年金数理(問題)

この年金数理の問題において特に説明がない限り、以下のとおりとする。

・「被保険者」とは、在職中の者をいう。

・「受給権者」とは、年金受給中の者及び受給待期中の者をいう。

・「加入年齢方式」とは、「特定年齢方式」のことをいう。

・「責任準備金」とは、給付現価から標準保険料収入現価を控除した額をいう。

・「Trowbridge モデルの年金制度」とは、定年退職者のみに対し、定年退職時より単位年金額の終身年金を年 1 回期初に支払う年金制度をいう。「Trowbridge モデルの年金制度」に関し、記号を次のとおりとする。

i : 予定利率、 $v=\dfrac{1}{1+i}$ 、$d=1-v$

x_e : 新規で加入する被保険者の加入年齢

x_r : 定年年齢

ω : 生存最終年齢

$l_x^{(T)}$: 脱退残存表における x 歳の在職中の被保険者数 ($x_e \leqq x \leqq x_r$)

l_x : 生命表における x 歳の被保険者数 ($x \geqq x_r$)　　但し、$l_{x_r} = l_{x_r}^{(T)}$

$\ddot{a}_x$: x 歳支給開始期初払終身年金現価率

S^f : 将来加入が見込まれる被保険者の給付現価

S^p : 年金受給権者の給付現価

S^a : 在職中の被保険者の給付現価

S_{PS}^a : 在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価

($= S^a$ のうち、在職中の被保険者の過去の加入期間に発生したとみなされる給付(現在年齢 x 歳の場合、年金額 $\dfrac{x-x_e}{x_r-x_e}$ の終身年金)の現価)

S_{FS}^a : 在職中の被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価 ($= S^a - S_{PS}^a$)

G^f : 将来加入が見込まれる被保険者の人数現価

G^a : 在職中の被保険者の人数現価

B : 制度全体の毎年度の給付額(年1回期初払) ($=\displaystyle\sum_{x=x_r}^{\omega} l_x$)

C : 制度全体の毎年度の保険料の額(年1回期初払)

F : 制度全体の積立金

P : 被保険者 1 人あたりの保険料

L : 在職中の被保険者の総数 ($=\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)}$)

問題1. 次の(1)～(13)について、各問の指示に従い、解答用紙の所定の欄をマークせよ。(計 65 点)

(1) 定常人口に達した年金制度がある。被保険者のこの制度への新規加入時期は満 22 歳到達時であり、毎年 160 人が加入し、定年の満 60 歳到達時までに全員が制度から脱退する。被保険者の総数($\int_{22}^{60} l_x dx$)は 2,000 人である。

このとき、この制度の脱退者(被保険者であった者でこの制度から脱退した者をいう。)の平均年齢について最も近いものを選べ。なお、被保険者数(l_x)は年齢(x)に関して微分可能な関数とする。

(A) 30.0 歳	**(B)** 30.5 歳	**(C)** 31.0 歳	**(D)** 31.5 歳	**(E)** 32.0 歳
(F) 32.5 歳	**(G)** 33.0 歳	**(H)** 33.5 歳	**(I)** 34.0 歳	**(J)** 34.5 歳

(2) 年金 A 及び B は、いずれも年 1 回期初払い 10 年確定年金である。年金 A の年金年額は K で 10 年間一定であり、年金 B は初年度の年金年額が 1、第 t 年度の年金年額が t $(1 \leqq t \leqq 10)$ の累加年金である。年金 A と B の年金現価が等しいとき、K の値を求めよ。ただし、割引率 v について、 $v = 0.9302$ 、$v^{10} = 0.4850$ とする。(小数点以下第 2 位を四捨五入し小数点以下第 1 位まで求めよ。)

(A) 4.5	**(B)** 4.6	**(C)** 4.7	**(D)** 4.8	**(E)** 4.9
(F) 5.0	**(G)** 5.1	**(H)** 5.2	**(I)** 5.3	**(J)** 5.4

(3) 最終給与比例方式による給付を行う年金制度について、積立過不足がなく定常状態にあった。ここで、ある年の期初に 5.0%のベースアップがあったとする。保険料率を見直さなかった場合、年数が経過するにつれ積立金が減少し、ある時点の期初積立金＜当初の定常状態における期初積立金×0.9 となるが、それはベースアップの何年後か、最短の年数を求めよ。

なお、保険料及び給付は年1回期初払いとし、予定利率は 5.0%とする。

また、利差損益は発生しないものとし、ベースアップがあった年の保険料及び給付はベースアップ後の給与に基づき行なわれるものとする。

(A) 20 年後	**(B)** 21 年後	**(C)** 22 年後	**(D)** 23 年後	**(E)** 24 年後
(F) 25 年後	**(G)** 26 年後	**(H)** 27 年後	**(I)** 28 年後	**(J)** 29 年後

(4) ある年金制度では開放基金方式を採用している。財政運営上の新規加入の見込みについて、次のア、イの数値が同じになるように新規加入の被保険者数及び加入時の給与を設定した。

ア. 将来的に定常人口に到達した時点での被保険者数及び給与総額（計算基準日以降の新規加入、脱退、昇給等が予定どおりに推移する場合）

イ. 計算基準日時点の被保険者数及び給与総額

以下の数値及び基数表が与えられたとき、新規加入の被保険者一人あたりの加入時の給与の見込みはいくらになるか。給与の額について万円未満を切り捨て万円単位で答えよ。

被保険者数:5,000 人、給与総額:1,000,000,000 円、新規加入年齢:50 歳、定年年齢:60 歳

基数表 ：

年齢	残存人数	給与指数	残存人数×給与指数
50	1,000,000	1.000	1,000,000
51	950,000	1.050	997,500
52	900,000	1.100	990,000
53	850,000	1.150	977,500
54	800,000	1.200	960,000
55	750,000	1.250	937,500
56	700,000	1.300	910,000
57	650,000	1.350	877,500
58	600,000	1.400	840,000
59	550,000	1.450	797,500
合計	7,750,000	12.250	9,287,500

(A) 2 万円　**(B)** 4 万円　**(C)** 6 万円　**(D)** 8 万円　**(E)** 10 万円

(F) 12 万円　**(G)** 14 万円　**(H)** 16 万円　**(I)** 18 万円　**(J)** 20 万円

(5) 定常人口の下にある集団において、ある時点から年間の 0 歳の出生数が従前の α 倍（$\alpha > 0$）に変化し、t 年間その状態が継続した。t 年後に集団全体の人口が従前の β 倍となったとき、β を表す式はつぎのいずれか。ただし、人口（l_x）は年齢（x）に関して連続な関数であり、年間の出生数が変化しても予定死亡率は変化しなかったものとする。

(A) $\alpha \cdot {}_t p_0$　**(B)** $(1-\alpha) \cdot {}_t p_0$　**(C)** $\alpha + (1-\alpha) \cdot {}_t p_0$　**(D)** $(1-\alpha) + \alpha \cdot {}_t p_0$

