損保数理 （問題）

問題1. 次の(1)から(10)について、それぞれ選択肢の中から正しい答えを一つ選んで、解答用紙の所定の欄にその記号を記入せよ。 (70点)

(1) ある自動車保険（保険期間1年）において、過去3年間に次のような料率改定を行った。

2002年10月 10%引上げ

2004年12月 10%引下げ

この保険の過去3年間の契約年度ごとの契約台数、保険料、保険金は、下表のとおりである。

契約年度	契約台数	保険料	保険金
2002年度契約	15,000	15,900	9,500
2003年度契約	18,000	19,800	12,500
2004年度契約	21,000	22,200	15,000

なお、各年度において契約内容は同一であり、払込方法は一括払とする。また、インフレーション率は考慮しなくてもよい。

① 直近の料率水準のベースでの2002～2004年度契約の損害率に最も近いものは、それぞれ下の選択肢（②と共通）のうちのどれか。

② 2004年度の全契約台数に対する、始期日が2004年4月1日～2004年11月30日の契約台数の割合に最も近いものは下の選択肢のうちのどれか。

(A) 60% (B) 61% (C) 62% (D) 63%
(E) 64% (F) 65% (G) 66% (H) 67%
(I) 68% (J) 69% (K) 70% (L) 71%
(M) 72% (N) 73% (O) 74% (P) 75%

(2) ある保険会社は、下表の保険料構成となっている保険期間1年の商品を販売している。新たに保険期間2年と3年の長期一時払契約の販売を開始したところ、ある年の契約件数は各保険期間（1年、2年、3年）とも等しかった。このとき、保険料収入全体に占める純保険料の割合に最も近いものは、次のうちどれか。なお、予定利率は年2%とする。

純保険料	60
新契約費	15
維持費	15
代理店手数料等	24
利潤	6
計（営業保険料）	120

(A) 48.5% (B) 49.5% (C) 50.5% (D) 51.5%
(E) 52.5% (F) 53.5% (G) 54.5% (H) 55.5%

(3) ある保険会社において、事業年度iの商品Aの保険金x_iと、商品Bの保険金y_iは、それぞれ下表のとおりであった。

事業年度 i	1	2	3	4	5
収入保険料(商品A、商品B合算)	300	300	300	300	300
商品Aの支払保険金 x_i	100	110	95	85	110
商品Bの支払保険金 y_i	70	80	55	55	65

事業年度ごとのポートフォリオおよび保険料に変化はなく、「商品Aの保険金X」と「商品Bの保険金Y」の同時確率密度関数は、近似的に次のとおりと見なしてよいことが判明している。

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 -2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right] \quad (-\infty\leq x, y\leq\infty)$$

今、上記のパラメータ$\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$を、それぞれ$\hat{\mu}_1=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i$, $\hat{\mu}_2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}y_i$, $\hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\hat{\mu}_1)^2$, $\hat{\sigma}_2^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(y_i-\hat{\mu}_2)^2$により、また$\rho$を$x_i$と$y_i$の相関係数により推定することとする。

さて、この場合において$Y=75$が与えられたときの、商品A、B合算の損害率の期待値に最も近いものは、次のうちどれか。なお、XとYは負の値も取りうるが、負の値を除外して計算する必要はない。

(A) 58%　(B) 59%　(C) 60%　(D) 61%
(E) 62%　(F) 63%　(G) 64%　(H) 65%

(4) ある保険契約のポートフォリオにおいて、クレーム件数Nは表1の分布に従い、個々のクレーム額Xは表2の分布に従っているものとする。

＜表1＞

k	$\Pr(N=k)$
0	0.35
1	0.30
2	0.20
3	0.10
4	0.05

＜表2＞

x	$f_X(x)$
1	0.70
2	0.25
3	0.05

このとき、クレーム総額Sが4を超える確率に最も近いものは、次のうちどれか。

(A) 0.01　(B) 0.03　(C) 0.05　(D) 0.07
(E) 0.09　(F) 0.11　(G) 0.13　(H) 0.15

(5) ある保険のポートフォリオが、次のとおり与えられているものとする。

① 被保険者ごとのクレーム件数は、ポアソン分布に従う。

② 被保険者ごとにクレーム件数の平均は、異なる値をとる。

③ 1,000人の被保険者を無作為に抽出したところ、各被保険者ごとのクレーム件数は下表のとおりであった。

クレーム件数 n	0	1	2	3	4	5	計
被保険者数 f_n	512	307	123	41	11	6	1,000

④ クレーム額の平均は1,500、分散は6,750,000である。

⑤ クレーム額とクレーム件数は、互いに独立である。

⑥ 95%の確率でクレーム総額が上下5%以内に入る場合に全信頼度を与える。

なお、$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{1.96}\exp\left(-x^2/2\right)dx = 0.475$とする。

このとき、クレーム総額の期待値に全信頼度を与えるために必要な被保険者数を、次の選択肢の中から選ぶとして、そのうちで最も小さいものはどれか。

(A) 1,000　(B) 3,000　(C) 5,000　(D) 7,000

(E) 9,000　(F) 11,000　(G) 13,000　(H) 15,000

(6) ある保険会社の自動車保険の料率は、年齢(A歳未満かA歳以上)と地域(B地域かC地域)の二つの危険標識で複合的に区分されている。この保険種目に関するある年度の実績統計が下表のとおりであったとして、この統計に基づきクレームコストの分析を行うこととする。

