損保数理（問題）

特に断りがないかぎり、消費税については考慮しないこととする。また、免責金額および支払限度額は１事故あたりのものであり、各クレームは独立であるものとする。

問題１． 次のⅠ～Ⅶの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。　各７点　（計４９点）

Ⅰ．ある保険契約のクレーム１件あたりの損害額（支払保険金）分布は、$f(x)=\alpha x^{-(\alpha+1)}\quad(x>1)$ のパレート分布に従うことが分かっており、15 件の損害額のサンプルが以下のとおり記録されているとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

1.2　1.25　2　1.2　1.2　1.25　1.5　1.5　16　2　1.2　1.2　1.5　1.2　1.5

なお、必要があれば、$\log 2=0.693$、$\log 3=1.099$、$\log 5=1.609$ を使用すること。

（１）上記 15 件のサンプルデータを用いて最尤法によりパラメータ α を推定した場合、最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）1.2	（Ｂ）1.4	（Ｃ）1.6	（Ｄ）1.8	（Ｅ）2.0
（Ｆ）2.2	（Ｇ）2.4	（Ｈ）2.6	（Ｉ）2.8	（Ｊ）3.0

（２）この保険契約に免責金額２（エクセス方式）を新設した場合、保険金支払とならない事故も含んだすべての契約に対する支払保険金の期待値の減少率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。ただし、パラメータ α は最尤法により推定した数字を使用し、計算の途中においては、小数点以下第２位を四捨五入して小数点以下第１位までの数値を用いることとする。

（Ａ）30%	（Ｂ）35%	（Ｃ）40%	（Ｄ）45%	（Ｅ）50%
（Ｆ）55%	（Ｇ）60%	（Ｈ）65%	（Ｉ）70%	（Ｊ）75%

Ⅱ．危険標識を地域（都市か郊外か）および構造（木造か非木造か）の 2 区分で設定している火災保険があり、その実績クレーム単価のデータが下表のとおりであったとする。

＜クレーム単価＞

	木造	非木造
都市	900	800
郊外	600	300

地域・構造別のクレーム単価$Y_i(i=1,2,3,4)$を一般化線形モデル、すなわち、Y_iの従う指数型分布族をポアソン分布$P(Y_i=y_i)=e^{-\mu_i}\frac{{\mu_i}^{y_i}}{y_i!}$（ここで$\mu_i=E(Y_i)$である）、リンク関数を$g(x)=x$とし、次のとおり定義される説明変数$x_{ij}(i=1,2,3,4,j=1,2,3)$を用いて、$\mu_i=g^{-1}(\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\beta_3x_{i3})$と表されるモデルを用いて分析する。

$$x_{i1}=\begin{cases}1\text{（都市の場合）}\\0\text{（郊外の場合）}\end{cases},\quad x_{i2}=\begin{cases}1\text{（郊外の場合）}\\0\text{（都市の場合）}\end{cases},\quad x_{i3}=\begin{cases}1\text{（木造の場合）}\\0\text{（非木造の場合）}\end{cases}$$

ここでβ_1,β_2,β_3はパラメータであり、最尤法で推定する。このとき、次の（１）、（２）、（３）の各問に答えなさい。

（１）対数尤度関数をlとしたとき、以下の式の①～④に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

$$l=\sum_{\mathrm{i}=1}^{4}\left\{\boxed{\quad ①\quad}+\boxed{\quad ②\quad}\times\log\left(\boxed{\quad ③\quad}\right)-\log\left(\boxed{\quad ④\quad}\right)\right\}$$

（A）y_i　（B）$-y_i$　（C）$y_i!$　（D）$-y_i!$　（E）μ_i　（F）$-\mu_i$
（G）$\mu_i!$　（H）$-\mu_i!$　（I）${\mu_i}^{y_i}$　（J）$-{\mu_i}^{y_i}$　（K）いずれにも該当しない

（２）パラメータβ_1,β_2,β_3が満たす連立方程式として、以下の式の⑤～⑫に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_1} = -1 + \frac{\boxed{⑤}}{\boxed{⑥}} - 1 + \frac{\boxed{⑦}}{\boxed{⑧}} = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_2} = -1 + \frac{\boxed{⑨}}{\boxed{⑩}} - 1 + \frac{\boxed{⑪}}{\boxed{⑫}} = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_3} = -1 + \frac{\boxed{⑤}}{\boxed{⑥}} - 1 + \frac{\boxed{⑨}}{\boxed{⑩}} = 0$$

（Ａ）100　（Ｂ）200　（Ｃ）300　（Ｄ）400　（Ｅ）500
（Ｆ）600　（Ｇ）700　（Ｈ）800　（Ｉ）900　（Ｊ）1000
（Ｋ）β_1　（Ｌ）β_2　（Ｍ）β_3　（Ｎ）$\beta_1+\beta_2$　（Ｏ）$\beta_1+\beta_3$
（Ｐ）$\beta_2+\beta_3$　（Ｑ）$\beta_1+\beta_2+\beta_3$　（Ｒ）$\beta_1\beta_2$　（Ｓ）$\beta_1\beta_3$　（Ｔ）$\beta_2\beta_3$
（Ｕ）$\beta_1\beta_2\beta_3$　（Ｖ）いずれにも該当しない

（３）一般化線形モデルで計算した場合の、「都市かつ非木造」のクレーム単価の期待値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）720　（Ｂ）740　（Ｃ）760　（Ｄ）780　（Ｅ）800
（Ｆ）820　（Ｇ）840　（Ｈ）860　（Ｉ）880　（Ｊ）900

Ⅲ．以下のような累計支払保険金実績データのある保険種目に関して、2012 年度末の支払備金（＝「最終累計発生保険金の合計」－「2012 年度末の累計支払保険金の合計」）の評価を行うことを考える。なお、この保険種目は第 4 経過年度で保険金の支払を完了する（支払備金が残らない）ものとし、累計支払保険金のロスディベロップメントファクターの予測値には、既知の事故年度別ロスディベロップメントファクターを単純平均した値を用いるものとする。
また、計算の途中において、ロスディベロップメントファクターについては小数点以下第４位を四捨五入して小数点以下第３位までの数値を用い、保険金・支払備金については小数点以下第１位を四捨五入して整数値を用いるものとする。なお、インフレの影響は考慮しなくてよい。

＜事故年度別　累計支払保険金の推移＞

事故年度	経過年度			
	1	2	3	4
2009 年度	1,500	3,455	4,010	4,325
2010 年度	1,850	4,052	4,250	
2011 年度	1,920	4,505		
2012 年度	2,020			

このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）チェインラダー法による 2012 年度末の支払備金に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A） 4,070　**（B）** 4,170　**（C）** 4,270　**（D）** 4,370　**（E）** 4,470
（F） 4,570　**（G）** 4,670　**（H）** 4,770　**（I）** 4,870　**（J）** 4,970

（2）実績データの十分性に疑義があるため、さらにボーンヒュッターファーガソン法を用いて評価を行うこととした。
事故年度ごとの最終累計発生保険金の当初予測値を、下表の既経過保険料および予定損害率から算出するものとすると、ボーンヒュッターファーガソン法による 2012 年度末の支払備金に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

事故年度	既経過保険料	予定損害率
2009 年度	9,100	50%
2010 年度	9,800	55%
2011 年度	10,000	60%
2012 年度	10,500	60%

（A） 5,040　**（B）** 5,140　**（C）** 5,240　**（D）** 5,340　**（E）** 5,440
（F） 5,540　**（G）** 5,640　**（H）** 5,740　**（I）** 5,840　**（J）** 5,940

余白ページ

Ⅳ．積立保険の保険料年払契約において、保険期間中に全損失効が全く発生しない場合の保険会社の損失を求めたい。ただし、損失とは（支出の現価）－（収入の現価）とし、積立保険料、満期返戻金以外の収入・支出はないものとする。また、満期返戻金をW、保険期間をn年、予定利率をi、現価率を$v=\dfrac{1}{1+i}$、予定契約消滅率qを考慮した現価率を$\phi=(1-q)v$とする。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）年払契約の積立保険料として正しいものは、選択肢のうちのどれか。