(E) $\alpha + (1-\alpha) \cdot \dfrac{\mathring{e}_t}{\mathring{e}_0}$　**(F)** $(1-\alpha) + \alpha \cdot \dfrac{\mathring{e}_t}{\mathring{e}_0}$　**(G)** $\alpha + (1-\alpha) \cdot {}_t p_0 \cdot \dfrac{\mathring{e}_t}{\mathring{e}_0}$　**(H)** $(1-\alpha) + \alpha \cdot {}_t p_0 \cdot \dfrac{\mathring{e}_t}{\mathring{e}_0}$

(I) $\alpha \cdot \dfrac{\mathring{e}_t}{\mathring{e}_0} + (1-\alpha) \cdot {}_t p_0$　**(J)** $(1-\alpha) \cdot \dfrac{\mathring{e}_t}{\mathring{e}_0} + \alpha \cdot {}_t p_0$

(6) A社及びB社が共同で実施している年金制度(以下、分割前制度という。)があるが、今般この年金制度を分割し、A社、B社それぞれ単独で年金制度を実施することとした。

年金制度分割時の下記の前提、諸数値を用いて、分割後のA社及びB社の年金制度の特別保険料率をそれぞれ求めよ。

(前提)

- A社の被保険者の規模(被保険者の総人数・総給与)はB社の3倍。
- A社とB社は被保険者の年齢構成、加入期間構成、年齢別給与構成は互いに等しい。
  (すなわち、A社とB社は規模が異なるだけで被保険者の構成割合は等しい。)
- A社及びB社とも年金受給権者は存在しない。
- 分割後のA社、B社の年金制度はともに分割前制度の基礎率を使用する。
- 分割後のA社年金制度の給付水準は分割前制度の一律 1.2 倍とし、B社年金制度の給付水準は分割前制度と同じとする。
- 分割前制度の積立金は、分割前制度のA社の被保険者にかかる責任準備金と、B社の被保険者にかかる責任準備金の比で按分し、分割後のA社及びB社の年金制度にそれぞれ配分する。
- 分割後のA社の年金制度は開放基金方式で運営し、B社の年金制度は加入年齢方式で運営する。
- 分割後の A 社及び B 社の年金制度の過去勤務債務は、それぞれ 20 年で元利均等償却する。
  (ここで、 $\ddot{a}_{\overline{20|}} = 14.7$)

(分割前制度の諸数値等)

- 将来加入が見込まれる被保険者の給付現価 $(S^f) = 500$百万円
- 在職中の被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価 $(S^a_{FS}) = 700$百万円
- 在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価 $(S^a_{PS}) = 800$百万円
- 将来加入が見込まれる被保険者の給与現価 $(G^f) = 20{,}000$百万円
- 在職中の被保険者の給与現価 $(G^a) = 25{,}000$百万円
- 積立金 $(F) = 700$百万円
- 給与総額 = 400 百万円

A社の特別保険料率: $\boxed{①}$ %(小数点以下第 2 位を四捨五入し小数点以下第 1 位まで求めよ。)

B社の特別保険料率: $\boxed{②}$ %(小数点以下第 2 位を四捨五入し小数点以下第 1 位まで求めよ。)

(A) 3.0	**(B)** 3.2	**(C)** 3.4	**(D)** 3.6	**(E)** 3.8
(F) 4.0	**(G)** 4.2	**(H)** 4.4	**(I)** 4.6	**(J)** 4.8

(7) ある年金制度は定常状態にあるとし、記号を次のとおりとする。

毎年の給付: B 、毎年の保険料: C 、期末の積立金: $F\ (>0)$、予定利率: i

給付及び保険料の発生時期:年1回期初

ある年度に当該年度の期初以降将来にわたり保険料を $(1+k)C$ 、給付を $(1+k)B$ とする制度変更を実施した。 制度変更を実施した年度のみ運用利回りが j となり期末の積立金が F' となった結果、変更後の年金制度は F' で定常状態となった。このとき、j を i と k を用いて表せ。

(A) $\dfrac{i}{1-i-ik}$ **(B)** $\dfrac{k}{1-i-ik}$ **(C)** $\dfrac{i+k}{1-i-ik}$ **(D)** $\dfrac{i+k+2ik}{1-i-ik}$ **(E)** $\dfrac{2ik}{1-i-ik}$

(F) $\dfrac{i+k+ki}{1-ik}$ **(G)** $\dfrac{i+k+2ki}{1-ik}$ **(H)** $\dfrac{i+k}{1-ik}$ **(I)** $\dfrac{ik}{1-ik}$ **(J)** いずれにも該当しない

(8) ある年度の年金制度の諸数値が以下のとおりであったとき、この年度の差損益として正しいものの記号を選べ。

- 期初責任準備金 : 2, 000　　・期末責任準備金 : 2, 300
- 期初過去勤務債務額 : 500
- 標準保険料（年 1 回期初払）: 400　　・給付（年 1 回期末払）: 300
- 予定利率 : 5. 5%　　・実際利回り : 7. 5%
- 過去勤務債務償却方法及び償却割合：期初過去勤務債務額の 30%を償却（年 1 回期初払）

(A) 68 の差益 **(B)** 48 の差益 **(C)** 41 の差益 **(D)** 27 の差益 **(E)** 差損益なし
(F) 27 の差損 **(G)** 41 の差損 **(H)** 48 の差損 **(I)** 68 の差損 **(J)** いずれにも該当しない

(9) 定常人口の下にある年金制度がある。財政方式を開放基金方式とした場合の標準保険料率は ${}^{OAN}P$ であった。あるとき、将来加入する被保険者の人数の見込みが従来の x 倍に変化したことに伴い、標準保険料率は ${}^{OAN}P'$ に変化した。このとき、x を ${}^{OAN}P$ 、${}^{OAN}P'$ 、${}^{EAN}P$ (財政方式を加入年齢方式とした場合の標準保険料率)、${}^{A}P$ (財政方式を到達年齢方式とした場合の標準保険料率)を用いて表せ。

なお、将来加入する被保険者の人数の見込みが変化したことに伴う標準保険料率の算定にあたっては、将来加入する被保険者の人数以外の計算基礎率の見直しを行わなかったものとする。

(A) $\left(\dfrac{{}^{OAN}P'-{}^{A}P}{{}^{EAN}P-{}^{OAN}P}\right)^2$ **(B)** $\left(\dfrac{{}^{EAN}P-{}^{OAN}P'}{{}^{OAN}P-{}^{A}P}\right)^2$ **(C)** $\left(\dfrac{{}^{EAN}P-{}^{OAN}P}{{}^{OAN}P'-{}^{A}P}\right)^2$ **(D)** $\left(\dfrac{{}^{OAN}P-{}^{A}P}{{}^{EAN}P-{}^{OAN}P'}\right)^2$