＜経過台数 E_{ij} ＞

	B地域	C地域	計
A歳未満	$E_{11}=5$	$E_{12}=10$	$E_{1\bullet}=15$
A歳以上	$E_{21}=65$	$E_{22}=20$	$E_{2\bullet}=85$
計	$E_{\bullet 1}=70$	$E_{\bullet 2}=30$	$E_{\bullet\bullet}=100$

＜クレーム総額 C_{ij} ＞

	B地域	C地域	計
A歳未満	$C_{11}=15$	$C_{12}=45$	$C_{1\bullet}=60$
A歳以上	$C_{21}=585$	$C_{22}=200$	$C_{2\bullet}=785$
計	$C_{\bullet 1}=600$	$C_{\bullet 2}=245$	$C_{\bullet\bullet}=845$

この複合リスクの構造が乗法型であるものと仮定して、二つの危険標識について料率係数をMinimum Bias法により求めるとき、年齢区分のうち「A歳未満」に対応する料率係数x_1の値に最も近いものは次のうちどれか。なお、地域区分のうち「C地域」に対応する料率係数y_2は、それに対応する実績の相対クレームコスト指数$r_{\bullet 2}=\frac{C_{\bullet 2}/E_{\bullet 2}}{C_{\bullet\bullet}/E_{\bullet\bullet}}$に等しいものと仮定する。

(A) 0.4　(B) 0.5　(C) 0.6　(D) 0.7

(E) 0.8　(F) 0.9　(G) 1.0　(H) 1.1

(7) 事故発生年度から経過4年度までに支払が完了する保険契約について、事故年度・経過年度別支払保険金表および初年度支払件数が下表のとおり与えられているとする。このとき、分離法を用いて2004事故年度の最終累計支払保険金を推計した場合に、その値に最も近いものは次のうちどれか。

ただし、単位ロスディベロップメントは初年度支払件数で除したものを用いて求め、インフレーション率は各年度の単純平均を用いることとし、また支払保険金はその支払年度の物価水準によるものとする。なお、インフレーション以外の外部要因はないものとする。

＜事故年度・経過年度別支払保険金および初年度支払件数表＞

事故年度	初年度支払件数	経過年度ごとの支払保険金			
		1年	2年	3年	4年
2001	100	6,000	1,800	800	300
2002	150	9,500	3,000	1,350	
2003	200	13,000	4,200		
2004	300	20,000			

(A) 30,000　(B) 30,200　(C) 30,400　(D) 30,600
(E) 30,800　(F) 31,000　(G) 31,200　(H) 31,400

(8) 中途返れい金のある年払契約の積立型基本特約において、払戻積立金が負にならないために満たすべき関係式として正しいものは、次のうちどれか。ただし、満期返れい金をW、中途返れい金をR、保険期間をn年、保険始期から中途返れい金の支払までの期間をj年、予定利率をi、現価率を$v\left(=\dfrac{1}{1+i}\right)$、予定消滅率$q$を考慮した現価率を$\phi\left(=(1-q)v\right)$とする。

(A) $R \le W \times \phi^{n-j} \times \dfrac{1-\phi^j}{\phi^j-\phi^n}$　(B) $R \ge W \times \phi^{n-j} \times \dfrac{1-\phi^j}{\phi^j-\phi^n}$

(C) $R \le W \times \phi \times \dfrac{1-\phi^j}{\phi^j-\phi^n}$　(D) $R \ge W \times \phi \times \dfrac{1-\phi^j}{\phi^j-\phi^n}$

(E) $R \le W \times \phi^{n-j} \times \dfrac{1-\phi}{\phi^j-\phi^n}$　(F) $R \ge W \times \phi^{n-j} \times \dfrac{1-\phi}{\phi^j-\phi^n}$

(G) $R \le W \times \phi^{n-j} \times \dfrac{1-\phi^j}{\phi-\phi^n}$　(H) $R \ge W \times \phi^{n-j} \times \dfrac{1-\phi^j}{\phi-\phi^n}$

(9) クレーム件数過程$\{N_t\}_{t\ge 0}$が次の条件を満たすとする。

① $0 \le s < t \le u < v \Rightarrow N_t - N_s$と$N_v - N_u$は独立

② $P(N_t = 0) = e^{-2t}\quad (0 \le t \le 1)$, $P(N_t - N_1 = 0) = e^{-5(t-1)}\quad (t > 1)$が成り立つ。

③ 同一時刻に2件以上のクレームが発生することはない。

このクレーム件数過程において、1件目のクレームが発生する時刻を表す確率変数をT_1で表すこととする。T_1の平均に最も近いものは、次のうちどれか。なお、必要があれば$e = 2.718$として計算すること。

(A) 0.2　(B) 0.25　(C) 0.3　(D) 0.35
(E) 0.4　(F) 0.45　(G) 0.5　(H) 0.55

(10) ある商品の個々のクレーム額が平均100の指数分布に従っており、この商品1契約あたりのクレーム件数は平均0.01のポアソン分布に従っている。この保険を10,000件引き受けている元受保険会社が、責任額無制限のELC再保険を購入することとした。再保険適用後のクレーム総額をSとした場合、変動係数$\left(=\sqrt{V(S)}/E(S)\right)$が0.135以下になるようにエクセスポイント$\alpha$を設定したい。

