cdot\left(64+16s+4s^2\right)$$

$$Q(s)=\frac{64+16s+4s^2}{64-48s-12s^2-3s^3}$$

となる。したがって、上記の結果を用いて計算すると、

$$E(X)=Q(1)=\frac{64+16+4}{64-48-12-3}=84$$

また、$Q(s)$ を s について微分すると、

$$Q^{'}(s)=\frac{16+8s}{64-48s-12s^2-3s^3}+\frac{\left(64+16s+4s^2\right)\cdot\left(48+24s+9s^2\right)}{\left(64-48s-12s^2-3s^3\right)^2}$$

となるので、

$$Q^{'}(1)=\frac{16+8}{64-48-12-3}+\frac{(64+16+4)\cdot(48+24+9)}{(64-48-12-3)^2}=24+84\times 81=6{,}828$$

を得る。したがって、

$$V(X)=2Q^{'}(1)+Q(1)-\{Q(1)\}^2$$

$$=2\times 6{,}828+84-84^2=13{,}656+84-7{,}056$$

$$=6{,}684$$

よって、解答は　⑥　（Ｅ）　⑦　（Ｊ）　⑧　（Ｈ）　⑨　（Ｃ）　⑩　（Ｉ）　⑪　（Ｂ）
⑫　（Ｊ）　⑬　（Ｃ）　⑭　（Ｆ）

問題３.

（１）平均２の指数分布に従う母集団からの標本変量を（$X_1, X_2, \cdots, X_n$）とするとき、統計量 $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ の従う確率分布を求める。

ア. $n=2$ のとき

X_i （$i=1,2$）の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\exp\left(-\dfrac{x}{2}\right) & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

であることを用いると、 $X=X_1+X_2$ の確率密度関数 $f_{X,2}(x)$ は $x\geq 0$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^x f(s)\cdot f(x-s)ds &= \int_0^x \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{s}{2}-\frac{x-s}{2}\right)ds\\ &= \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\times\int_0^x ds\\ &= \frac{x}{4}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

であり、また $x<0$ のときは X の定義より明らかに $f_{X,2}(x)=0$ である。すなわち

$$f_{X,2}(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{4}\exp\left(-\dfrac{x}{2}\right) & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

となる。

イ. $n\geq 3$ のとき

$n=3$ のときを考えると、 $X=X_1+X_2+X_3$ の確率密度関数 $f_{X,3}(x)$ は

$$f_{X,3}(x)=\begin{cases}\int_0^x f_{X,2}(s)\cdot f(x-s)ds & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

と表され、 $x\geq 0$ のときをア. と同様に計算すると

$$
\begin{aligned}
\int_0^x f_{X,2}(s)\cdot f(x-s)ds &= \int_0^x \frac{s}{8}\exp\left(-\frac{s}{2}-\frac{x-s}{2}\right)ds \\
&= \frac{1}{2^3}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\times\int_0^x sds \\
&= \frac{1}{2^3}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\times\frac{x^2}{2} \\
&= \frac{x^2}{2^3\cdot 2!}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}
$$

となる。

$n=4$ のときは

$$
\begin{aligned}
\int_0^x f_{X,3}(s)\cdot f(x-s)ds &= \int_0^x \frac{s^2}{2^4\cdot 2!}\exp\left(-\frac{s}{2}-\frac{x-s}{2}\right)ds \\
&= \frac{1}{2^4\cdot 2!}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\times\int_0^x s^2 ds \\
&= \frac{1}{2^4\cdot 2!}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\times\frac{x^3}{3} \\
&= \frac{x^3}{2^4\cdot 3!}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}
$$

となる。これらの計算過程から、一般の n (≥ 3) において

$$
f_{X,n}(x)=\begin{cases} \dfrac{x^{n-1}}{2^n(n-1)!}\exp\left(-\dfrac{x}{2}\right) & (x\geq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases} \qquad (A)
$$

となることが予想される。これを帰納法で確かめる。

仮に $n=k$ $(k\geq 3)$ のとき $f_{X,n}(x)$ が (A) 式のとおり表されると仮定すると、

$\int_0^x f_{X,k}(s)\cdot f(x-s)ds$ $(x\geq 0)$ は以下のとおり計算される。

$$
\begin{aligned}
\int_0^x f_{X,k}(s)\cdot f(x-s)ds &= \int_0^x \frac{s^{k-1}}{2^{k+1}(k-1)!}\exp\left(-\frac{s}{2}-\frac{x-s}{2}\right)ds \\
&= \frac{1}{2^{k+1}(k-1)!}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\times\int_0^x s^{k-1}ds \\
&= \frac{1}{2^{k+1}(k-1)!}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\times\frac{x^k}{k} \\
&= \frac{x^k}{2^{k+1}k!}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}
$$