(E) $\dfrac{{}^{OAN}P'-{}^{A}P}{{}^{EAN}P-{}^{OAN}P}\cdot\dfrac{{}^{EAN}P-{}^{OAN}P'}{{}^{OAN}P-{}^{A}P}$ **(F)** $\dfrac{{}^{OAN}P'-{}^{A}P}{{}^{EAN}P-{}^{OAN}P'}\cdot\dfrac{{}^{EAN}P-{}^{OAN}P}{{}^{OAN}P-{}^{A}P}$ **(G)** $\dfrac{{}^{OAN}P'-{}^{A}P}{{}^{EAN}P-{}^{OAN}P'}\cdot\dfrac{{}^{OAN}P-{}^{A}P}{{}^{EAN}P-{}^{OAN}P}$

(H) $\dfrac{{}^{EAN}P-{}^{OAN}P'}{{}^{OAN}P'-{}^{A}P}\cdot\dfrac{{}^{EAN}P-{}^{OAN}P}{{}^{OAN}P-{}^{A}P}$ **(I)** $\dfrac{{}^{EAN}P-{}^{OAN}P'}{{}^{OAN}P'-{}^{A}P}\cdot\dfrac{{}^{OAN}P-{}^{A}P}{{}^{EAN}P-{}^{OAN}P}$ **(J)** いずれにも該当しない

(10) 毎年度一定額の特別保険料 P_{psl} を払い込んで過去勤務債務を償却する年金制度がある。ある年度に過去勤務債務の償却を早めるために、特別保険料 $(1+s)P_{psl}$ を払い込んだところ、年度初の残余償却年数 n 年に対し、年度末の残余償却年数が $n-1-t$ 年となった。このとき、s を n と t を用いて表せ。

ただし、予定利率を i 、特別保険料の払い込みは期初払いとし、当該年度の後発過去勤務債務額は発生しないものとする。

(A) $(1+i)\ddot{a}_{\overline{n}|} - a_{\overline{n-1-t}|}$ **(B)** $a_{\overline{n}|} - a_{\overline{n-1-t}|} - 1$ **(C)** $\ddot{a}_{\overline{n}|} - a_{\overline{n-1-t}|}$ **(D)** $\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{\overline{n-1-t}|}$

(E) $a_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{\overline{n-1-t}|}$ **(F)** $a_{\overline{n-1}|} - \ddot{a}_{\overline{n-1-t}|}$ **(G)** $a_{\overline{n-1}|} - a_{\overline{n-1-t}|}$ **(H)** $\ddot{a}_{\overline{n-1}|} - \ddot{a}_{\overline{n-1-t}|}$

(I) $\ddot{a}_{\overline{n-1}|} - a_{\overline{n-1-t}|}$ **(J)** いずれにも該当しない

(11) 定常状態にある Trowbridge モデルの年金制度における給付現価、人数現価等を表す以下の(A)～(G)の算式の中に<u>誤っているものが1つ含まれている</u>。誤っている算式の記号をマークせよ。

(A) 在職中の被保険者の人数現価 ： $L + v\cdot\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)}\cdot\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}D_y}{D_x}$

(B) 在職中の被保険者の人数現価 ： $\sum_{x=x_e}^{x_r-1}(v^{-x}\cdot\sum_{y=x}^{x_r-1}D_y)$

(C) 在職中の被保険者の人数現価 ： $\frac{L}{d} - (\frac{v}{d})\cdot l_{x_e}^{(T)}\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)}\cdot(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}D_y}{D_x})$

(D) 将来加入が見込まれる被保険者の人数現価 ： $(\frac{v}{d})\cdot v^{-x_e}\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x$

(E) 在職中の被保険者の給付現価 ： $v\cdot(l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r} + \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)}\cdot\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x})$

(F) 在職中の被保険者の給付現価 ： $\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)}\cdot\frac{N_{x_r}}{D_x}$

(G) 在職中の被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価 ： $\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)}\cdot(\frac{x_r-x}{x_r-x_e})\cdot\frac{N_{x_r}}{D_x}$

(12) 以下の等式は、定常状態にあるTrowbridgeモデルの年金制度における各種財政方式の積立金の差分を示したものである。この中に正しい等式が2つ含まれている。正しい等式の記号を2つマークせよ。
ただし左肩添字は財政方式を表し、P →賦課方式、T →退職時年金現価積立方式、U →単位積立方式、In→加入時積立方式、Co →完全積立方式 である。

(A) ${}^{In}F - {}^{P}F = S^{a} - {}^{In}C$　　**(B)** ${}^{U}F - {}^{T}F = S^{a}_{PS} - {}^{T}C$　　**(C)** ${}^{In}F - {}^{T}F = S^{a} - {}^{In}C - {}^{T}C$

(D) ${}^{Co}F - {}^{T}F = S^{f} + S^{a} - {}^{T}C$　　**(E)** ${}^{In}F - {}^{U}F = S^{a}_{FS} - {}^{In}C$　　**(F)** ${}^{Co}F - {}^{U}F = S^{f} + S^{a}_{FS}$

(G) ${}^{Co}F - {}^{In}F = S^{f} - {}^{In}C$

(13) 定年退職者に対して退職時給与と同額を、退職時から終身にわたって支給する年金制度がある。この制度に加入する被保険者の人数及び給与は定常状態にあり、財政方式は開放基金方式を採用していた。財政運営上の影響に関する次の記載の中に適切な記述が2つ含まれている。適切な記述の記号を2つマークせよ。ただし、予定する新規加入年齢は、制度上加入できる最低の年齢とする。

(A) ある年度において中途脱退者数の実績が各年齢一律に予定を下回った場合、各年齢層における年金財政上の損益は常に予定より不足の方向になる。

(B) ある年度において昇給の実績が各年齢一律に予定を下回った場合、各年齢層における年金財政上の損益は予定より剰余の方向になるとは限らず不足の方向になることもある。

(C) ある年度において新規に加入する被保険者数の実績が予定を上回った場合(新規加入年齢は予定どおり)、年金財政上の損益は常に予定より不足の方向になる。

(D) 被保険者の傾向的な減少がある場合には、予定された脱退によるものであっても、年金財政上恒常的な剰余要因となる。

(E) 財政運営上不足が生じた場合、保険料率の洗替えで当該不足分による積立水準の低下を解消していくことができる。

問題2. 次の①～⑩の空欄に当てはまる適当な算式を解答群より選び、記号をマークせよ。なお、解答にあたり同じ記号を重複して使ってもよい。(10 点)

定常人口における Trowbridge モデルの年金制度(保険料は年1回期初拠出)の保険料に関し、加入年齢方式と閉鎖型総合保険料方式との関係を考察する。記号について 1 頁に記載の他、次のとおりとする。

財政方式を加入年齢方式とした場合の一人当たり標準保険料 ^{EAN}P

財政方式を閉鎖型総合保険料方式とした場合の

第 n 年度の一人当たり保険料 $^{C}P_n$

第 n 年度初における積立金 F_n

第1年度初における積立金は 0 とする。

(1) 財政方式を閉鎖型総合保険料方式とした場合の第 n 年度の一人当たり保険料 $^{C}P_n$ を式で表す。

A. $^{C}P_n = \left(S^p + S^a - F_n\right)\cdot\boxed{\quad ①\quad}$ 、 $F_{n+1} = \left(F_n + \boxed{\quad ②\quad}\right)\cdot(1+i) \quad (n \geqq 1)$