次の選択肢の中からこの条件を満たすαを選ぶとして、そのうちで最も大きいものはどれか。なお、必要があれば$\sqrt{e}=1.649$として計算すること。

(A) 200	(B) 250	(C) 300	(D) 350
(E) 400	(F) 450	(G) 500	(H) 550

問題2. ある保険会社が、自動車保険契約者のポートフォリオの分布として、外部統計を参考にして次表のような仮定を置いた。

カテゴリー	一人当たり年間平均クレーム件数	契約者数の割合
A(優　良)	0.2	60%
B(普　通)	0.5	30%
C(その他)	2	10%

また、どのカテゴリーの契約者についても、クレーム件数はポアソン分布に従っているとし、クレーム1件あたりのクレーム額は定額で1とする。今、この保険会社はこのポートフォリオに対し、2等級の無事故割引制度(等級0と等級1)の導入を考えており、年間でクレームが1件以上あれば等級1、クレームがなければ等級0に移行する。

このとき、次の各問いに答えよ。なお、必要があれば$e^{-0.2}=0.8187$, $e^{-0.5}=0.6065$, $e^{-2}=0.1353$として計算すること。 (18点)

(1) 定常状態において等級0の契約者のうち、カテゴリーA(優良)の契約者の割合を求めよ。答えはパーセント単位で、小数点以下第2位を四捨五入して小数点以下第1位まで求めよ。

(2) 定常状態において等級0の契約者の平均クレーム件数と、等級1の契約者の平均クレーム件数をそれぞれ求めよ。答えは小数点以下第4位を四捨五入して小数点以下第3位まで求めよ。

(3) それぞれの等級について、(2)で求めた平均事故件数にクレーム額単価1を乗じた金額をそれぞれの等級の純保険料として課すこととした。一方において、定常状態において等級0の契約者にn件のクレームがあった場合に、Bühlmannモデルにより推定した翌年度に課すべき純保険料を考える。このとき、nが何件以上のときに、前者の純保険料に比べて後者のBühlmannモデルによる純保険料の方が大きくなるかを求めよ。

問題3.　時刻tでのサープラスU_tが次の形で表せるLundbergモデルを考える。

$$U_t = u_0 + (1+\theta)\lambda\mu t - S_t \qquad (t \geq 0)$$

ここで、u_0:期初サープラス(≥ 0)

U_t:時刻t時点でのサープラス

$(1+\theta)\lambda\mu t$:時刻tまでの収入保険料($\theta(>0)$は安全割増率)

S_t:時刻tまでの支払保険金

であり、S_tは複合ポアソン過程に従う。また、S_tのポアソンパラメーターはλであり、個々のロスは平均がμの指数分布に従うものとする。このとき、次の問いに答えよ。　(12点)

(1) 調整係数Rを求めよ。

(2) 期初サープラスがu_0のときの破産確率を求めよ。

以　上

損保数理（解答例）

問題1.

(1)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（テキスト1-5ページ参照）

①　　2002年度契約（E）　2003年度契約（K）　2004年度契約（M）

2002年度契約の上期の契約台数の割合をtとし、2004年度契約の4月～11月の契約台数の割合をsとする。また、現在の料率水準での1台あたりの保険料単価をxとする。このとき、下記の式が成り立つ。

2002年度契約：$15{,}000x\dfrac{10}{11}\cdot\dfrac{10}{9}t+15{,}000x\dfrac{10}{9}(1-t)=15{,}900$

2003年度契約：$18{,}000x\dfrac{10}{9}=19{,}800$

2004年度契約：$21{,}000x\dfrac{10}{9}s+21{,}000x(1-s)=22{,}200$

これを解くと、$x=19{,}800\cdot\dfrac{9}{10}/18{,}000=0.99$となる。よって、各年度の損害率は以下のとおりとなる。

2002年度契約の損害率：$\dfrac{9{,}500}{15{,}000\times 0.99}=0.639$

2003年度契約の損害率：$\dfrac{12{,}500}{18{,}000\times 0.99}=0.701$

2004年度契約の損害率：$\dfrac{15{,}000}{21{,}000\times 0.99}=0.721$

②　　(B)

$x=0.99$として①におけるtとsを求める。

$$t=\frac{6{,}000}{15{,}000}=0.4$$

$$s=\frac{22{,}200-21{,}000\times 0.99}{21{,}000\times 0.99\times(10/9-1)}=0.610$$

(2)　　(G)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（テキスト1-38ページ参照）

1年契約の営業保険料をPとし、その営業保険料に対する純保険料、新契約費、維持費、代理店手数料等、利潤の割合をそれぞれ$p,\alpha,\beta,\theta,\delta$とする。また、$v=\dfrac{1}{1+0.02}$とすると、

$$\frac{1年契約の純保険料+2年契約の純保険料+3年契約の純保険料}{1年契約の営業保険料+2年契約の営業保険料+3年契約の営業保険料}$$

$$=\frac{P\times p+P\times p\times(1+v)+P\times p\times(1+v+v^2)}{P+P\times\dfrac{\alpha+(\beta+p)(1+v)}{1-(\theta+\delta)}+P\times\dfrac{\alpha+(\beta+p)(1+v+v^2)}{1-(\theta+\delta)}}$$

$$=\frac{p\left\{1+(1+v)+(1+v+v^2)\right\}}{\dfrac{3\alpha}{1-(\theta+\delta)}+\dfrac{\beta+p}{1-(\theta+\delta)}\left\{1+(1+v)+(1+v+v^2)\right\}}\qquad\left(\because\ \frac{p+\alpha+\beta}{1-(\theta+\delta)}=1\right)$$

$$=\frac{p(3+2v+v^2)}{\dfrac{3\alpha}{1-(\theta+\delta)}+\dfrac{\beta+p}{1-(\theta+\delta)}(3+2v+v^2)}$$