これはすなわち $n=k+1$ のときにも $f_{X,n}(x)$ が (A) 式のとおり表されることを示している。

よって一般の $n(\geq 3)$ について

$$
f_{X,n}(x)=\begin{cases} \dfrac{x^{n-1}}{2^n(n-1)!}\exp\left(-\dfrac{x}{2}\right) & (x\geq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}
$$

が成り立つことが示された。なおア. と照らし合わせると、$n=1,2$ のときにも (A) 式が成立していることがわかる。

(A) 式は自由度 $2n$ の χ^2 分布の確率密度関数そのものである。

よって、<u>解答は　①（Ｂ）　②（Ｄ）　③（Ａ）　④（Ｉ）</u>

（２）ある電気部品の寿命時間は指数分布に従うことが知られているが、その母平均は未知である。いま、信頼係数$(1-\varepsilon)$のもとで、母平均の区間推定を以下の２通りの場合に分けて行う。

ア．観測データの中途打ち切りがない場合

n個の部品の寿命時間を測定したところ、観測データとして（$t_1, t_2, \cdots, t_n$）が得られたとする。まず、寿命時間の標本変量を（$T_1, T_2, \cdots, T_n$）とし、母平均μの最尤推定量$\hat{\mu}_1$を求める。

標本変量（$T_1, T_2, \cdots, T_n$）の確率密度関数を尤度関数$l(\mu)$と考えて、

$$l(\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{t_i}{\mu}\right) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n} t_i\right)}{\mu^n}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log l(\mu)}{\partial \mu} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \log\left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n} t_i\right)}{\mu^n}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu}\left(-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n} t_i - n\log\mu\right) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i - n\mu}{\mu^2}\end{aligned}$$

となることから、母平均μの最尤推定値は$\dfrac{\partial \log l(\mu)}{\partial \mu} = 0$の解$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$となり、最尤推定量は$\hat{\mu}_1 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$となる。

次に、$\hat{\mu}_1$の分布を調べるために、$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = n\hat{\mu}_1$の分布を考える。

T_i（$i = 1, 2, \cdots, n$）は平均μの指数分布に従い、指数分布の性質より統計量$\dfrac{2}{\mu}T_i$は平均２の指数分布に従うことから、（１）の結果より、統計量$\dfrac{2}{\mu}T = \dfrac{2}{\mu}\sum_{i=1}^{n} T_i$は自由度$2n$の$\chi^2$分布に従う。すなわち

$$P\left(\frac{2}{\mu}T \le \chi^2_{2n}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)=\frac{\varepsilon}{2}$$
$$P\left(\frac{2}{\mu}T \ge \chi^2_{2n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)=\frac{\varepsilon}{2}$$

である。なお、$\chi^2_\phi(\varepsilon)$は自由度ϕのχ^2分布の上側ε点である。

かっこの中を変形すれば

$$P\left(T \le \frac{\mu}{2}\chi^2_{2n}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)=\frac{\varepsilon}{2}$$
$$P\left(T \ge \frac{\mu}{2}\chi^2_{2n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)=\frac{\varepsilon}{2}$$

である。したがって、$P(T \le h_1(\mu))=\frac{\varepsilon}{2}$、$P(T \ge h_2(\mu))=\frac{\varepsilon}{2}$を満たす$h_1(\mu)$および$h_2(\mu)$は、

$$h_1(\mu)=\frac{\mu}{2}\chi^2_{2n}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$h_2(\mu)=\frac{\mu}{2}\chi^2_{2n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

となる。
すなわち

$$P\left(\frac{\mu}{2}\times\chi^2_{2n}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)<T<\frac{\mu}{2}\times\chi^2_{2n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)=1-\varepsilon$$

である。かっこの中を変形すると

$$P\left(\frac{\mu}{2n}\times\chi^2_{2n}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{T}{n}<\frac{\mu}{2n}\times\chi^2_{2n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)=1-\varepsilon$$

となる。標本変量T_iを標本値t_iで書き直すと、かっこの中の不等式は

$$\frac{\mu}{2n}\times\chi^2_{2n}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i<\frac{\mu}{2n}\times\chi^2_{2n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

となる。これを μ について解けば、以下のとおり母平均の信頼係数 $(1-\varepsilon)$ の信頼区間を得ることができる。

$$\frac{2n}{\chi^2_{2n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i < \mu < \frac{2n}{\chi^2_{2n}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i$$