B. 上記A. の式から F_n 、F_{n+1} を消去すると、

$$S^p + S^a - {}^{C}P_{n+1}G^a = \left(S^p + S^a - {}^{C}P_n G^a + \boxed{\quad ②\quad}\right)\cdot(1+i) \quad (n \geqq 1)$$

C. また、$^{EAN}P = \dfrac{S^f}{G^f}$ であり、$L = d\cdot\left(G^a + G^f\right)$、$B = d\cdot\left(S^p + S^a + S^f\right)$ であることを用いると、

$$S^p + S^a - {}^{EAN}PG^a = \left(S^p + S^a - {}^{EAN}PG^a + \boxed{\quad ③\quad}\right)\cdot(1+i)$$

D. 上記B. 及びC. の式の辺々差をとり $\dfrac{1}{G^a}$ を乗じて整理すると、

$$^{C}P_{n+1} - {}^{EAN}P = (1+i)\cdot\boxed{\quad ④\quad}\cdot\left({}^{C}P_n - \boxed{\quad ⑤\quad}\right) \quad (n \geqq 1)$$

E. 上記D. より、

$$^{C}P_n = {}^{EAN}P + \left\{(1+i)\cdot\boxed{\quad ④\quad}\right\}^{\boxed{⑥}}\cdot\left({}^{C}P_1 - \boxed{\quad ⑤\quad}\right)$$ ($n \geqq 2$、ただし $n=1$ のときも成り立つ。)

(2) $^{C}P_n$ は、「制度発足時から財政方式を加入年齢方式とし毎年期初の未償却過去勤務債務残高の $\dfrac{L}{G^a}$ 倍を特別保険料として償却する場合の、第 n 年度の一人当たり標準保険料と特別保険料の合計」に等しいことを示す。

A. 財政方式を加入年齢方式とした場合、第1年度初における未償却過去勤務債務を求めた上で、第1年度の一人当たり特別保険料を求めると、$\left(S^p + S^a - {}^{EAN}PG^a\right)\cdot\boxed{\quad ⑦\quad}$ と表せる。

B. 第1年度以降後発債務が発生せず未償却過去勤務債務の償却が予定通り進んだ場合、第 n 年度初（$n \geqq 2$）における未償却過去勤務債務を求めた上で、第 n 年度の一人当たり特別保険料を求めると、

$$\boxed{⑧} \cdot \left(1+ \boxed{⑨}\right)^{\boxed{⑥}} \cdot \left(S^p + S^a - {}^{EAN}PG^a\right) \cdot \boxed{⑦}$$ と表せる。（$n=1$ のときも成り立つ。）

C. 上記B. の第 n 年度の一人当たり特別保険料は

$$\boxed{⑧} \cdot \left(1+ \boxed{⑨}\right)^{\boxed{⑥}} \cdot \left({}^{C}P_1 - \boxed{⑤}\right)$$

とも表され、(1)E. の式の第2項と等しい、つまり、${}^{C}P_n$ は「財政方式を加入年齢方式とした場合の第 n 年度における一人当たり標準保険料と特別保険料の合計」として表せることがわかる。

(3) ${}^{C}P_n$ は ${}^{EAN}P$ に収束することを示す。

$\boxed{⑩} \cdot G^a < L < G^a$ より、$0 < (1+i) \cdot \boxed{④} < 1$

したがって、(1)E. の式の第2項はゼロに収束する。つまり ${}^{C}P_n$ は ${}^{EAN}P$ に収束することがわかる。

（解答群）

(A) $(n-1)$	**(B)** n	**(C)** $(1+i)$	**(D)** v	**(E)** d	**(F)** ${}^{C}P_1$	**(G)** ${}^{C}P_n$	**(H)** ${}^{EAN}P$
(I) $\left({}^{C}P_1 \cdot L - B\right)$	**(J)** $\left({}^{C}P_n \cdot L - B\right)$	**(K)** $\left({}^{EAN}P \cdot L - B\right)$	**(L)** $\dfrac{1}{G^a}$	**(M)** $\dfrac{L}{G^a}$	**(N)** $\dfrac{G^f}{G^a}$		
(O) $i \cdot \dfrac{G^f}{G^a}$	**(P)** $\left(1-\dfrac{1}{G^a}\right)$	**(Q)** $\left(1-\dfrac{L}{G^a}\right)$	**(R)** $\left(1-\dfrac{G^f}{G^a}\right)$	**(S)** $\left(1-i \cdot \dfrac{G^f}{G^a}\right)$			
(T) $\left(-\dfrac{1}{G^a}\right)$	**(U)** $\left(-\dfrac{L}{G^a}\right)$	**(V)** $\left(-\dfrac{G^f}{G^a}\right)$	**(W)** $\left(-i \cdot \dfrac{G^f}{G^a}\right)$				
(X) i	**(Y)** $(1+i)^{n-1}$	**(Z)** $(1+i)^n$					

問題3. 次の①～⑩の空欄に当てはまる適当な算式を解答群より選び、記号をマークせよ。(10 点)

脱退・昇給・保険料の払込・給付の支払いが連続的(数学的に厳密に言えば微分可能な時間の関数)である年金制度のモデル(脱退時に最終給与に比例する給付を支払い、保険料もまた給与比例で積み立てるモデル)の給与1あたりの責任準備金を求めてみる。

(1)　制度に加入できる最低年齢(以下、最小年齢という。)の給与を1とし、各年齢の給与が最小年齢の給与の b_y 倍(y は年齢)になるとした場合、x 歳で加入し t 年経過した被保険者の給与1あたりの責任準備金 ${}_tV_x$ は次の式で表される。

$${}_tV_x = \int_t^{\omega-x} S_\tau^{(x)} \exp\left(-\delta\left(\tau-t\right)\right)d\tau - \int_t^{\omega-x} P_\tau\ B_\tau^{(x)} \exp\left(-\delta\left(\tau-t\right)\right)d\tau \cdots(ア)$$

ここに、

$S_\tau^{(x)}\,d\tau$:　時点 τ において微少期間 $d\tau$ に脱退する者の給付額

$B_\tau^{(x)}\,d\tau$:　時点 τ において微少期間 $d\tau$ に収入される給与額

P_τ　:　時点 τ における保険料率

δ　:　利力

ω　:　最終年齢

さらに、 $S_\tau^{(x)}$、$B_\tau^{(x)}$ に関しては、

$$S_\tau^{(x)}\,d\tau = s_\tau^{(x)}\left(\frac{-dl_{x+\tau}}{l_{x+t}}\right)\left(\frac{b_{x+\tau}}{b_{x+t}}\right) = s_\tau^{(x)}\left(\frac{l_{x+\tau}b_{x+\tau}}{\boxed{①}}\right)\mu_{x+\tau}\,d\tau \quad \cdots(イ)$$

$$B_\tau^{(x)} = \frac{l_{x+\tau}b_{x+\tau}}{\boxed{①}} \quad \cdots(ウ)$$

ここで、

$s_\tau^{(x)}$　:　x 歳加入、τ 年で脱退した者の、脱退時の給与1に対する給付額

b_x　:　昇給指数

(2)　(ア)に(イ)、(ウ)を代入して整理すると、

$${}_tV_x = \frac{\exp(\boxed{②})}{\boxed{①}} \int_t^{\omega-x} \left(s_\tau^{(x)}\mu_{x+\tau} - P_\tau\right) l_{x+\tau}b_{x+\tau}\ \exp\left(-\delta\tau\right)d\tau \quad \cdots(エ)$$