ここで、$p=0.5, \alpha=0.125, \beta=0.125, \theta=0.2, \delta=0.05$， $v=\dfrac{1}{1+0.02}$ であるから、それぞれを代入すると、

$$(\text{上式})=0.5448.....$$

(3)　(D)　(テキスト2-5ページ参照)

題意より、各パラメータは以下のとおり推定される。

$$\hat{\mu}_1=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=100,\ \hat{\mu}_2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}y_i=65,\ \hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\hat{\mu}_1)^2=90,\ \hat{\sigma}_2^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(y_i-\hat{\mu}_2)^2=90,$$

$$\hat{\rho}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-100)(y_i-50)}{5\times\sqrt{90\times 90}}=\frac{7}{9}$$

一方、商品Bの保険金の確率密度関数 $g(y)$ は、

$$g(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left(-\frac{(y-\mu_2)^2}{2{\sigma_2}^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)-\rho\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left(-\frac{(y-\mu_2)^2}{2{\sigma_2}^2}\right)$$

となる。したがって、$Y=y$ が与えられた場合の商品Aの保険金期待値は、

$$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x|y)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xf(x,y)}{g(y)}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)-\rho\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)^2\right)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2){\sigma_1}^2}\left(x-\left(\mu_1+\rho\sigma_1\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)^2\right)dx$$

$$=\mu_1+\rho\sigma_1\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}=100+\frac{7}{9}(75-65)=\frac{970}{9}$$

よって、損害率は $\dfrac{\dfrac{970}{9}+75}{300}=60.925...$

(4)　　(D)　　（テキスト2-16ページ参照）

畳み込みを用いてSの分布を計算する。

$\Pr(N=n)$	0.35	0.30	0.20	0.10	0.05		
n :	0	1	2	3	4		
x	$f^{*0}(x)$	$f^{*1}(x)$	$f^{*2}(x)$	$f^{*3}(x)$	$f^{*4}(x)$	$f_S(x)$	$F_S(x)$
0	1					0.35	0.35
1		0.70				0.21	0.56
2		0.25	0.49			0.173	0.733
3		0.05	0.35	0.343		0.1193	0.8523
4			0.1325	0.3675	0.2401	0.075255	0.927555

これより、$\Pr(S>4)=1-F_S(4)=1-0.927555=0.072445$となる。

(5)　　(E)　　（テキスト3-23ページ参照）

クレーム件数をN、クレーム額をXとして、クレーム総額をSとすると、

$$E(S)=E(N)E(X)=\frac{0\times512+1\times307+\cdots+5\times6}{1000}\times1500=1125$$

$$V(S)=E(N)V(X)^2+V(N)E(X)^2$$

$$=0.75\times6750000+\left(\frac{0^2\times512+1^2\times307+\cdots+5^2\times6}{1000}-0.75^2\right)\times1500^2$$

$$=7158375$$

被保険者n人のクレーム総額をTとしたときに、$P\left(\left|T-E(T)\right|<0.05E(T)\right)\geq0.95$となればよい。

$E(T)=nE(S),\ V(T)=nV(S)$であるから、

$$P\left(\left|T-nE(S)\right|<0.05nE(S)\right)=P\left(\frac{\left|T-nE(S)\right|}{\sqrt{nV(S)}}<\frac{0.05nE(S)}{\sqrt{nV(S)}}\right)\geq\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{1.96}\exp\left(-x^2/2\right)dx$$

となり、よって、$\dfrac{0.05nE(S)}{\sqrt{nV(S)}}\geq1.96$となる。

したがって、全信頼度を与えるために必要な最小限の被保険者数は、次のようになる。

$$n\geq\left(\frac{1.96}{0.05}\right)^2\cdot\frac{V(S)}{\left(E(S)\right)^2}=\left(\frac{1.96}{0.05}\right)^2\cdot\frac{7158375}{1125^2}=8691$$

(6)　　(B)　　（テキスト4-12ページ参照）

リスク区分ごとのクレームコストは$R_{ij}=\dfrac{C_{ij}}{E_{ij}}$　および相対クレームコスト指数　$r_{ij}=\dfrac{R_{ij}}{R_{\bullet\bullet}}$　を計算すると、

<クレームコストR_{ij}>

	B地域	C地域	計
A歳未満	3.000	4.500	4.000
A歳以上	9.000	10.000	9.235
計	8.571	8.167	8.450

＜相対クレームコスト指数 r_{ij} ＞

	B地域	C地域	計
A歳未満	0.355	0.533	0.473
A歳以上	1.065	1.183	1.093
計	1.014	0.966	1.000

相対クレームコスト指数の推定値を $\hat{r}_{ij}$ としたときに、Minimum Bias法における満たすべき条件は、次の連立方程式のようになる。

$$E_{11}\cdot\left(r_{11}-\hat{r}_{11}\right)+E_{12}\cdot\left(r_{12}-\hat{r}_{12}\right)=0$$

$$E_{21}\cdot\left(r_{21}-\hat{r}_{21}\right)+E_{22}\cdot\left(r_{22}-\hat{r}_{22}\right)=0$$

$$E_{11}\cdot\left(r_{11}-\hat{r}_{11}\right)+E_{21}\cdot\left(r_{21}-\hat{r}_{21}\right)=0$$

$$E_{12}\cdot\left(r_{12}-\hat{r}_{12}\right)+E_{22}\cdot\left(r_{22}-\hat{r}_{22}\right)=0$$