（A）$W\phi^n\dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}$　　（B）$Wv^n\dfrac{1-v}{1-v^n}$

（C）$W\phi^n\dfrac{1-\phi^n}{1-\phi}$　　（D）$Wv^n\dfrac{1-v^n}{1-v}$

（E）$Wv^n\dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}$　　（F）$W\phi^n\dfrac{1-v}{1-v^n}$

（G）$W\dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}$　　（H）$W\dfrac{1-v}{1-v^n}$

（I）$Wv^n\dfrac{1-\phi^n}{1-\phi}$　　（J）$W\phi^n\dfrac{1-v^n}{1-v}$

（K）いずれにも該当しない

（2）保険会社の損失として正しいものは、選択肢のうちのどれか。

（A）$Wv^n - Wv^n \dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}\dfrac{1-v^n}{1-v}$

（B）$W - W\phi^n \dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}\dfrac{1-v^n}{1-v}$

（C）$W\phi^n - W\phi^n \dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}\dfrac{1-v^n}{1-v}$

（D）$Wv^n - W\phi^n \dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}\dfrac{1-v^n}{1-v}$

（E）$W\phi^n - Wv^n \dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}\dfrac{1-v^n}{1-v}$

（F）$W\phi^n - Wv^n \dfrac{1-v}{1-v^n}\dfrac{1-\phi^n}{1-\phi}$

（G）$Wv^n - W \dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}\dfrac{1-v^n}{1-v}$

（H）$W - W \dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}\dfrac{1-v^n}{1-v}$

（I）$W - W\phi^n \dfrac{1-v}{1-v^n}\dfrac{1-\phi^n}{1-\phi}$

（J）0

（K）いずれにも該当しない

Ｖ．将来の保険金 X が平均 4 の指数分布に従うものとするとき、以下の①～④の保険料算出原理によって将来の保険金に対応する保険料（予定事業費等の付加保険料は考慮しない）を算出することを考える。このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。なお、必要があれば、$\log 2 = 0.693$、$\log 3 = 1.099$、$\log 5 = 1.609$ を使用すること。

① 期待値原理（$P(X) = (1+h)\mu_X$）で $h = 0.1$

② 指数原理（$P(X) = \dfrac{\log M_X(h)}{h}$）で $h = 0.1$

③ パーセンタイル原理（$P(X) = \min\{p \mid F_X(p) \geq 1-h\}$）で $h = 0.1$

④ エッシャー原理（$P(X) = \dfrac{E(Xe^{hX})}{E(e^{hX})}$）で $h = 0.1$

ただし μ_X、$M_X(h)$、$F_X(p)$ はそれぞれ X の期待値、積率母関数、分布関数を表す。

（１）①～④で算出した保険料のうち、最大のもの、最小のものは、それぞれ【選択肢】のうちのどれか。

（２）支払う保険金 X が一律で 2 倍になったとき、①～④で算出した保険料のうち、最大のもの、最小のものは、それぞれ【選択肢】のうちのどれか。

【選択肢】（問題１　Ｖで共通。同じ選択肢を複数回用いてもよい。）

（A） ①　**（B）** ②　**（C）** ③　**（D）** ④

VI. ある保険商品の１事故あたりの支払保険金 X は、次の確率密度関数を持つパレート分布に従っている。

$$f(x) = 1.5x^{-2.5} \quad (x > 1)$$

現在、この保険商品を 10%比例再保険に出再している。このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）10%比例再保険の１事故あたりの回収保険金期待値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）0.20　（Ｂ）0.22　（Ｃ）0.24　（Ｄ）0.26　（Ｅ）0.28
（Ｆ）0.30　（Ｇ）0.32　（Ｈ）0.34　（Ｉ）0.36　（Ｊ）0.38

（２）今、再保険契約を以下のような条件を満たすＥＬＣ再保険に変更したい。このとき、設定すべきエクセスポイントに最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

条件１：年間回収保険金期待値が 10%比例再保険の年間回収保険金期待値と等しい
条件２：エクセスポイントとカバーリミットが等しい

（Ａ）2.0　（Ｂ）2.2　（Ｃ）2.4　（Ｄ）2.6　（Ｅ）2.8
（Ｆ）3.0　（Ｇ）3.2　（Ｈ）3.4　（Ｉ）3.6　（Ｊ）3.8

Ⅶ．ある保険商品の支払保険金 X が、対数正規分布

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x}exp\left(-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (0<x)$$

に従っており、その平均はm、標準偏差はsであることが分かっている。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）この保険商品の支払保険金 X の$100\alpha\%VaR$（ここで$0<\alpha<1$である）を、標準正規分布の分布関数$\Phi(x)$を用いて表したとき、以下の式の①、②に当てはまる最も適切なものは、【選択肢】のうちのどれか。

$$VaR_\alpha(X)=\frac{m}{\boxed{①}}exp\{\boxed{②}\times\Phi^{-1}(\alpha)\}$$

（2）この保険商品の支払保険金 X の$100\alpha\%TVaR$（ここで$0<\alpha<1$である）を、標準正規分布の分布関数$\Phi(x)$を用いて表したとき、以下の式の③～⑤に当てはまる最も適切なものは、【選択肢】のうちのどれか。

$$TVaR_\alpha(X)=\frac{m}{\boxed{③}}\{1-\Phi(\boxed{④}-\boxed{⑤})\}$$

【選択肢】（問題１ Ⅶで共通。同じ選択肢を複数回用いてもよい。）

（A）α　（B）$1-\alpha$
（C）$\Phi(\alpha)$　（D）$1-\Phi(\alpha)$
（E）$\Phi^{-1}(\alpha)$　（F）$1-\Phi^{-1}(\alpha)$
（G）$1+s^2/m^2$　（H）$\sqrt{1+s^2/m^2}$
（I）$\log(1+s^2/m^2)$　（J）$\sqrt{\log(1+s^2/m^2)}$
（K）$\log\sqrt{1+s^2/m^2}$　（L）$\sqrt{\log\sqrt{1+s^2/m^2}}$
（M）いずれにも該当しない

問題２． 次のⅠ～Ⅴの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。 Ⅰ～Ⅳ:各７点、Ⅴ:６点 （計３４点）

Ⅰ．ある保険商品の年間事故率が、各年度独立に、同一のベータ分布

$$f(x) = q(1-x)^{q-1} \quad (0 < x < 1)$$

に従っており、過去 10 年間の年間事故率が下表のとおりであったとする。

＜年間事故率＞

年度	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
事故率	50%	40%	36%	50%	50%	40%	50%	40%	36%	40%

このとき、最尤推定量の漸近分布を用いて q の 95%信頼区間を求めた場合、q の 95%信頼区間の上限値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、q の真なる値は未知であるため、 q の値には最尤法による推定値を用いることとし、小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位までの数値を用いることとする。また、必要があれば、$\log 2 = 0.693$、$\log 3 = 1.099$、$\log 5 = 1.609$ および下表（標準正規分布の上側 ε 点）の数値を使用すること。

＜表＞標準正規分布の上側 ε 点：$u(\varepsilon)$

ε	0.100	0.075	0.050	0.025
$u(\varepsilon)$	1.282	1.440	1.645	1.960

（Ａ）1.80 （Ｂ）2.00 （Ｃ）2.20 （Ｄ）2.40 （Ｅ）2.60
（Ｆ）2.80 （Ｇ）3.00 （Ｈ）3.20 （Ｉ）3.40 （Ｊ）3.60

Ⅱ．ある保険商品では、保険期間１年間の事故の有無により翌年度契約の保険料が割増または割引となる等級制度を導入している。具体的には、等級１（保険料割増率 30%）、等級２（保険料割増引率 0%）、等級３（保険料割引率 20%）の３つの等級から構成され、１年間クレーム請求の無かった契約者の等級は１つ上がり、クレーム請求があった契約者の等級は１つ下がる。なお、等級１でクレーム請求があった場合の翌年度契約の等級は１、等級３でクレーム請求が無かった場合の翌年度契約の等級は３であるとする。