(3)　(エ)を t で微分すると、

$$\frac{d}{dt}{}_tV_x = \boxed{③} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\boxed{①}}\right)\boxed{①}\,{}_tV_x$$

$$+\frac{\exp(\boxed{②})}{\boxed{①}}\left(\boxed{④}+\boxed{⑤}\right)\boxed{①}\ \exp(\boxed{⑥}) \quad \cdots(オ)$$

(4)　ここで、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\boxed{①}}\right) = \frac{1}{b_{x+t}}\left(\frac{-1}{l_{x+t}^{\ 2}}\right)\frac{dl_{x+t}}{dt} + \frac{1}{l_{x+t}}\left(\frac{-1}{b_{x+t}^{\ 2}}\right)\frac{db_{x+t}}{dt}$$

$$= \frac{1}{\boxed{①}}\left(\frac{d}{dt}\left(\boxed{⑦}\right) - \frac{d}{dt}\left(\boxed{⑧}\right)\right) \quad \cdots(カ)$$

となり、また、$\frac{d}{dt}\left(\boxed{⑦}\right) = \mu_{x+t}$（脱退力）である。

(5)　さらに、$\frac{d}{dt}\left(\boxed{⑧}\right) = \lambda_{x+t}$とし、極小時間あたりの昇給率として、「昇給力」なる概念を導入する。

これらを利用して(カ)は、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\boxed{①}}\right) = \frac{1}{\boxed{①}}\left(\mu_{x+t} - \lambda_{x+t}\right) \cdots(キ)$$

となり、(キ)を(オ)に代入すると

$$\frac{d}{dt}{}_tV_x = \boxed{⑤} + \boxed{③} + \boxed{⑨} + \boxed{⑩} + \boxed{④} \cdots(ク)$$

(6)　ここで(ク)の構成要素をみてみると、

⑤:保険料の払込によって収入現価が小さくなることによる増加

③:責任準備金の評価時点が進むことによって、利息による割戻しが小さくなることによる増加

⑨:脱退による相対的な増加

⑩:昇給による相対的な減少

④:支払いによる減少

を意味している。(ク)をティーレの公式という。

(解答群)

(A) $-P_\tau$	**(B)** $\log b_{x+t}$	**(C)** $-\delta t$	**(D)** $-P_t$	**(E)** $s_t^{(x)}\mu_{x+t}$	**(F)** $-\delta\ {}_tV_x$	**(G)** $\delta\tau$
(H) $-\log b_{x+t}$	**(I)** $-l_{x+t}b_{x+t}$	**(J)** $\delta\ {}_tV_x$	**(K)** $-\lambda_{x+t}\,{}_tV_x$	**(L)** $l_{x+\tau}b_{x+\tau}$	**(M)** P_t	**(N)** $-\mu_{x+t}\,{}_tV_x$
(O) $\lambda_{x+t}\,{}_tV_x$	**(P)** $\log l_{x+t}$	**(Q)** δt	**(R)** $\mu_{x+t}\,{}_tV_x$	**(S)** $-l_{x+\tau}b_{x+\tau}$	**(T)** $-\delta\tau$	**(U)** $-s_t^{(x)}\mu_{x+t}$
(V) $l_{x+t}b_{x+t}$	**(W)** $-s_\tau^{(x)}\mu_{x+\tau}$	**(X)** $-\log l_{x+t}$	**(Y)** P_τ	**(Z)** $s_\tau^{(x)}\mu_{x+\tau}$		

問題4. 次の①～④の空欄に当てはまる適当な算式または語句を解答群より選び、記号をマークせよ。(15 点)

被保険者が定常人口にある企業において、定年退職者に対し、加入者期間に関わらずαを原資として利率i(予定利率と同率で設定。以下、年金換算利率という。)に基づくn年確定年金を支給する年金制度を導入するものとする。期初の被保険者の総数をLとし、以下の条件を満たす人員構成にあるものとする。

(条件)

・定年到達前の脱退率は年齢によらず一律$(1-p)$ $(0<p\leqq 1)$、死亡による脱退は発生しない。

・各年齢で新規加入が発生し、$x(x_0\leqq x\leqq x_r-1)$歳の新規加入の被保険者数は、$l_0 \cdot p^{x-x_0}$ 人

・加入時期は年1回期初、保険料は年1回期初払い、期末脱退(定年到達時は定年到達時の期初に脱退)

・記号の定義として、i : 予定利率($i>0$)　v : 割引率($=1/(1+i)$)　$\ddot{a}_{\overline{n}|}$: 利率iに基づくn年確定年金現価率

(1) x_0歳の新規加入の被保険者数l_0は $\boxed{①}$ となる。

(①の解答群)

(A) L　(B) $L\cdot p$　(C) $(x_r-x_0)\cdot L$　(D) $\dfrac{L}{\sum_{x=x_0}^{x_r-1}(x-x_0+1)\cdot p^{x-x_0}}$

(E) $\dfrac{L}{\sum_{x=x_0}^{x_r-1}(x-x_0+1)\cdot(1-p)^{x-x_0}}$　(F) $\dfrac{L}{\sum_{x=x_0}^{x_r-1}(x-x_0+1)}$　(G) $\dfrac{(1-p)L}{1-p^{x_r-x_0}}$

(2) 財政方式を加入年齢方式で運営するものとし、標準保険料Pとして年齢x_0歳の保険料を用いるとした場合、Pは $\boxed{②}$ となり、新規加入により毎年期初に発生する過去勤務債務(新規加入の被保険者の加入時の責任準備金)の額は $\boxed{③}$ となる。

(②の解答群)

(A) $\dfrac{(vp)^{x_r-x_0}}{x_r-x_0}\cdot\alpha$　(B) $\dfrac{(v(1-p))^{x_r-x_0}}{x_r-x_0}\cdot\alpha$　(C) $\dfrac{(vp)^{x_r-x_0}\cdot(1-vp)}{1-(vp)^{x_r-x_0}}\cdot\alpha$

(D) $\dfrac{(v(1-p))^{x_r-x_0}\cdot(1-v(1-p))}{1-(v(1-p))^{x_r-x_0}}\cdot\alpha$　(E) $\dfrac{(vp)^{x_r-x_0}}{1-(vp)^{x_r-x_0}}\cdot\alpha$　(F) $\dfrac{(v(1-p))^{x_r-x_0}}{1-(v(1-p))^{x_r-x_0}}\cdot\alpha$　(G) $\dfrac{\alpha}{x_r-x_0}$