この連立方程式において、$E_{ij}\cdot\left(r_{ij}-\hat{r}_{ij}\right)$ をそれぞれ変数とみなして求めると

$$E_{11}\cdot\left(r_{11}-\hat{r}_{11}\right)=E_{22}\cdot\left(r_{22}-\hat{r}_{22}\right)=C$$

$$E_{12}\cdot\left(r_{12}-\hat{r}_{12}\right)=E_{21}\cdot\left(r_{21}-\hat{r}_{21}\right)=-C$$

となる。ここで C は定数とする。

さて、この複合分類リスクの構造が乗法型であることから、各相対クレームコスト指数の推定値は料率係数を用いて表すと、次のようになる。

$$\hat{r}_{ij}=x_i\times y_j \quad (i,j=1,2)$$

$$x_1\times y_1=r_{11}-\frac{C}{E_{11}}$$

$$x_2\times y_2=r_{22}-\frac{C}{E_{22}}$$

$$x_1\times y_2=r_{12}+\frac{C}{E_{12}}$$

$$x_2\times y_1=r_{22}+\frac{C}{E_{22}}$$

$$\left(r_{11}-\frac{C}{E_{11}}\right)\left(r_{22}-\frac{C}{E_{22}}\right)=\left(r_{12}+\frac{C}{E_{12}}\right)\left(r_{21}+\frac{C}{E_{21}}\right)$$

$$\left(0.355-\frac{C}{5}\right)\left(1.183-\frac{C}{20}\right)=\left(0.533+\frac{C}{10}\right)\left(1.065+\frac{C}{65}\right)$$

$$\frac{1}{5\times20}C^2-\left(\frac{1.183}{5}+\frac{0.355}{20}\right)C+0.355\times1.183=\frac{1}{10\times65}C^2+\left(\frac{1.065}{10}+\frac{0.533}{65}\right)C+0.533\times1.065$$

$$\left(\frac{1}{5\times20}-\frac{1}{10\times65}\right)C^2-\left(\frac{1.183}{5}+\frac{0.355}{20}+\frac{1.065}{10}+\frac{0.533}{65}\right)C+\left(0.355\times1.183-0.533\times1.065\right)=0$$

$$C=\frac{479.765\pm\sqrt{479.765^2+4\times11\times191.984}}{2\times11}$$

$$C=-0.396,\,44.011$$

$C=-0.396$ の場合は、$x_1=0.510,\ x_2=1.245,\ y_1=0.850$ となる。

$C=44.011$の場合は、$x_1=5.107, x_2=-1.053, y_1=-1.653$となり、$x_2$と$y_1$が負数で不適。
したがって、$x_1=0.510$

(7)　　(B)　　(テキスト5-30ページ参照)

まず事故年度ごとに経過年度ごとの支払保険金を初年度支払件数で除する。

事故年度	初年度支払件数	経過年度ごとの支払保険金			
		1	2	3	4
2001	100	60.0	18.0	8.00	3.00
2002	150	63.3	20.0	9.00	
2003	200	65.0	21.0		
2004	300	66.7			

分離法を用いるために、r_jをj経過年度の支払比率と定義し、事故年度に拘りなく一定と仮定する。また、λ_kをインフレーションなど外的要因の影響を受けた損害額の指標で、事故年度および経過年度によらずに支払年度kで定まるものと定義する。さらに、i事故年度のj経過年度のクレームコストの期待値が、$r_j \cdot \lambda_{i+j}$で表されると仮定する。

このとき、以下の関係式を得ることができる。

$$r_1+r_2+r_3+r_4=1$$
$$\lambda_1\times r_1+\lambda_2\times r_1+\lambda_3\times r_1+\lambda_4\times r_1=255$$
$$\lambda_2\times r_2+\lambda_3\times r_2+\lambda_4\times r_2=59.0$$
$$\lambda_3\times r_3+\lambda_4\times r_3=17.0$$
$$\lambda_4\times r_4=3.00$$
$$\lambda_1\times r_1=60.0$$
$$\lambda_2\times r_2+\lambda_2\times r_1=81.3$$
$$\lambda_3\times r_3+\lambda_3\times r_2+\lambda_3\times r_1=93.0$$
$$\lambda_4\times r_4+\lambda_4\times r_3+\lambda_4\times r_2+\lambda_4\times r_1=99.7$$

これよりパラメータr_j, λ_iを求めると、次のようになる。

$r_1=0.678$　$r_2=0.205$　$r_3=0.087$　$r_4=0.030$

$\lambda_1=88.5$　$\lambda_2=92.1$　$\lambda_3=95.9$　$\lambda_4=99.7$

次に、各年度のインフレーション率は次のとおりである。

経過年度1→2:　1.04 =92.1/88.5

経過年度2→3:　1.04 =95.9/92.1

経過年度3→4:　1.04 =99.7/95.9

将来:　1.04

よって、

2004年度の経過年度2の支払保険金:　99.7×1.04× 0.205＝21.3

2004年度の経過年度3の支払保険金:　99.7×1.04×1.04× 0.087＝9.4

2004年度の経過年度4の支払保険金:　99.7×1.04×1.04×1.04× 0.030＝3.4

2004年度の累計支払保険金:　300×(66.7＋21.3＋9.4＋3.4)＝ 30,240

(8)　(A)　(テキスト6-33ページ参照)