また、各契約者の年間クレーム件数は、等級によらず、同一の二項分布

$$P(X=x)=\binom{1}{x}p^x(1-p)^{1-x} \qquad (x=0,1)\ (0<p<1)$$

に従うとし、この契約集団の契約者数は、常に一定（つまり、新規契約の流入、既存契約の流出が発生しない）で、正の数であるものとする。このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）この契約集団が定常状態（つまり、契約者分布の増減がない状態）に達したとき、等級３の契約者数は等級２の契約者数の３倍となっていた。このとき、各契約者の年間クレーム件数の期待値は ① である。①に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.05　（B）0.10　（C）0.15　（D）0.20　（E）0.25
（F）0.30　（G）0.35　（H）0.40　（I）0.45　（J）0.50

（２）各契約者の年間クレーム件数の期待値が、（１）の状態から 1.2 倍に上昇したとする。この状態で、この契約集団が定常状態に達したときの総保険料収入は、各契約者の年間クレーム件数の期待値が上昇する前の定常状態の総保険料収入の ② 倍となる。②に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）1.00　（B）1.03　（C）1.06　（D）1.09　（E）1.12
（F）1.15　（G）1.18　（H）1.21　（I）1.24　（J）1.27

Ⅲ．クレーム件数過程$\{N_t\}_{t\geq 0}$が次の条件を満たすとする。

※　$0 \leq s < t \leq u < v \Rightarrow N_t - N_s$ と $N_v - N_u$ は独立

※　$P(N_t = 0) = \exp\left(-\lambda t^{1/3}\right)\ (0 \leq t)$ が成り立つ

※　同一時刻に２件以上のクレームが発生することはない

このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）オペレーショナル・タイム$\tau(t)$として正しいものは、選択肢のうちのどれか。

（A）$\lambda^3 t$　（B）$\frac{1}{3}\lambda t^{1/3}$　（C）$\lambda t^{1/3}$　（D）$3\lambda t^{1/3}$　（E）λt

（F）$\frac{1}{6}\lambda^{1/2} t^{1/6}$　（G）$\frac{1}{2}\lambda t^{1/2}$　（H）$\lambda^2 t^{2/3}$　（I）$6\lambda^{1/2} t^{1/6}$　（J）$2\lambda t^{1/2}$

（K）いずれにも該当しない

（２）n件目のクレームが発生する時刻を表す確率変数をT_nとするとき、T_nの平均として正しいものは、選択肢のうちのどれか。

（ヒント）パラメータλのポアソン過程において、n件目のクレームが発生する時刻はガンマ分布$\Gamma(n, \lambda)$（確率密度関数$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{n-1}$）に従う。

（A）$\frac{n(n+1)(n+2)}{3\lambda^3}$　（B）$\frac{n(n+1)}{\lambda^2}$　（C）$\frac{n(n+1)}{\lambda^3}$　（D）$\frac{1}{\lambda^3}$　（E）$\frac{n}{\lambda^3}$

（F）$\frac{n}{\lambda}$　（G）$\frac{3n(n+1)(n+2)}{\lambda^3}$　（H）$\frac{n(n+1)}{2\lambda^2}$　（I）$\frac{n(n+1)(n+2)}{\lambda^3}$　（J）$\frac{2n(n+1)}{\lambda^2}$

（K）いずれにも該当しない

Ⅳ．ある火災保険と賠償責任保険の一体型保険商品 1 契約における、火災保険の年間支払件数 N_1 と賠償責任保険の年間支払件数 N_2 はどちらも以下の確率分布に従う。また、確率変数 (N_1, N_2) のコピュラは共単調コピュラ $C(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2)$ であることが分かっている。

年間支払件数（N_1 または N_2）	0	1	2
発生確率	0.6	0.3	0.1

さらに、火災保険の 1 事故あたりの支払保険金 X_1 はガンマ分布 $\Gamma(0.5,\ 1)$ に、賠償責任保険の 1 事故あたりの支払保険金 X_2 はガンマ分布 $\Gamma(1.5,\ 1)$ に従っているとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。なお、必要があれば、$e^{-1} = 0.368$ を使用すること。

（1）火災保険と賠償責任保険合算の年間合計支払件数が 4 件になる確率に最も近いのは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.01　（B）0.02　（C）0.03　（D）0.04　（E）0.05
（F）0.06　（G）0.07　（H）0.08　（I）0.09　（J）0.10

（2）火災保険と賠償責任保険合算の年間合計支払保険金が 1 以上になる確率に最も近いのは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.20　（B）0.22　（C）0.24　（D）0.26　（E）0.28
（F）0.30　（G）0.32　（H）0.34　（I）0.36　（J）0.38

V．次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）以下のイからハの説明文について、正誤の組み合わせとして最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

イ．有限変動信頼性理論は、「変動幅 k 」や「変動幅の範囲内になる確率 p 」といった重要なパラメータを指針の無い中で選択しなければならないという問題がある。ベイズ方法論は、そのような問題を解決する統計的手法である。

ロ．エッシャー原理は、期待効用原理に基づく均衡価格の考え方に、リスクの独立性に関するある種の仮定を加えることで導かれる。また、 X が対数正規分布に従う場合など、 X の積率母関数が存在しない場合にはエッシャー原理による算出値は存在しない。

ハ．支払備金の見積手法の一つである算式見積法は、一定の算出式（例えば発生保険金の一定割合など）を用いて算出する方法であり、既発生未報告損害の見積もりに用いる。

（A） 全て正しい	**（B）** イ、ロのみ正しい
（C） イ、ハのみ正しい	**（D）** ロ、ハのみ正しい
（E） イのみ正しい	**（F）** ロのみ正しい
（G） ハのみ正しい	**（H）** 全て誤り

（2）以下のニからへの説明文について、正誤の組み合わせとして最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

ニ．IFM 法は、周辺分布の推定誤りの影響を避けるため、観測データを周辺経験分布により分位点データに変換し、これをもとに最尤法によりコピュラのパラメータを推定する方法である。

ホ．コヒーレント・リスク尺度の 1 つである単調性とは、 $\rho(X_1+X_2)\le\rho(X_1)+\rho(X_2)$ を満たす性質のことである。

へ．閾値超過モデルとは、同一分布からの独立な標本の最大値の確率的性質を扱うモデルであるが、最大値以外の多くのデータを捨ててしまうという問題を有している。

（A） 全て正しい	**（B）** ニ、ホのみ正しい
（C） ニ、へのみ正しい	**（D）** ホ、へのみ正しい
（E） ニのみ正しい	**（F）** ホのみ正しい
（G） へのみ正しい	**（H）** 全て誤り

問題３． 次のⅠ、Ⅱの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。　　　　　　　　　　　　Ⅰ：９点、Ⅱ：８点　（計１７点）