(③の解答群)

(A) 0　(B) $l_0 \cdot \alpha \cdot (vp)^{x_r - x_0}$　(C) $\sum_{x=x_0+1}^{x_r-1} p^{x_r - x} \cdot l_0 \cdot \alpha \cdot (vp)^{x_r - x_0} \frac{\left(1-(vp)^{x-x_0}\right)}{\left(1-(vp)^{x_r-x_0}\right)}$

(D) $\sum_{x=x_0+1}^{x_r-1} (1-p)^{x_r - x} \cdot l_0 \cdot \alpha \cdot (v(1-p))^{x_r - x_0} \frac{\left(1-(v(1-p))^{x-x_0}\right)}{\left(1-(v(1-p))^{x_r-x_0}\right)}$

(E) $\sum_{x=x_0+1}^{x_r-1} p^{x - x_0} \cdot l_0 \cdot \alpha \cdot (vp)^{x_r - x} \frac{\left(1-(vp)^{x-x_0}\right)}{\left(1-(vp)^{x_r-x_0}\right)}$

(F) $\sum_{x=x_0+1}^{x_r-1} (1-p)^{x - x_0} \cdot l_0 \cdot \alpha \cdot (v(1-p))^{x_r - x} \frac{\left(1-(v(1-p))^{x-x_0}\right)}{\left(1-(v(1-p))^{x_r-x_0}\right)}$

(G) $\sum_{x=x_0+1}^{x_r-1} p^{x - x_0} \cdot l_0 \cdot \alpha \cdot \frac{\left(1-(vp)^{x-x_0}\right)}{\left(1-(vp)^{x_r-x_0}\right)}$

(3) 予定利率及び年金換算利率iを引き下げた場合、新規加入により毎年期初に発生する過去勤務債務(新規加入の被保険者の加入時の責任準備金)の額は ④ ことがわかる。

(④の解答群)

(A) 必ず増加する　(B) 必ず減少する　(C) 変わらない　(D) $i > p$ ならば増加する

(E) $i > p$ ならば減少する　(F) $i > (1-p)$ ならば増加する　(G) $i > (1-p)$ ならば減少する

以上

年金数理(解答例)

問題1.

(1) 新規加入の被保険者の年齢をx_e歳、定年年齢をx_r歳とすると、定常人口の仮定より

年間脱退者数は新規加入の被保険者数と等しいので、$\int_{x_e}^{x_r} l_x\mu_x dx + l_{x_r} = 160$　ここで$\mu_x = -\dfrac{1}{l_x}\dfrac{dl_x}{dx}$

また、脱退者の加入年数の総計は、$\int_{x_e}^{x_r}(x - x_e)l_x\mu_x dx + (x_r - x_e)l_{x_r}$となる。

ここで、$\int_{x_e}^{x_r}(x - x_e)l_x\mu_x dx = \int_{x_e}^{x_r}(x - x_e)l_x\left(-\dfrac{1}{l_x}\dfrac{dl_x}{dx}\right)dx = -(x_r - x_e)l_{x_r} + \int_{x_e}^{x_r} l_x dx$

よって、脱退者の加入年数の総計は$\int_{x_e}^{x_r} l_x dx = 2{,}000$となり、

この制度の在職中の被保険者数の総数に等しい。

したがって、脱退者の平均加入年数を求めると、

$$\frac{\int_{x_e}^{x_r}(x - x_e)l_x\mu_x dx + (x_r - x_e)l_{x_r}}{\int_{x_e}^{x_r} l_x\mu_x dx + l_{x_r}} = \frac{2{,}000}{160} = 12.5$$

求める脱退者の平均年齢は、$22 + 12.5 = 34.5$歳 ・・・解答(J)

(2) 年金Bの年金現価は

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)\ddot{a}_{\overline{10|}} - \frac{10v^9}{i}$$

これが、年金Aの年金現価$K\ddot{a}_{\overline{10|}}$と等しいので、

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)\ddot{a}_{\overline{10|}} - \frac{10v^9}{i} = K\ddot{a}_{\overline{10|}}$$

となるKを求めればよい。

$$K = \left(1+\frac{1}{i}\right) - \frac{10v^9}{i\ddot{a}_{\overline{10|}}} = \frac{1}{1-v} - \frac{10v^9}{i\dfrac{1-v^{10}}{d}} = \frac{1}{1-v} - \frac{10v^{10}}{1-v^{10}} = \frac{1}{1-0.9302} - \frac{10\times 0.4850}{1-0.4850}$$

$$= 4.909\ldots \fallingdotseq 4.9$$

・・・解答(E)

(3) ベースアップ前の期初積立金をF、t年後の期初積立金をF_tとし、給付額をB、保険料をC、ベースアップをαとする。

$F_t < 0.9F$となるtを求める。

①ベースアップ前には以下の極限方程式が成立している。

$$F = F\times(1+i) + (C - B)\times(1+i)$$

これより、$(B-C)=\dfrac{iF}{(1+i)}$

②また、$F_t = F_{t-1}\times(1+i)+(C-B)\times(1+\alpha)\times(1+i)$

$$
\begin{aligned}
&= F_{t-1}\times(1+i)-\frac{iF}{(1+i)}\times(1+\alpha)\times(1+i)\\
&= F_{t-1}\times(1+i)-iF\times(1+\alpha)\\
&= F_{t-2}\times(1+i)^2-iF\times(1+\alpha)\times(1+i)-iF\times(1+\alpha)\\
&\cdots\\
&= F\times(1+i)^t-iF(1+\alpha)\{1+(1+i)+(1+i)^2+\cdot\cdot\cdot+(1+i)^{t-1}\}\\
&= F\{(1+i)^t-(1+\alpha)\{(1+i)^t-1\}\}\\
&= F\{-\alpha(1+i)^t+(1+\alpha)\}<0.9F
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow (1+i)^t>\dfrac{(0.1+\alpha)}{\alpha}$ を満たす最小のtが求める解。

i＝5.0%、α＝5.0%を代入してtを求めるとt＝23・・・解答(D)

(4) 新規加入の被保険者一人あたりの給与は以下のように表されるため、これを計算すると

$$
\text{被保険者の平均給与}\times\frac{b_{x_e}\sum_{x=x_e}^{x_r-1}l_x}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}b_x\cdot l_x}=200{,}000\times\frac{1.000\times7{,}750{,}000}{9{,}287{,}500}=166{,}890.98\Rightarrow 16\text{ 万円}\cdots\text{解答(H)}
$$

(教科書P165～167)

(5) 従前の集団全体の人口は $\int_0^\omega l_x dx$ 、t 年後の集団全体の人口は $\alpha\cdot\int_0^t l_x dx+\int_t^\omega l_x dx$ と表せるから、