第t保険年度末の払戻積立金は、

$${}_tV=\left(W\times\phi^{n-t}+R\times\phi^{j-t}\right)\times\frac{1-\phi^t}{1-\phi^n}\qquad t<j$$

$${}_tV=\left(W\times\phi^{n-t}+R\times\phi^{j-t}\right)\times\frac{1-\phi^t}{1-\phi^n}-R\times\phi^{j-t}\qquad t\geq j$$

${}_tV$は、$t=j$のときに最も最小になるので、そのときに負にならなければよい。よって、

$${}_jV=\left(W\times\phi^{n-j}+R\times\phi^{j-j}\right)\times\frac{1-\phi^j}{1-\phi^n}-R\times\phi^{j-j}\geq 0$$

$$R\times\left(1-\frac{1-\phi^j}{1-\phi^n}\right)\leq W\times\phi^{n-j}\times\frac{1-\phi^j}{1-\phi^n}$$

$$R\times\left(\frac{\phi^j-\phi^n}{1-\phi^n}\right)\leq W\times\phi^{n-j}\times\frac{1-\phi^j}{1-\phi^n}$$

$$R\leq W\times\phi^{n-j}\times\frac{1-\phi^j}{\phi^j-\phi^n}$$

(9)　(F)　(テキスト7-16ページ参照)

$t>1$において、

$$\Pr(N_t=0)=\Pr(N_t-N_1=0,\ N_1=0)=\Pr(N_t-N_1=0)\Pr(N_1=0)$$
$$=e^{-5(t-1)}\cdot e^{-2\times 1}=e^{-5t+3}$$

となるので、オペレーショナル・タイムを$\tau(t)$とすると、

$$\tau(t)=-\log\Pr(N_t=0)=\begin{cases}2t & (0\leq t\leq 1)\\ 5t-3 & (t>1)\end{cases}$$

となり、$N'_s=N_{\tau^{-1}(s)}$はポアソン過程に従い、$\Pr(N'_s=n)=\dfrac{s^n}{n!}e^{-s}$ $(n=0,1,\ldots)$が成り立つ(テキスト7-16ページ、定理7.2)。したがって、$S_1=\tau(T_1)$はガンマ分布$\Gamma(1,1)$、すなわち平均1の指数分布に従うので、

$$E(T_1)=E\left(\tau^{-1}(S_1)\right)=\int_0^{\infty}\tau^{-1}(s)e^{-s}ds=\int_0^2\frac{1}{2}se^{-s}ds+\int_2^{\infty}\frac{s+3}{5}e^{-s}ds$$
$$=\frac{1}{2}(1-3e^{-2})+\frac{1}{5}(3e^{-2}+3e^{-2})=\frac{1}{2}-\frac{3}{10}e^{-2}$$
$$=0.459\ldots$$

(10)　(C)　(テキスト8-12ページ参照)

クレーム額の分布をX，ポートフォリオ全体でのクレーム件数の分布をNとすると、$E(N)=V(N)=0.01\times 10000=100$であるから、

$$CV=\frac{\sqrt{V(X)E(N)+E(X)^2V(N)}}{E(N)E(X)}$$
$$=\frac{\sqrt{E(N)\left(V(X)+E(X)^2\right)}}{E(N)E(X)}=\frac{\sqrt{E(N)E(X^2)}}{E(N)E(X)}=\frac{1}{10}\times\frac{\sqrt{E(X^2)}}{E(X)}$$

となる。また、

$$E(X)=\int_0^{\alpha}\frac{x}{100}\exp\left(-\frac{x}{100}\right)dx+\alpha\int_{\alpha}^{\infty}\frac{1}{100}\exp\left(-\frac{x}{100}\right)dx$$

$$=\left[-x\exp\left(-\frac{x}{100}\right)\right]_{x=0}^{x=\alpha}+\int_0^{\alpha}\exp\left(-\frac{x}{100}\right)dx+\alpha\left[-\exp\left(-\frac{x}{100}\right)\right]_{x=\alpha}^{x=\infty}$$

$$=\left[-x\exp\left(-\frac{x}{100}\right)\right]_{x=0}^{x=\alpha}+\left[-100\exp\left(-\frac{x}{100}\right)\right]_{x=0}^{x=\alpha}+\alpha\left[-\exp\left(-\frac{x}{100}\right)\right]_{x=\alpha}^{x=\infty}$$

$$=-\alpha\exp\left(-\frac{\alpha}{100}\right)-100\exp\left(-\frac{\alpha}{100}\right)+100+\alpha\exp\left(-\frac{\alpha}{100}\right)=100\left(1-\exp\left(-\frac{\alpha}{100}\right)\right)$$

$$E(X^2)=\int_0^{\alpha}\frac{x^2}{100}\exp\left(-\frac{x}{100}\right)dx+\alpha^2\int_{\alpha}^{\infty}\frac{1}{100}\exp\left(-\frac{x}{100}\right)dx$$