Ⅰ. 保有する富 x に対する効用関数が $u(x)=-e^{-0.001x}$ である契約者が、期初に 10,000 の富を持っている。この契約者が保険期間１年の入院保険（入院１日あたり定額 100 の保険金を支払う保険）への加入を検討している。当該入院保険のクレーム総額分布は複合負の二項分布に従うものとし、１年間あたりの入院発生件数は確率関数 $f(n)=\begin{pmatrix}1+n\\ n\end{pmatrix}\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^n$ $(n=0,1,2\cdots)$ で表される負の二項分布、１回の入院あたりの入院日数分布は平均 6 の指数分布で、入院発生件数、各入院日数は互いに独立であるとする。また、この契約者が入院１日あたりに支出する費用は 100 とし、この契約者の１年間あたりの入院発生件数、１回の入院あたりの入院日数分布は当該入院保険の分布と同じであるとする。なお、入院による支出のリスクと当該入院保険のみを考慮し、金利は加味しないものとする。このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）この契約者が、当該入院保険を買わない場合の期末（１年後）の効用の期待値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）$-1.56e^{-10}$　（B）$-2.56e^{-10}$　（C）$-3.56e^{-10}$　（D）$-4.56e^{-10}$　（E）$-5.56e^{-10}$
（F）$-1.56e^{-5}$　（G）$-2.56e^{-5}$　（H）$-3.56e^{-5}$　（I）$-4.56e^{-5}$　（J）$-5.56e^{-5}$

（２）保険会社は当該入院保険について期待値原理に基づいて純保険料に安全割増を付加するとともに社費を定額で 180、代理店手数料率、利潤率を営業保険料に対する割合でそれぞれ 15%と 5%と織り込んで販売する。このとき、期末（１年後）における効用の期待値の大小により保険への加入を決めるとした場合、この契約者がリスクを移転するために支払う営業保険料（年払）の上限は $\boxed{\quad ① \quad}$ であり、この契約者が当該入院保険に加入するためには、保険会社は純保険料に対する安全割増率を $\boxed{\quad ② \quad}$ 以内にする必要がある。①、②に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば、$\log 2=0.693$、$\log 3=1.099$、$\log 5=1.609$、$\log 7=1.946$ を使用すること。

【①の選択肢】
（A）900　（B）910　（C）920　（D）930　（E）940
（F）950　（G）960　（H）970　（I）980　（J）990

【②の選択肢】
（A）10%　（B）20%　（C）30%　（D）40%　（E）50%
（F）60%　（G）70%　（H）80%　（I）90%　（J）100%

余白ページ

Ⅱ．2 種類の保険種目を販売している保険会社について、それぞれの保険種目の契約ポートフォリオから生じるクレーム件数が独立でない場合の連続時間型モデルの破産確率を考える。サープラスの推移 U_t は、

$$U_t = u_0 + ct - S_t^{(1)} - S_t^{(2)}$$

u_0 ：期首サープラス

$N_t^{(i)}$ ：期間 $[0,t]$ において発生した保険種目 i （$i=1,2$）のクレーム件数

$S_t^{(i)} = X_1^{(i)} + X_2^{(i)} + \cdots + X_{N_t^{(i)}}^{(i)}$ ：保険種目 i （$i=1,2$）の支払保険金の総額

c ：単位時間あたりの収入保険料

により表されるものとし、次の 4 つを仮定する。

① 個々のクレーム額 $X_1^{(i)}, X_2^{(i)} \cdots$（$i=1,2$）およびクレーム件数 $N_t^{(i)}$（$i=1,2$）は、$N_t^{(1)}$ と $N_t^{(2)}$ の間を除き、互いに独立である。

② 個々のクレーム額 $X_1^{(1)}, X_2^{(1)} \cdots$ および $X_1^{(2)}, X_2^{(2)} \cdots$ は、それぞれ平均が μ_1 および μ_2 の指数分布に従う。

③ $N_t^{(1)}$ と $N_t^{(2)}$ は、それぞれパラメータ $\lambda_1 - \lambda_0$、$\lambda_2 - \lambda_0$、λ_0 の互いに独立なポアソン過程 N_t^{α}、N_t^{β}、N_t^{γ} を用いて、$N_t^{(1)} = N_t^{\alpha} + N_t^{\gamma}$、$N_t^{(2)} = N_t^{\beta} + N_t^{\gamma}$ とモデル化できる。したがって、λ_0 が大きいほど 2 つの保険種目のクレーム件数の相関は大きく、$\lambda_0 = 0$ のとき両者は独立となる。

④ 2 つの保険種目の保険料の安全割増率は等しく、θ とする。

このとき、次の（1）、（2）、（3）の各問に答えなさい。

（1）調整係数rが満たすべき方程式は、選択肢のうちのどれか。

（A） $\dfrac{\lambda_1\mu_1}{1-\mu_1 r}+\dfrac{\lambda_2\mu_2}{1-\mu_2 r}+\lambda_0=(1+\theta)(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2)$

（B） $\dfrac{\lambda_1\mu_1}{1-\mu_1 r}+\dfrac{\lambda_2\mu_2}{1-\mu_2 r}+\dfrac{\lambda_0\mu_1\mu_2 r}{(1-\mu_1 r)(1-\mu_2 r)}=(1+\theta)(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2)$

（C） $\dfrac{\lambda_1\mu_1}{1-\mu_1 r}+\dfrac{\lambda_2\mu_2}{1-\mu_2 r}+\lambda_0\mu_1\mu_2 r\left(\dfrac{1}{1-\mu_1 r}+\dfrac{1}{1-\mu_2 r}\right)=(1+\theta)(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2)$

（D） $\dfrac{\lambda_1\mu_1}{1-\mu_1 r}+\dfrac{\lambda_2\mu_2}{1-\mu_2 r}+\dfrac{\lambda_0\mu_1\mu_2 r}{(1-\mu_1 r-\mu_2 r)}=(1+\theta)(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2)$

（E） $\dfrac{\lambda_1\mu_1}{1-\mu_1 r}+\dfrac{\lambda_2\mu_2}{1-\mu_2 r}=(1+\theta)(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2)$

（F） $\dfrac{\lambda_1\mu_1}{1-\mu_1 r}+\dfrac{\lambda_2\mu_2}{1-\mu_2 r}+\lambda_0=(1+\theta)((\lambda_1-\lambda_0)\mu_1+(\lambda_2-\lambda_0)\mu_2)$

（G） $\dfrac{\lambda_1\mu_1}{1-\mu_1 r}+\dfrac{\lambda_2\mu_2}{1-\mu_2 r}+\dfrac{\lambda_0\mu_1\mu_2 r}{(1-\mu_1 r)(1-\mu_2 r)}=(1+\theta)((\lambda_1-\lambda_0)\mu_1+(\lambda_2-\lambda_0)\mu_2)$

（H） $\dfrac{\lambda_1\mu_1}{1-\mu_1 r}+\dfrac{\lambda_2\mu_2}{1-\mu_2 r}+\lambda_0\mu_1\mu_2 r\left(\dfrac{1}{1-\mu_1 r}+\dfrac{1}{1-\mu_2 r}\right)=(1+\theta)((\lambda_1-\lambda_0)\mu_1+(\lambda_2-\lambda_0)\mu_2)$

（I） $\dfrac{\lambda_1\mu_1}{1-\mu_1 r}+\dfrac{\lambda_2\mu_2}{1-\mu_2 r}+\dfrac{\lambda_0\mu_1\mu_2 r}{(1-\mu_1 r-\mu_2 r)}=(1+\theta)((\lambda_1-\lambda_0)\mu_1+(\lambda_2-\lambda_0)\mu_2)$

（J） $\dfrac{\lambda_1\mu_1}{1-\mu_1 r}+\dfrac{\lambda_2\mu_2}{1-\mu_2 r}=(1+\theta)((\lambda_1-\lambda_0)\mu_1+(\lambda_2-\lambda_0)\mu_2)$

（K） いずれにも該当しない

（2）$u_0 = 45$、$\mu_1 = \mu_2 = 6$、$\lambda_1 = \lambda_2 = 15$、$\lambda_0 = 0$ のとき、Lundberg の不等式を用いて保険会社にとって最も保守的に評価した破産確率を e^{-3} まで許容するものとしたときに必要となる最小の安全割増率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）17%　（Ｂ）20%　（Ｃ）25%　（Ｄ）33%　（Ｅ）40%
（Ｆ）50%　（Ｇ）60%　（Ｈ）67%　（Ｉ）75%　（Ｊ）80%