$\alpha\cdot\int_0^t l_x dx+\int_t^\omega l_x dx=\beta\cdot\int_0^\omega l_x dx$ が成り立つ。

$$
\beta=\frac{\alpha\cdot\int_0^t l_x dx+\int_t^\omega l_x dx}{\int_0^\omega l_x dx}=\frac{\alpha\cdot\int_0^\omega l_x dx+(1-\alpha)\cdot\int_t^\omega l_x dx}{\int_0^\omega l_x dx}=\alpha+(1-\alpha)\cdot\frac{l_t}{l_0}\cdot\frac{\dfrac{\int_t^\omega l_x dx}{l_t}}{\dfrac{\int_0^\omega l_x dx}{l_0}}
$$

$=\alpha+(1-\alpha)\,{}_tp_0\cdot\dfrac{\mathring{e}_t}{\mathring{e}_0}$ 　　・・・解答(G)

(6) A社とB社の諸数値をそれぞれ●(A)、●(B)で表すと、A社はB社の3倍の規模であるから、

$S^f(A) = 375$百万円　　$S^f(B) = 125$百万円

$S^a_{FS}(A) = 525$百万円　　$S^a_{FS}(B) = 175$百万円

$S^a_{PS}(A) = 600$百万円　　$S^a_{PS}(B) = 200$百万円

$G^f(A) = 15{,}000$百万円　　$G^f(B) = 5{,}000$百万円

$G^a(A) = 18{,}750$百万円　　$G^a(B) = 6{,}250$百万円

A社の給与総額＝300 百万円　　B社の給与総額＝100 百万円

分割前制度の加入者の責任準備金はA社はB社の3倍なので、A社、B社の積立金$F(A)$、$F(B)$は、

$$F(A) = F \times \frac{3}{4} = 700 \times \frac{3}{4} = 525$$

$$F(B) = F \times \frac{1}{4} = 700 \times \frac{1}{4} = 175$$

まずA社について求める。

$${}^{OAN}P(A) = \frac{(S^a_{FS}(A) + S^f(A)) \times 1.2}{G^a(A) + G^f(A)} = \frac{(525 + 375) \times 1.2}{15000 + 18750} = 0.032 = 3.2\%$$

したがって、過去勤務債務$U(A)$は、

$$U(A) = (S^a_{PS}(A) \times 1.2) - F(A) = 600 \times 1.2 - 525 = 195$$

よってA社の特別保険料率は、

$$\frac{U(A)}{A\text{社の給与総額} \times \ddot{a}_{\overline{20|}}} = \frac{195}{300 \times 14.7} = 0.04421 = 4.4\% \cdots \text{解答(H)}$$

次にB社について求めると、

$${}^{E}P = \frac{S^f(B)}{G^f(B)} = \frac{125}{5000} = 0.025 = 2.5\%$$

したがって、過去勤務債務$U(B)$は、

$$U(B) = S^a(B) - {}^{E}P \cdot G^a(B) - F(B) = 175 + 200 - 0.025 \times 6250 - 175 = 43.75$$

よってB社の特別保険料率は、

$$\frac{U(B)}{B\text{社の給与総額} \times \ddot{a}_{\overline{20|}}} = \frac{43.75}{100 \times 14.7} = 0.02976 = 3.0\% \cdots \text{解答(A)}$$

(7) 制度変更前の制度で定常状態(予定利率i)となっていたため、

$$F = \frac{1+i}{i}(B - C) \cdots (a)$$

が成り立つ。

制度変更を実施した年度では下式が成り立つ。

$$F' = \{F + (C - B)(1+k)\}(1+j) \cdots (b)$$

制度変更後の制度はF'で定常状態となるため下式が成り立つ。

$$F' = \frac{1+i}{i}(B - C)(1+k) \cdots (c)$$

(b)式に(a)式及び(c)式を代入すると

$$\frac{1+i}{i}(1+k) = \left\{\frac{1+i}{i} - (1+k)\right\}(1+j)$$

これを整理すると

$$j = \frac{(1+i)(1+k)}{(1+i) - i(1+k)} - 1 = \frac{i+k+2ki}{1-ik} \cdots \text{解答(G)}$$

(8)

期初積立金＝2,000 – 500 = 1,500

特別保険料＝500×30%＝150

期末積立金＝(1,500+(400+150))×1.075 – 300=1,903.75

期末過去勤務債務額＝2,300 – 1,903.75＝396.25

また、予定基礎率どおりに推移した場合の期末過去勤務債務額は、(500－150)×1.055＝369.25　であるから、

後発債務＝369.25－396.25＝－27

・・・解答(F)

(9)

$$^{OAN}P = \frac{S^a_{FS} + S^f}{G^a + G^f}\text{、}\ ^{OAN}P' = \frac{S^a_{FS} + x \cdot S^f}{G^a + x \cdot G^f}\text{、}\ ^{A}P = \frac{S^a_{FS}}{G^a}\text{、}\ ^{EAN}P = \frac{S^f}{G^f}$$

ここで、$x = \dfrac{^{OAN}P' \cdot G^a - S^a_{FS}}{S^f - {^{OAN}P'} \cdot G^f} = \dfrac{^{OAN}P' - \dfrac{S^a_{FS}}{G^a}}{\dfrac{S^f}{G^f} - {^{OAN}P'}} \cdot \dfrac{G^a}{G^f} = \dfrac{^{OAN}P' - {^{A}P}}{^{EAN}P - {^{OAN}P'}} \cdot \dfrac{G^a}{G^f}$

同様に、$1 = \dfrac{^{OAN}P - {^{A}P}}{^{EAN}P - {^{OAN}P}} \cdot \dfrac{G^a}{G^f}$より、$x = \dfrac{^{OAN}P' - {^{A}P}}{^{EAN}P - {^{OAN}P'}} \cdot \dfrac{^{EAN}P - {^{OAN}P}}{^{OAN}P - {^{A}P}}$

・・・解答(F)

(10) ある年度初の過去勤務債務をPSL_0とすると$PSL_0 = \ddot{a}_{\overline{n}|} P_{psl}$である。

$(1+s)P_{psl}$を償却した年度末の過去勤務債務は

$$\left\{PSL_0 - (1+s)P_{psl}\right\} \times (1+i)$$

と表せる。これが、$\ddot{a}_{\overline{n-1-t|}} P_{psl}$ となったのであるから

$$\left\{\ddot{a}_{\overline{n|}} P_{psl} - (1+s)P_{psl}\right\} \times (1+i) = \ddot{a}_{\overline{n-1-t|}} P_{psl}$$

$$\left\{\ddot{a}_{\overline{n|}} - (1+s)\right\} \times (1+i) = \ddot{a}_{\overline{n-1-t|}}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} - (1+s) = a_{\overline{n-1-t|}}$$

$$s = \ddot{a}_{\overline{n|}} - a_{\overline{n-1-t|}} - 1 = a_{\overline{n-1|}} - a_{\overline{n-1-t|}}$$ ・・・解答(G)

(11) ・・・解答(C)