$$=\left[-x^2\exp\left(-\frac{x}{100}\right)\right]_{x=0}^{x=\alpha}+\int_0^{\alpha}2x\exp\left(-\frac{x}{100}\right)dx+\alpha^2\left[-\exp\left(-\frac{x}{100}\right)\right]_{x=\alpha}^{x=\infty}$$

$$=\left[-x^2\exp\left(-\frac{x}{100}\right)\right]_{x=0}^{x=\alpha}+\left[-200x\exp\left(-\frac{x}{100}\right)\right]_{x=0}^{x=\alpha}$$

$$+\int_0^{\alpha}200\exp\left(-\frac{x}{100}\right)dx+\alpha^2\left[-\exp\left(-\frac{x}{100}\right)\right]_{x=\alpha}^{x=\infty}$$

$$=\left[-x^2\exp\left(-\frac{x}{100}\right)\right]_{x=0}^{x=\alpha}+\left[-200x\exp\left(-\frac{x}{100}\right)\right]_{x=0}^{x=\alpha}$$

$$+\left[-20000\exp\left(-\frac{x}{100}\right)\right]_{x=0}^{x=\alpha}+\alpha^2\left[-\exp\left(-\frac{x}{100}\right)\right]_{x=\alpha}^{x=\infty}$$

$$=-\alpha^2\exp\left(-\frac{\alpha}{100}\right)-200\alpha\exp\left(-\frac{\alpha}{100}\right)-20000\exp\left(-\frac{\alpha}{100}\right)+20000+\alpha^2\exp\left(-\frac{\alpha}{100}\right)$$

$$=20000-200\alpha\exp\left(-\frac{\alpha}{100}\right)-20000\exp\left(-\frac{\alpha}{100}\right)$$

となるので、$\sqrt{e}=1.649$を用いてこれを計算すると、

α	$E(X)$	$E(X^2)$	CV
150	77.698..	8,849.148..	0.12107..
200	86.476..	11,885.372..	0.12607..
250	91.798..	14,258.905..	0.13008..
300	95.026..	16,021.072..	0.13320..
350	96.984..	17,285.450..	0.13556..

となり、300万円以下のエクセスポイントが必要であることが分かる。

問題2.　　(テキスト3-30ページ参照)

(1) 平均事故件数がλの場合、事故が発生しない確率は$e^{-\lambda}$、1件以上事故が発生する確率は$1-e^{-\lambda}$である。したがって、推移行列Πは、

事故後等級

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \text{事故前等級} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} e^{-\lambda} & 1-e^{-\lambda} \\ e^{-\lambda} & 1-e^{-\lambda} \end{bmatrix} \end{array}$$

となり、定常状態での各等級にいる割合を表すベクトルを$\mathbf{p}=(p \quad 1-p)$とすれば、$\mathbf{p}=\mathbf{p}\Pi$より、$\mathbf{p}=(e^{-\lambda} \quad 1-e^{-\lambda})$となる。したがって、各カテゴリーの平均事故件数をそれぞれ$\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C$、契約者全体に対する割合をそれぞれ$p_A, p_B, p_C$とおけば、定常状態において等級0にいる人数の契約者全体に対する割合をqとすると、

$$q=p_A e^{-\lambda_A}+p_B e^{-\lambda_B}+p_C e^{-\lambda_C}$$

であり、うちカテゴリーAの割合は$p_A e^{-\lambda_A}$であるから、求める割合をq_Aとすると、

$$q_A=\frac{p_A e^{-\lambda_A}}{p_A e^{-\lambda_A}+p_B e^{-\lambda_B}+p_C e^{-\lambda_C}}=\frac{60\%\times e^{-0.2}}{60\%\times e^{-0.2}+30\%\times e^{-0.5}+10\%\times e^{-2}}$$

$$=\frac{0.49122}{0.6867}=71.53\ldots\%$$

となる。したがって、答えは71.5%となる。

(2) 定常状態において等級0にいる契約者のうち、カテゴリーBおよびCの契約者の割合をそれぞれq_A, q_Bとすると、(1)と同様に

$$q_B=\frac{p_B e^{-\lambda_B}}{q}=\frac{0.18195}{0.6867}=26.49\ldots\%$$

$$q_C=\frac{p_C e^{-\lambda_C}}{q}=\frac{0.0135}{0.687}=1.97\ldots\%$$

となる。したがって、定常状態における等級0の平均事故件数をμ_0とすると、

$$\mu_0=\lambda_A q_A+\lambda_B q_B+\lambda_C q_C=0.2\times 71.53\%+0.5\times 26.49\%+2\times 1.97\%$$

$$=0.3149\cdots=0.315$$

ポートフォリオ全体の平均事故件数は

$$0.2\times 60\%+0.5\times 30\%+2\times 10\%=0.47$$

であるから、定常状態における等級1の平均事故件数をμ_1とすると、

$$q\mu_0+(1-q)\mu_1=0.47$$

より、

$$\mu_1=\frac{0.47-0.6867\times 0.3149}{1-0.6867}=0.8099=0.810$$

(3) 等級0にいる契約者のうち、平均事故件数がΘの契約者の事故件数Xはポアソン分布に従うことから、その平均と分散は、

$$E(X\mid\Theta)=\Theta,\quad V(X\mid\Theta)=\Theta$$

である。また、Θの分布は、

$$\Pr(\Theta=0.2)=q_A=71.53\cdots\%$$
$$\Pr(\Theta=0.5)=q_B=26.49\cdots\%$$
$$\Pr(\Theta=2)=q_C=1.97\cdots\%$$