（3）$u_0 = 45$、$\mu_1 = \mu_2 = 6$、$\lambda_1 = \lambda_2 = 15$、$\lambda_0 = 1$ のとき、（2）の条件を満たす安全割増率を採用したとすると、Lundberg の不等式を用いて保険会社にとって最も保守的に評価した破産確率は $\exp\left(- \boxed{}\right)$ となる。
$\boxed{}$ に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）2.75　（Ｂ）2.80　（Ｃ）2.85　（Ｄ）2.90　（Ｅ）2.95
（Ｆ）3.00　（Ｇ）3.05　（Ｈ）3.10　（Ｉ）3.15　（Ｊ）3.20

以上

損保数理（解答例）

問題１．

Ⅰ．

<u>（１）**（Ｅ）**　（２）**（Ｊ）**</u>　　　［（１）３点、（２）４点］

（１）

尤度関数は、

$$L(\alpha)=\prod_{i=1}^{15}\alpha x_i^{-(\alpha+1)}$$

対数尤度関数は、

$$\log L(\alpha)=\sum_{i=1}^{15}\left\{\log\alpha-(\alpha+1)\log x_i\right\}$$

尤度方程式は

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\log L(\alpha)=\sum_{i=1}^{15}\left(\frac{1}{\alpha}-\log x_i\right)=\frac{15}{\alpha}-\log(2^4\times3^{10}\times5^{-4})=0$$

これを解くと、

$$\hat{\alpha}=\frac{15}{4\cdot\log2+10\cdot\log3-4\cdot\log5}=2.0$$

（２）

免責金額導入前の支払保険金期待値は、

$$E(X_1)=\frac{\alpha}{\alpha-1}=2.0$$

免責金額β導入後の支払保険金期待値は、

$$E(X_2)=\int_\beta^\infty(x-\beta)f(x)dx=\int_\beta^\infty x\cdot\alpha x^{-(\alpha+1)}dx-\beta\int_\beta^\infty\alpha x^{-(\alpha+1)}dx$$

$$=\left[\frac{\alpha}{-(\alpha-1)}\cdot x^{-(\alpha-1)}\right]_\beta^\infty-\beta\left[(-1)\cdot x^{-\alpha}\right]_\beta^\infty$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha-1}\cdot\beta^{-(\alpha-1)}-\beta^{-(\alpha-1)}$$

$$=\frac{1}{\alpha-1}\cdot\beta^{-(\alpha-1)}$$

$\beta=2$を代入すると、$E(X_2)=0.5$

よって、求める減少率は、

$$1-\frac{E(X_2)}{E(X_1)}=0.75$$

問題１.

Ⅱ.

（１）①（**F**）②（**A**）③（**E**）④（**C**）(①～④は完答)

（２）⑤（**I**）⑥（**O**）⑦（**H**）⑧（**K**）⑨（**F**）⑩（**P**）⑪（**C**）⑫（**L**）(⑤～⑫は完答)

（３）（**B**）　　　　［（１） ２点、（２） ３点、（３） ２点］

（１）

尤度関数は $L = \prod_{i=1}^{4} e^{-\mu_i} \frac{{\mu_i}^{y_i}}{y_i!}$ であることから、

対数尤度関数は、$l = logL = \sum_{i=1}^{4}(-\mu_i + y_i log\mu_i - logy_i!)$

となる。

（２）

$y_1 = 900$(都市かつ木造)、　$y_2 = 800$(都市かつ非木造)、

$y_3 = 600$(郊外かつ木造)、　$y_4 = 300$(郊外かつ非木造) とする。

また、

$$\mu_i = g^{-1}(\beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3})$$

$$= \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} = \begin{cases} \beta_1 + \beta_3 \ (i = 1) \\ \beta_1 \ (i = 2) \\ \beta_2 + \beta_3 \ (i = 3) \\ \beta_2 \ (i = 4) \end{cases}$$

より、

$$l = -(\beta_1 + \beta_3) + 900log(\beta_1 + \beta_3) - log900!$$

$$- \beta_1 + 800log\beta_1 - log800!$$

$$- (\beta_2 + \beta_3) + 600log(\beta_2 + \beta_3) - log600!$$

$$- \beta_2 + 300log\beta_2 - log300!$$

であるから、パラメータ$\beta_1, \beta_2, \beta_3$が満たす連立方程式は、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial \beta_1} = -1 + \dfrac{900}{\beta_1 + \beta_3} - 1 + \dfrac{800}{\beta_1} = 0 \\ \dfrac{\partial l}{\partial \beta_2} = -1 + \dfrac{600}{\beta_2 + \beta_3} - 1 + \dfrac{300}{\beta_2} = 0 \\ \dfrac{\partial l}{\partial \beta_3} = -1 + \dfrac{900}{\beta_1 + \beta_3} - 1 + \dfrac{600}{\beta_2 + \beta_3} = 0 \end{cases}$$

となる。

（３）

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ を求めるために、（２）で求めた連立方程式を解く。

ここで、 $-1 + \frac{900}{\beta_1 + \beta_3} = C$ とおくと、

$-1 + \frac{800}{\beta_1} = -C$、$-1 + \frac{600}{\beta_2 + \beta_3} = -C$、$-1 + \frac{300}{\beta_2} = C$ であるから、

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_3 = \dfrac{900}{1 + C} \\ \beta_1 = \dfrac{800}{1 - C} \\ \beta_2 + \beta_3 = \dfrac{600}{1 - C} \\ \beta_2 = \dfrac{300}{1 + C} \end{cases}$$

と整理でき、

$$\frac{900}{1 + C} - \frac{800}{1 - C} = \frac{600}{1 - C} - \frac{300}{1 + C}$$

を解くことで、 $C = -1/13$ と求められる。よって、「都市かつ非木造」のクレーム単価は、

$$\beta_1 = \frac{800}{1 - C} = 800 \times 13/14 = 743$$

問題１.

Ⅲ

（１）**（G）**　　（２）**（D）**　　［（１） ３点、（２） ４点］

（１）

事故年度	経過年度			
	1	2	3	4
2009 年度	1,500	3,455	4,010	4,325
2010 年度	1,850	4,052	4,250	
2011 年度	1,920	4,505		
2012 年度	2,020			

ロスディベロップメントファクターを計算すると、

経過年数	1→2	2→3	3→4
ＬＤＦ	2.280	1.105	1.079

2009 年度は第 4 経過年度まで達しているため、ロスディベロップメントファクターは 1.000 となり、2010 年度から 2012 年度は各々、累積支払保険金のロスディベロップメントファクターは 1.079、1.192、2.718 となる。

これらを各事故年度の直近累計支払保険金に乗じると、予想最終発生保険金は 4,325、4,586、5,370、5,490 となる。したがって、支払備金は

（4,325＋4,586＋5,370＋5,490）－（4,325＋4,250＋4,505＋2,020）＝<u>4,671</u>

となる。

（２）

与えられた既経過保険料と予定損害率から、事故年度ごとの最終累計発生保険金の当初予測値は 4,550、5,390、6,000、6,300 となる。これより、

第1事故年度は$\left(1-\dfrac{1}{1}\right)\times 4{,}550+4{,}325=4{,}325$

第2事故年度は$\left(1-\dfrac{1}{1.079}\right)\times 5{,}390+4{,}250=4{,}645$

第3事故年度は$\left(1-\dfrac{1}{1.192}\right)\times 6{,}000+4{,}505=5{,}471$

第4事故年度は$\left(1-\dfrac{1}{2.718}\right)\times 6{,}300+2{,}020=6{,}002$

が、各事故年度のボーンヒュッターファーガソン法による予想最終累計発生保険金となる。

したがって、支払備金は

（4,325＋4,645＋5,471＋6,002）－（4,325＋4,250＋4,505＋2,020）＝<u>5,343</u>

となる。

問題１.