よって、解答は　⑤（Ｎ）　⑥（Ｈ）　⑦（Ｍ）　⑧（Ｅ）　⑨（Ｈ）　⑩（Ｃ）　⑪（Ｂ）

イ．観測データの中途打ち切りがある場合

N 個（ $N>n$ ）の部品の寿命時間を測定したところ、 n 個の観測データとして（$t_1,t_2,\cdots,t_n$）（ $0\le t_1<t_2<\cdots<t_n$ ）が得られ、また、残りの（ $N-n$ ）個の観測データはt_n 以上であることが分かったとする。

このとき、標本変量（ $T_1,T_2,\cdots,T_n$ ）の確率密度関数 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ は、$0\le t_1<t_2<\cdots<t_n$のとき

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)=N\times(N-1)\times\cdots\times(N-n+1)\times\left(\int_{t_n}^{\infty}\frac{1}{\mu}\exp\left(-\frac{s}{\mu}\right)ds\right)^{N-n}\times\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu}\exp\left(-\frac{t_i}{\mu}\right)$$

$$=\frac{N!}{\mu^n(N-n)!}\times\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i+(N-n)\times t_n}{\mu}\right)$$

となり、それ以外のときは0 である。

（ここで係数$N\times(N-1)\times\cdots\times(N-n+1)=\dfrac{N!}{(N-n)!}$は、$N$ 個の部品のうちn個に観測データ $t_1,t_2,\cdots,t_n$ を割り振るときの場合の数である。）

すなわち

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases}\dfrac{N!}{\mu^n(N-n)!}\times\exp\left(-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}t_i+(N-n)\times t_n}{\mu}\right) & (0\le t_1<t_2<\cdots<t_n)\\ 0 & (\text{上記以外})\end{cases}$$

となる。

これを母平均μ の尤度関数$l(\mu)$ と考えれば

$$\frac{\partial \log l(\mu)}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} \log\left(\frac{N!}{\mu^n (N-n)!} \times \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i + (N-n) \times t_n}{\mu} \right) \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \mu}\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i + (N-n) \times t_n}{\mu} - n \log \mu + \log \frac{N!}{(N-n)!} \right)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i + (N-n) \times t_n - n\mu}{\mu^2}$$

となることから、母平均 μ の最尤推定値は $\frac{\partial \log l(\mu)}{\partial \mu} = 0$ の解

$\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i + (N-n) \times t_n}{n}$ となり、最尤推定量は $\hat{\mu}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_i + (N-n) \times T_n}{n}$ となる。

以下、（2）ア. と同様に考えて、母平均 μ の信頼区間を得ることができる。

よって、解答は　⑫（T）　⑬（W）　⑭（M）　⑮（D）　⑯（B）　⑰（P）　⑱（D）　⑲（A）

問題１.

（１）		（A）	５点
（２）		（E）	５点
（３）	①	（E）	完答で５点
	②	（C）	
	③	（C）	
	④	（H）	
（４）	①	（E）	完答で２点
	②	（C）	
	③	（K）	完答で３点
	④	（F）	
（５）	①	（G）	完答で５点
	②	（B）	
	③	（D）	
（６）		（E）	５点

（７）	①	（B）	完答で５点
	②	（I）	
（８）	①	（A）	完答で５点
	②	（A）	
	③	（A）	
（９）	①	（H）	完答で５点
	②	（H）	
	③	（J）	
（１０）	①	（F）	１点
	②	（D）	４点
（１１）	①	（D）	２点
	②	（G）	３点
（１２）		（G）	５点

問題２.

（１）	①	（B）	１点
	②	（A）	１点
	③	（C）	１点
	④	（F）	１点
	⑤	（N）	２点（注）

（注）③の正解を前提とする

（２）	⑥	（E）	完答で２点
	⑦	（J）	
	⑧	（H）	２点
	⑨	（C）	完答で２点
	⑩	（I）	
	⑪	（B）	完答で３点
	⑫	（J）	
	⑬	（C）	２点
	⑭	（F）	３点

問題３.

（１）	①	（B）	１点
	②	（D）	１点
	③	（A）	完答で２点
	④	（I）	
（２）	⑤	（N）	完答で２点
	⑥	（H）	
	⑦	（M）	完答で２点
	⑧	（E）	
	⑨	（H）	２点
	⑩	（C）	２点

（２）	⑪	（B）	２点
	⑫	（T）	完答で３点
	⑬	（W）	
	⑭	（M）	
	⑮	（D）	
	⑯	（B）	
	⑰	（P）	完答で３点
	⑱	（D）	
	⑲	（A）	