である。したがって、

$$E(V(X\mid\Theta))=E(\Theta)=0.3149\cdots$$
$$V(E(X\mid\Theta))=V(\Theta)=0.0744$$

であるので、Bühlmannモデルによる信頼度は、

$$Z=\frac{1}{1+\dfrac{E(V(X\mid\Theta))}{V(E(X\mid\Theta))}}=\frac{1}{1+\dfrac{0.3149}{0.0744}}=0.1911\ldots$$

となる。よって、n件のクレームがあった場合の翌年に課すべき純保険料は、

$$1\times(Z\cdot n+(1-Z)\cdot 0.3149)=0.1911n+0.8089\times 0.3149=0.1911n+0.2547$$

よって、平均事故件数による翌年度の純保険料は、(2)より、$n=0$のとき0.3149、$n\geq 1$のとき0.8099である。

$n=0$のときは、$0.1911\times 0+0.2547<0.3149$より、平均事故件数による純保険料の方が大きい。

$n\geq 1$のとき、Bühlmannモデルによる純保険料の方が大きくなるならば、

$$0.1911n+0.255>0.8099$$
$$n>2.90\ldots$$

より、nが3件以上のとき、Bühlmannモデルによる純保険料の方が大きくなる。

問題3. （テキスト7-55ページ参照）

(1) 調整係数Rは、

$$\lambda+(1+\theta)\lambda\mu r=\lambda M_X(r)\qquad \text{ただし、}\mu=E(X),\ M_X(r)=\frac{1}{1-\mu r}$$

の正の解である。

$$\lambda+(1+\theta)\lambda\mu r=\frac{\lambda}{1-\mu r}$$

が成り立つことから、これをrで解けばよい。

$$(1+\theta)\mu r=\frac{1}{1-\mu r}-1$$

$$1+\theta=\frac{1}{1-\mu r}$$

$$\mu r=1-\frac{1}{1+\theta}$$

よって、$r=\dfrac{\theta}{(1+\theta)\mu}$となり、これは正であることが分かる。

したがって求める調整係数は、$R=\dfrac{\theta}{(1+\theta)\mu}$である。

(2) 期初サープラスがu_0のときの破産確率を$\varepsilon(u_0)$としたとき、破産確率$\varepsilon(u_0)$は次のようになる。

$$\varepsilon(u_0)=\frac{e^{-Ru_0}}{E(e^{-RU_T}\mid T<\infty)}=\frac{e^{-Ru_0}}{E(e^{R(-U_T)}\mid T<\infty)}$$

よって、$T<\infty$という条件の下での$-U_T$の分布を求める。

$$P(-U_T<y\,|\,T<\infty)=1-P(-U_T>y\,|\,T<\infty)$$

であり、右辺の第2項を破産直前のサープラス$-U_{T-\delta}$および、破産時点Tで起こったクレーム額Xを用いて表現すれば、

$$\begin{aligned}
P(-U_T>y\,|\,T<\infty)&=P(U_T<-y\,|\,T<\infty)\\
&=\int_0^\infty P(U_{T-\delta}=u)\cdot\frac{P(X>U_{T-\delta}+y)}{P(X>U_{T-\delta})}du\\
&=\int_0^\infty P(U_{T-\delta}=u)\cdot\frac{\frac{1}{\mu}\int_{U_{T-\delta+y}}^\infty e^{-\frac{x}{\mu}}dx}{\frac{1}{\mu}\int_{U_{T-\delta}}^\infty e^{-\frac{x}{\mu}}dx}du\\
&=\int_0^\infty P(U_{T-\delta}=u)\cdot\frac{\frac{1}{\mu}\times -e^{-\frac{U_{T-\delta}+y}{\mu}}}{\frac{1}{\mu}\times -e^{-\frac{U_{T-\delta}}{\mu}}}\\
&=\int_0^\infty P(U_{T-\delta}=u)\cdot e^{-\frac{y}{\mu}}du\\
&=e^{-\frac{y}{\mu}}
\end{aligned}$$

となるので、

$$P(-U_T<y\,|\,T<\infty)=1-e^{-\frac{y}{\mu}}$$

となり、確率密度関数は、

$$P(-U_T=y\,|\,T<\infty)=\frac{1}{\mu}e^{-\frac{y}{\mu}}$$

となる。よって、期初サープラスu_0のときの破産確率$\varepsilon(u_0)$は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\varepsilon(u_0)&=\frac{e^{-Ru_0}}{E(e^{-RU_T}\,|\,T<\infty)}=\frac{e^{-Ru_0}}{E(e^{R\cdot(-U_T)}\,|\,T<\infty)}\\
&=\frac{e^{-\frac{\theta}{(1+\theta)\mu}u_0}}{\int_0^\infty e^{\frac{\theta}{(1+\theta)\mu}\cdot y}\frac{1}{\mu}e^{-\frac{y}{\mu}}dy}=\frac{e^{-\frac{\theta u_0}{(1+\theta)\mu}}}{\left[\frac{1}{\mu}(-\mu(1+\theta))\,e^{-\frac{y}{\mu(1+\theta)}}\right]_0^\infty}\\
&=\frac{e^{-\frac{\theta}{(1+\theta)\mu}u_0}}{\frac{1}{\mu}\cdot\mu(1+\theta)}=\frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{\theta}{(1+\theta)\mu}u_0}
\end{aligned}$$