Ⅳ

（１）①（A）（２）（D）　　　［（１）３点、（２）４点］

（１）

年払積立保険料を P_n とすると、収支相等の原則より $P_n \cdot \left(1+\phi+\cdots+\phi^{n-1}\right)=W\phi^n$ となる。これを解くと、

$$P_n = W\phi^n \frac{1-\phi}{1-\phi^n}$$

（２）

全損失効が発生しないので、収入積立保険料の現価は $P_n \cdot \dfrac{1-v^n}{1-v}$ 、支出の現価は $W\,v^n$ である。

よって、損失=支出－収入= $Wv^n - W\phi^n \dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}\dfrac{1-v^n}{1-v}$ となる。

問題１.

Ⅴ

（１）最大: **（C）**、最小: **（A）**　（２）最大: **（D）**、最小: **（A）**（最大・最小は完答）

［（１） ３点、（２） ４点］

（１）

平均４の指数分布の確率密度関数は、 $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$、$\lambda=0.25$　となる。

① $P(X)=(1+h)\mu_X=1.1\times 4=4.4$

② $M_X(t)=\dfrac{\lambda}{\lambda - t}$　であり、$P(X)=\dfrac{\log M_X(h)}{h}=\log\left(\dfrac{\lambda}{\lambda - h}\right)/h=\log\left(\dfrac{0.25}{0.15}\right)/0.1=5.1$

③ $F_X(x)=1-e^{-\lambda x}$　であり、

$$P(X)=\min\{p\,|\,F_X(p)\geq 1-h\}=F_X^{-1}(1-h)=-\frac{\log(h)}{\lambda}=-\frac{\log(0.1)}{0.25}=9.2$$

④ $E(Xe^{hX})=\dfrac{\lambda}{(\lambda - h)^2}$　、$E(e^{hX})=\dfrac{\lambda}{(\lambda - h)}$　であり、

$$P(X)=\frac{E(Xe^{hX})}{E(e^{hX})}=\frac{1}{(\lambda - h)}=\frac{1}{0.15}=6.7$$

（２）

平均８の指数分布に従うこととなり、確率密度関数は、 $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$、$\lambda=0.125$　となる。

① $P(X)=(1+h)\mu_X=1.1\times 8=8.8$

② $P(X)=\log\left(\dfrac{\lambda}{\lambda - h}\right)/h=\log\left(\dfrac{0.125}{0.025}\right)/0.1=16.1$

③ $P(X)=-\dfrac{\log(h)}{\lambda}=-\dfrac{\log(0.1)}{0.125}=18.4$

④ $P(X)=\dfrac{1}{(\lambda - h)}=\dfrac{1}{0.025}=40.0$

問題１.

Ⅵ

<u>（1）**（Ｆ）**　（2）**（Ｊ）**</u>　　　［（1） 2点、（2） 5点］

（1）

10%比例再保険の1事故あたりの回収保険金 X_1 の期待値は、

$$E(X_1) = 0.1 \cdot \int_1^\infty xf(x)dx = 0.1 \cdot \int_1^\infty x \cdot 1.5x^{-2.5}dx$$

$$= 0.1 \cdot \left[\frac{1.5}{-0.5} x^{-0.5} \right]_1^\infty = 0.30$$

（2）

エクセスポイントと支払限度額をαとした場合のＥＬＣ再保険の 1 事故あたりの回収保険金 X_2 の期待値は、

$$E(X_2) = \int_\alpha^{2\alpha} (x-\alpha) f(x)dx + \int_{2\alpha}^\infty \alpha \cdot f(x)dx$$

$$= \int_\alpha^{2\alpha} x \cdot 1.5x^{-2.5}dx - \alpha \int_\alpha^{2\alpha} 1.5x^{-2.5}dx + \alpha \int_{2\alpha}^\infty 1.5x^{-2.5}dx$$

$$= \left[\frac{1.5}{-0.5} x^{-0.5} \right]_\alpha^{2\alpha} - \alpha \left[(-1) \cdot x^{-1.5} \right]_\alpha^{2\alpha} + \alpha \left[(-1) \cdot x^{-1.5} \right]_{2\alpha}^\infty$$

$$= 3(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - (1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}) \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}}$$

2つの再保険契約の回収期待値が一致するため、

$$E(X_1) = E(X_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} = 0.3$$

これを解くと、

$$\alpha = 3.8$$

問題１.

Ⅶ

（１）①（Ｈ）②（Ｊ）（①②は完答）　（２）③（Ｂ）④（Ｅ）⑤（Ｊ）（③～⑤は完答）

［（１）３点、（２）４点］

（１）

テキスト 10-63 より、

$$VaR_{\alpha}(X) = \frac{m^2}{\sqrt{m^2+s^2}} exp\left(\sqrt{log(1+s^2/m^2)} \cdot \Phi^{-1}(\alpha)\right)$$
$$= \frac{m}{\sqrt{1+s^2/m^2}} exp\left(\sqrt{log(1+s^2/m^2)} \cdot \Phi^{-1}(\alpha)\right)$$

（２）

テキスト 10-64

問題２.

Ⅰ.

（Ｆ）　　　［７点］

まず、最尤法によるqの推定値を求める。

事故率の実績データを$x_1, x_2, \cdots, x_{10}$とすると、尤度関数は$L(q) = q^{10} \prod_{i=1}^{10}(1-x_i)^{q-1}$であることから、

対数尤度関数は$l(q) = \log L(q) = 10\log q + (q-1)\sum_{i=1}^{10}\log(1-x_i)$となる。

よって、

$$\frac{dl(q)}{dq} = \frac{10}{q} + \sum_{i=1}^{10}\log(1-x_i) = 0$$

を満たすqを求めればよく、これを解いて、$q = \frac{-10}{\sum_{i=1}^{10}\log(1-x_i)}$　と求められる。

ここで、過去 10 年間のうち、50%が 4 回、40%が 4 回、36%が 2 回であり、

$\log(1-50\%) = \log 0.5 = -\log 2 = -0.693$

$\log(1-40\%) = \log 0.6 = \log 3 - \log 5 = -0.510$

$\log(1-36\%) = \log 0.64 = 4\log 2 - 2\log 5 = -0.446$

であるから、

$$\sum_{i=1}^{10}\log(1-x_i) = -0.693 \times 4 - 0.510 \times 4 - 0.446 \times 2 = -5.704$$

したがって、$q = -10/(-5.704) = 1.7531\cdots$である。

次に、最尤推定量 q の漸近分布を求める。

最尤推定量 q の漸近分布は、正規分布$\mathrm{N}(q,\ I(q)^{-1})$に従うが、フィッシャー情報行列$I(q)$は、

$$I(q) = -E\left[\frac{d^2 l(q)}{dq^2}\right] = -E\left[\frac{-10}{q^2}\right] = \frac{10}{q^2}$$

であり、

$$I(q)^{-1} = \frac{q^2}{10}$$

となることから、最尤推定量 q の従う漸近分布は、$\mathrm{N}(q,\ \frac{q^2}{10})$となる。

よって、求める 95%信頼区間の上限値は、

$$q + 1.960 \times \sqrt{\frac{q^2}{10}} = 1.753 + 1.960 \times \sqrt{\frac{1.753^2}{10}} = 2.84$$

問題２.

Ⅱ.