教科書 57 頁～60 頁及び 68 頁に記載の以下のとおり。

(A)教科書　第3章練習問題3. ①

(B)教科書　(3－14)式

(C)正しい算式は、教科書　(3－21)式

(D)教科書　(3－15)式

(E)教科書　第3章練習問題3. ③

(F)教科書　(3－9)式

(G)教科書　(3－11)式

(12) ・・・解答(E)、(F)

教科書より、それぞれの積立金は以下のように表せる。

${}^{P}F = 0$、${}^{T}F = S^{p} - {}^{T}C$、${}^{U}F = S^{p} + S^{a}_{PS}$、${}^{In}F = S^{p} + S^{a} - {}^{In}C$　、${}^{Co}F = S^{p} + S^{a} + S^{f}$

(13) ・・・解答(B)、(E)

(A) 開放基金方式の場合、一定の若年齢層の責任準備金は一般的に負値になる(この問で前提としている制度設計での一つの事例として教科書p117 の表)。これらの層の脱退が予定を下回った場合、負値の減少が予定より小さく財政上剰余要因となることがある。(誤り)

(B) (A)と同様の理由から一定の若年齢層においては、昇給が予定を下回った場合、責任準備金(負値)の増加が予定よりも減少し、不足要因となる。(正しい)

(C) 開放基金方式では、在職中の被保険者の年齢構成が影響し、標準保険料の水準は一般的に予定加入年齢の標準保険料の水準より高い。予定よりも多く新規加入が発生すれば、剰余要因となる。(教科書p. 123)(誤り)

(D) 開放基金方式では、通常、新規の被保険者をその時点の在職中の被保険者数を維持するように見込む。傾向的に被保険者数の減少が生じている状況では、新規の被保険者数の見込みは傾向的に減少することになる。これは、新規の被保険者に係る責任準備金が負値であれば恒常的な不足要因になる。(教科書

p.92)（誤り）

(E) 開放型総合保険料方式では、不足分を永久償却しているため発生した不足額による積立水準の低下は保険料率で解消できないが、開放基金方式ではこうした問題はない。（教科書p.92～93）（正しい）

問題2.

① (L) ② (J) ③ (K) ④ (Q) ⑤ (H) ⑥ (A) ⑦ (L) ⑧ (Y) ⑨ (U) ⑩ (E)
（教科書 p.76～79 参照）

問題3.

① (V) ② (Q) ③ (J) ④ (U) ⑤ (M) ⑥ (C) ⑦ (X) ⑧ (B) ⑨ (R) ⑩ (K)
（教科書 p.136～138 参照）

問題4.

①条件より、x歳の被保険者数 $l_x = l_0(x - x_0 + 1)\cdot p^{x-x_0}$ 及び $L = \sum_{x=x_0}^{x_r-1} l_x$ から

$$l_0 = \frac{L}{\sum_{x=x_0}^{x_r-1}(x - x_0 + 1)\cdot p^{x-x_0}} \cdots \text{解答(D)}$$

$$② P = \frac{D_{x_r}}{\sum_{x=x_0}^{x_r-1} D_x} \cdot \alpha \cdot \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \frac{(vp)^{x_r}}{\sum_{x=x_0}^{x_r-1}(vp)^x} \cdot \alpha = \frac{(vp)^{x_r - x_0} \cdot (1 - vp)}{\left(1 - (vp)^{x_r - x_0}\right)} \cdot \alpha \cdots \text{解答(C)}$$

③ x 歳の新規加入の被保険者1名あたりの過去勤務債務は、

$$\frac{D_{x_r} \cdot \alpha}{D_x} - P \cdot \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{D_x} = \frac{(vp)^{x_r} \cdot \alpha \cdot \sum_{y=x_0}^{x-1}(vp)^y}{(vp)^x \cdot \sum_{y=x_0}^{x_r-1}(vp)^y}$$

よって新規加入の被保険者全体の過去勤務債務は、

$$\sum_{x=x_0+1}^{x_r-1} p^{x-x_0} \cdot l_0 \cdot \frac{(vp)^{x_r} \cdot \alpha \cdot \sum_{y=x_0}^{x-1}(vp)^y}{(vp)^x \cdot \sum_{y=x_0}^{x_r-1}(vp)^y} = \sum_{x=x_0+1}^{x_r-1} p^{x-x_0} \cdot l_0 \cdot \alpha \cdot (vp)^{x_r - x} \frac{\left(1 - (vp)^{x-x_0}\right)}{\left(1 - (vp)^{x_r - x_0}\right)} \cdots \text{解答(E)}$$

④

$(vp)^{x_r - x} \dfrac{\left(1 - (vp)^{x-x_0}\right)}{\left(1 - (vp)^{x_r - x_0}\right)}$ について考える。

v について微分すると、

$$\frac{\left((x_r-x)v^{x_r-x-1}p^{x_r-x}-(x_r-x_0)v^{x_r-x_0-1}p^{x_r-x_0}\right)\left(1-(vp)^{x_r-x_0}\right)-\left((vp)^{x_r-x}-(vp)^{x_r-x_0}\right)\left(-(x_r-x_0)v^{x_r-x_0-1}p^{x_r-x_0}\right)}{\left(1-(vp)^{x_r-x_0}\right)^2}$$

･･･(A)式

(A)式の分子について整理すると、

$$分子=(x_r-x)v^{x_r-x-1}p^{x_r-x}\left(1-v^{x_r-x_0}p^{x_r-x_0}\right)-(x_r-x_0)v^{x_r-x_0-1}p^{x_r-x_0}\left(1-v^{x_r-x}p^{x_r-x}\right)$$

$$=v^{x_r-x-1}p^{x_r-x}\left\{(x_r-x)\left(1-v^{x-x_0}p^{x-x_0}\right)+(x-x_0)\left(v^{x_r-x_0}p^{x_r-x_0}-v^{x-x_0}p^{x-x_0}\right)\right\}$$

$$=v^{x_r-x-1}p^{x_r-x}\left\{(x_r-x)+(x-x_0)v^{x_r-x_0}p^{x_r-x_0}-(x_r-x_0)v^{x-x_0}p^{x-x_0}\right\}$$ ･･･(B)式

(B)式の{ }の中について考える、vについて微分すると

$$(x-x_0)(x_r-x_0)v^{x_r-x_0-1}p^{x_r-x_0}-(x_r-x_0)(x-x_0)v^{x-x_0-1}p^{x-x_0}$$

$$=(x-x_0)(x_r-x_0)v^{x-x_0-1}p^{x-x_0}\left(v^{x_r-x}p^{x_r-x}-1\right)<0$$

よって(B)式の{ }の中はvについて単調減少。同様にpについても単調減少であり、最小値は$p=1$、$v\to1$としたときの＋0(正のまま限りなく0に近づく)。

よって、(B)式は正であることがわかる。これより、(A)式は正となり、制度全体の過去勤務債務はvが増加すると増加することがわかる。すなわち、予定利率が下がると増加する。･･･解答(A)

以上