（１）**（E）**（２）**（B）**　　　　［（１） ３点、（２） ４点］

（１）

各契約者の年間クレーム件数は、二項分布$P(X=x)=\binom{1}{x}p^x(1-p)^{1-x},(x=0,1)$に従うことから、

1 年間にクレーム請求がない確率は、$P(X=0)=1-p$

1 年間にクレーム請求がある確率は、$P(X=1)=p$

である。よって、推移行列は、$\begin{bmatrix} p & 1-p & 0 \\ p & 0 & 1-p \\ 0 & p & 1-p \end{bmatrix}$と表される。

この契約集団の契約者数を C とし、定常状態にあるときの等級 i の契約者数を x_i とすると、次の式が成り立つ。

$$\begin{cases} x_1=p(x_1+x_2) \\ x_2=(1-p)x_1+px_3 \\ x_3=(1-p)(x_2+x_3) \\ x_1+x_2+x_3=C \end{cases}$$

これを解くと、各等級の契約者数は以下の通りとなる。

$$x_1=\frac{p^2}{1-p+p^2}C$$

$$x_2=\frac{p(1-p)}{1-p+p^2}C$$

$$x_3=\frac{(1-p)^2}{1-p+p^2}C$$

ここで、等級 3 の契約者数は等級 2 の契約者数の 3 倍となっていることから、$x_3=3x_2$より、

$$\frac{(1-p)^2}{1-p+p^2}C=3\frac{p(1-p)}{1-p+p^2}C$$

が成り立ち、これを解くと、$p=0.25$となる。

したがって、各契約者の年間クレーム件数の期待値は、$E(X)=p=0.25$である。

（２）

等級 2 の保険料を s とする。

各契約者の年間クレーム件数の期待値が 1.2 倍に上昇、つまり二項分布のパラメータ p が

$0.25\times1.2=0.3$になった時の総保険料収入は、

$$\mathrm{A}=1.3sx_1+sx_2+0.8sx_3=\frac{1.3p^2+p(1-p)+0.8(1-p)^2}{1-p+p^2}sC=\frac{0.719}{0.79}sC$$

である。

一方、各契約者の年間クレーム件数の期待値が上昇する前、つまり二項分布のパラメータ p が0.25の時の総保険料収入は、

$$B=1.3sx_1+sx_2+0.8sx_3=\frac{1.3p^2+p(1-p)+0.8(1-p)^2}{1-p+p^2}sC=\frac{0.71875}{0.8125}sC$$

である。以上から、

$$\frac{A}{B} = \frac{0.719}{0.79}sC \Big/ \frac{0.71875}{0.8125}sC = 1.03$$

問題２.

Ⅲ.

（１）**（C）**（２）**（I）**　　　［（１） ３点、（２） ４点］

（１）

$\tau(t) = -\log P(N_t = 0) = \lambda t^{1/3}$

（２）

$N'_s = N_{\tau^{-1}(s)}$ はポアソン過程に従い、$P(N'_s = n) = \dfrac{s^n}{n!} e^{-s}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ が成り立つ。したがって、

$S_n = \tau(T_n)$ とおくと、S_n は $\Gamma(n,1)$ にしたがうので、

$$
\begin{aligned}
E[T_n] &= E\left[\tau^{-1}(S_n)\right] = \int_0^\infty \tau^{-1}(s) \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-s} ds = \int_0^\infty \frac{s^3}{\lambda^3} \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-s} ds \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{\lambda^3} \int_0^\infty \frac{s^{n+2}}{(n+2)!} e^{-s} ds \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{\lambda^3}
\end{aligned}
$$

となる。（２行目の式の積分の中身は $\Gamma(n+3,1)$ の密度関数なので、この積分は 1）

問題２.

Ⅳ.

（１）（Ｊ）　（２）（Ｇ）　　　［（１）３点、（２）４点］

（１）

確率変数 (N_1, N_2)のコピュラが共単調コピュラ $C(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2)$であること周辺分布が共単調コピュラに従うことから、以下のとおりとなる。

$F(0,0) = C(0.6,0.6) = 0.6$

$F(1,0) = C(0.9,0.6) = 0.6$

$F(2,0) = C(1.0,0.6) = 0.6$

$F(0,1) = C(0.6,0.9) = 0.6$

$F(1,1) = C(0.9,0.9) = 0.9$

$F(2,1) = C(1.0,0.9) = 0.9$

$F(0,2) = C(0.6,1.0) = 0.6$

$F(1,2) = C(0.9,1.0) = 0.9$

$F(2,2) = C(1.0,1.0) = 1.0$

上記結果を用いて火災保険と賠償責任保険合算の年間合計支払件数の発生確率を算出し纏めると、下表のとおりとなる。

	$N_1 = 0$	$N_1 = 1$	$N_1 = 2$
$N_2 = 0$	$P(N_1 = 0, N_2 = 0) = 0.6$	$P(N_1 = 1, N_2 = 0) = 0.0$	$P(N_1 = 2, N_2 = 0) = 0.0$
$N_2 = 1$	$P(N_1 = 0, N_2 = 1) = 0.0$	$P(N_1 = 1, N_2 = 1) = 0.3$	$P(N_1 = 2, N_2 = 1) = 0.0$
$N_2 = 2$	$P(N_1 = 0, N_2 = 2) = 0.0$	$P(N_1 = 1, N_2 = 2) = 0.0$	$P(N_1 = 2, N_2 = 2) = 0.1$

（２）

ガンマ分布の再生性より、火災保険と賠償責任保険合算の年間合計支払保険金は、それぞれ以下の分布に従う。

$N_1 = 1, N_2 = 1$のとき、$\Gamma(2,1) = xe^{-x}$

$N_1 = 2, N_2 = 2$のとき、$\Gamma(4,1) = \frac{1}{6}x^3 e^{-x}$

よって、年間合計支払保険金 X_3 が 1 以上となる確率は、

$$P(X_3 \ge 1) = 0.3 \cdot \int_1^\infty xe^{-x}dx + 0.1 \cdot \int_1^\infty \frac{1}{6}x^3e^{-x}dx$$

また、

$$\int_1^\infty xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_1^\infty = 2e^{-1}$$

$$\int_1^\infty x^2e^{-x}dx = \left[-x^2e^{-x}\right]_1^\infty + 2\int_1^\infty xe^{-x}dx = e^{-1} + 2 \cdot 2e^{-1} = 5e^{-1}$$

$$\int_1^\infty x^3e^{-x}dx = \left[-x^3e^{-x}\right]_1^\infty + 3\int_1^\infty x^2e^{-x}dx = e^{-1} + 3 \cdot 5e^{-1} = 16e^{-1}$$

であることから、

$$\begin{aligned}P(X_3 \ge 1) &= 0.3 \cdot \int_1^\infty xe^{-x}dx + 0.1 \cdot \int_1^\infty \frac{1}{6}x^3e^{-x}dx \\ &= 0.3 \cdot 2e^{-1} + 0.1 \cdot \frac{16}{6}e^{-1} \\ &= 0.32\end{aligned}$$

問題２.

Ｖ.

（１）**（A）**　（２）**（H）**　　　　［（１）３点、（２）３点］

（１）

イ　正しい（テキスト 3-29)。

ロ　正しい（テキスト 7-7～10)。

ハ　正しい（テキスト 5-4)。

（２）

ニ　同文の説明は、規準最尤法（テキスト 10-41)。

ホ　同文の説明は、劣加法性（テキスト 10-48)。

ヘ　同文の説明は、ブロック最大値モデル（テキスト 10-3～11)。

問題３.

Ｉ.

（１）**（B）**　（２）①**（E）**②**（I）**　　［（１）３点、（２）①３点、②３点］

（１）

Ｘ～この契約者が保有するリスク、Ｙ～１回の入院あたりの費用（入院日数×入院１日あたりの費用100)、Ｎ～１年間あたりの入院発生件数とする。

$$M_y(t)=\int_0^\infty \frac{1}{600}e^{-\frac{y}{600}+ty}dy=\frac{1}{1-600t}$$

$$M_N(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{tn}\binom{1+n}{n}\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^n=\left(\frac{0.80}{1-0.20e^t}\right)^2$$

から、

$$M_X(t)=\left(\frac{0.80}{1-0.20M_y(t)}\right)^2=\left(\frac{0.80}{1-\frac{0.20}{1-600t}}\right)^2$$

また、$E(u(10{,}000-X))=E\left(-e^{-0.001(10{,}000-X)}\right)=-e^{-10}E\left(e^{0.001X}\right)=-e^{-10}M_X(0.001)$

であることから、

$$E(u(10{,}000-X))=-e^{-10}\left(\frac{0.80}{1-\frac{0.20}{0.40}}\right)^2=-2.56e^{-10}$$

（２）

求める営業保険料をＰとすると、保険を買った場合の効用が

$u(10{,}000-P)=-e^{-0.001(10{,}000-P)}=-e^{-10}e^{0.001P}$　となることから、

$E(u(10{,}000-X))=u(10{,}000-P)$ より、

$-2.56e^{-10}=-e^{-10}e^{0.001P}$

よって、$2.56=e^{0.001P}$ により、

$$P=\frac{Log2.56}{0.001}=\frac{\left(2Log(2)^3-2Log(5)\right)}{0.001}=940$$

また、当該入院保険の純保険料は、

負の二項分布より１年間あたりの入院発生件数の期待値は$\frac{2\times\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}}$＝0.５、

指数分布より１回の入院あたりの支払保険金（入院日数×入院日額 100）の期待値は 6×100＝600 であることから、0.5×600＝300 となる。

したがって、期待値原理による純保険料の割増率をαとすると、当該入院保険の営業保険料は

$\frac{300\times(1+\alpha)+180}{1-(0.15+0.05)}$であり、これが 940 以下であるためには、αを 0.９066･･･　→90％以内にする必要がある。

問題３.

Ⅱ.

（１）**（B）**　（２）**（H）**　（３）**（D）**　　　［（１）４点、（２）２点、（３）２点］

（１）

$M_t = \exp\left[-r\left(ct - \sum_{i=1}^{N_t^\alpha+N_t^\gamma} X_i - \sum_{i=1}^{N_t^\beta+N_t^\gamma} Y_i\right)\right] \Big/ E\left[\exp\left[-r\left(ct - \sum_{i=1}^{N_t^\alpha+N_t^\gamma} X_i - \sum_{i=1}^{N_t^\beta+N_t^\gamma} Y_i\right)\right]\right]$ を考えると、M_t はマルチンゲールとなる。したがって、$E\left[\exp\left[-r\left(ct - \sum_{i=1}^{N_t^\alpha+N_t^\gamma} X_i - \sum_{i=1}^{N_t^\beta+N_t^\gamma} Y_i\right)\right]\right] = 1 \cdots$① となるような $r = R$ を選ぶことができたとすると、最も保守的に算出した破産確率は R を用いて、$\varepsilon(u_0) = e^{-Ru_0}$ と表せる（テキスト 8-37,38）。

以上より、①式が調整係数が満たすべき方程式となるが、問題文の仮定を使用すると、①式は以下の通り変形できる。

$$
\begin{aligned}
rct &= \log E\left[\exp\left[r\left(\sum_{i=1}^{N_t^\alpha+N_t^\gamma} X_i + \sum_{i=1}^{N_t^\beta+N_t^\gamma} Y_i\right)\right]\right] \\
&= \log E_{N_t^\alpha, N_t^\beta, N_t^\gamma}\left[E\left[\exp\left(r\left(\sum_{i=1}^{N_t^\alpha+N_t^\gamma} X_i + \sum_{i=1}^{N_t^\beta+N_t^\gamma} Y_i\right)\right) \middle| N_t^\alpha, N_t^\beta, N_t^\gamma\right]\right] \\
&= \log E_{N_t^\alpha, N_t^\beta, N_t^\gamma}\left[M_X(r)^{N_t^\alpha+N_t^\gamma} M_Y(r)^{N_t^\beta+N_t^\gamma}\right] \\
&= \log\left[\sum_{N_t^\alpha} f_\alpha(N_t^\alpha) M_X(r)^{N_t^\alpha} \sum_{N_t^\beta} f_\beta(N_t^\beta) M_Y(r)^{N_t^\beta} \sum_{N_t^\gamma} f_\gamma(N_t^\gamma) M_X(r)^{N_t^\gamma} M_Y(r)^{N_t^\gamma}\right] \\
&= \log\left[M_{N_t^\alpha}(\log M_X(r))\right] + \log\left[M_{N_t^\beta}(\log M_Y(r))\right] + \log\left[M_{N_t^\gamma}(\log M_X(r) + \log M_Y(r))\right] \\
&= (\lambda_1 - \lambda_0)t(M_X(r) - 1) + (\lambda_2 - \lambda_0)t(M_Y(r) - 1) + \lambda_0 t(M_X(r)M_Y(r) - 1)
\end{aligned}
$$

ただし、ここで f_* は N_t^* の確率関数（ポアソン分布）とする。単位時間当たりの収入保険料 c は $c = (1+\theta)((\lambda_1 - \lambda_0)\mu_1 + (\lambda_2 - \lambda_0)\mu_2 + \lambda_0(\mu_1 + \mu_2)) = (1+\theta)(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2)$ と書け、X, Y はそれぞれ平均が μ_1, μ_2 の指数分布に従うので、その積率母関数 $M_X(r) = 1/(1-\mu_1 r) \quad (r < 1/\mu_1)$ および $M_Y(r) = 1/(1-\mu_2 r) \quad (r < 1/\mu_2)$ となる。

これらを上の式に代入して整理すると、調整係数が満たす方程式は、

$$
\frac{\lambda_1\mu_1}{1-\mu_1 r} + \frac{\lambda_2\mu_2}{1-\mu_2 r} + \frac{\lambda_0\mu_1\mu_2 r}{(1-\mu_1 r)(1-\mu_2 r)} = (1+\theta)(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2) \qquad (r < \min(1/\mu_1, 1/\mu_2))
$$

となる。

（２）$\mu_1=\mu_2=6$、$\lambda_1=\lambda_2=15$、$\lambda_0=0$ を（１）の方程式に代入すると、$\dfrac{180}{1-6r}=180(1+\theta)\cdots$②

となるが、保険会社にとって最も保守的に評価した破産確率が e^{-3} 等しくなるのは、$-Ru_0=-3$ のと

きであり、$u_0=45$ を代入すると、$R=1/15$ が得られる。これを上の②式に代入すると、$\theta=2/3=0.67$

となる。

（本問は、通常の Lundberg モデルでクレーム件数過程の強度 $\lambda=15\times 2=30$、個々のクレーム額の期待値 $\mu=6$ である場合と同じ状況である。）

（３）$\mu_1=\mu_2=6$、$\lambda_1=\lambda_2=15$、$\lambda_0=1$ を（１）の方程式に代入すると、

$$\frac{180}{1-6r}+\frac{36r}{(1-6r)^2}=180(1+\theta)$$

$$\Rightarrow 5(1-6r)+r=5(1+\theta)(1-6r)^2$$ となる。

$$\Rightarrow 36r^2-\left(12-\frac{29}{5(1+\theta)}\right)r+1-\frac{1}{1+\theta}=0\cdots③$$

r について解くと、$R=\dfrac{1}{72}\left(12-\dfrac{29}{5(1+\theta)}\right)\pm\sqrt{\dfrac{1}{72^2}\left(12-\dfrac{29}{5(1+\theta)}\right)^2-\dfrac{\theta}{36(1+\theta)}}$ となる。$\theta=0.67$ を代

入すると、

$$R=\frac{1}{72}\left(12-\frac{29}{5\times 1.67}\right)\pm\sqrt{\frac{1}{72^2}\left(12-\frac{29}{5\times 1.67}\right)^2-\frac{0.67}{36\times 1.67}}$$
$$=0.118429\pm\sqrt{0.118429^2-0.0111443}=0.118429\pm 0.053676$$

調整係数が満たす方程式において、$r<1/\mu_1=1/\mu_2=1/6=0.166\cdots$ でなければならないので、解となるのは－の符号を採った時であり、$R=0.06475$ となる。したがって、最も保守的な破産確率は、$\varepsilon(u_0)=\exp(-Ru_0)=\exp(-2.91)$ となる。