生 保 数 理（問 題）

問題 1. 次の(1)から(8)までの各問について解答用紙の所定の欄に記入せよ。(48 点)

(1) 保険給付現価を表す $A_{x:\overline{n}|}$、$A^{\ 1}_{x:\overline{n}|}$ および $(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}$ はいずれも、給付の現価を確率変数と見て、発生確率 $\{q_x,\ {}_{1|}q_x,\ \cdots,\ {}_{n-1|}q_x,\ {}_np_x\}$ を用いて計算された平均値として、確率論的に表示することができる。いま、同様に、生命年金現価 $(Ia)_{x:\overline{n}|}$ も確率論的に表示し、それぞれの発生確率の係数を比較すると、次の関係式を作ることができる。

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \boxed{①} + \boxed{②} \times A_{x:\overline{n}|} + \boxed{③} \times (IA)^{1}_{x:\overline{n}|} + \boxed{④} \times nA^{\ 1}_{x:\overline{n}|}$$

このとき、①～④には、d を用いたどのような式が当てはまるか。最も適当な記号を選べ。

(A) $\dfrac{1}{d}$　(B) $\dfrac{1}{d^2}$　(C) $\dfrac{1-d}{d}$　(D) $\dfrac{1-d}{d^2}$　(E) $\dfrac{(1-d)^2}{d^2}$

(F) $-\dfrac{1}{d}$　(G) $-\dfrac{1}{d^2}$　(H) $-\dfrac{1-d}{d}$　(I) $-\dfrac{1-d}{d^2}$　(J) $-\dfrac{(1-d)^2}{d^2}$

(2) ある年齢 x 歳において、生存確率 ${}_tp_x$ と死力 μ_{x+t} の間に、${}_tp_x\mu_{x+t} = a \cdot e^{bt} (a \neq 0, b \neq 0, 0 \leqq t \leqq 2)$ が成り立つとき、1 年以内に $(x+1)$ 歳の者が x 歳の者に先立って死亡する確率を表す式は次のうちどれか。最も適当な記号を選べ。

(A) $\dfrac{ae^b(2be^b + 2ae^b - ae^{2b} - 2b - a)}{2(b^2 + ab - abe^b)}$　(B) $\dfrac{ae^b(2be^b - 2ae^b + ae^{2b} - 2b - a)}{2(b^2 + ab - abe^b)}$

(C) $\dfrac{ae^b(2be^b + 2ae^b - ae^{2b} + 2b - a)}{2(b^2 + ab - abe^b)}$　(D) $\dfrac{ae^b(2be^b + 2ae^b - ae^{2b} - 2b + a)}{2(b^2 + ab - abe^b)}$

(E) $\dfrac{ae^b(2be^b - 2ae^b + ae^{2b} - 2b + a)}{2(b^2 + ab - abe^b)}$　(F) $\dfrac{ae^b(2be^b + 2ae^b - ae^{2b} - 2b - a)}{2(b^2 - ab + abe^b)}$

(G) $\dfrac{ae^b(2be^b - 2ae^b + ae^{2b} - 2b - a)}{2(b^2 - ab + abe^b)}$　(H) $\dfrac{ae^b(2be^b + 2ae^b - ae^{2b} + 2b - a)}{2(b^2 - ab + abe^b)}$

(I) $\dfrac{ae^b(2be^b + 2ae^b - ae^{2b} - 2b + a)}{2(b^2 - ab + abe^b)}$　(J) $\dfrac{ae^b(2be^b - 2ae^b + ae^{2b} - 2b + a)}{2(b^2 - ab + abe^b)}$

(3) 40 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1、保険期間 20 年の養老保険において、チルメル割合が α である全期チルメル式責任準備金を積み立てたところ、第 1 保険年度末の責任準備金が 0 となった。この保険の年払営業保険料の値に最も近いものは次のうちどれか。最も適当な記号を選べ。
ただし、予定新契約費は保険金額比例でチルメル割合 α に等しいものとし、予定集金費は保険料払込のつど営業保険料の 3%、予定維持費は毎年度始に保険金額の 3‰を徴収するものとする。必要であれば、$\ddot{a}_{40:\overline{20|}} = 15.585$、$i = 2.5\%$、$p_{40} = 0.998$ を用いよ。

(A)	0.0452	(B)	0.0454	(C)	0.0456	(D)	0.0458	(E)	0.0460
(F)	0.0462	(G)	0.0464	(H)	0.0466	(I)	0.0468	(J)	0.0470

(4) 死亡解約脱退残存表における残存者数が $l_x = l_0 - ax \ (0 \leqq x \leqq \frac{l_0}{a}, a \neq 0)$ で表わされ、かつ各年齢における解約率 q_x^w が死亡率 q_x の 4 倍という関係にあるとすると、絶対死亡率は、

$$q_x^* = 1 - \frac{l_x - k_1 a}{l_x - k_2 a}$$

と表される。k_1 と k_2 に当てはまる数値を解答せよ。

(5) x 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1、保険期間 n 年の養老保険において、予定死亡率をすべての年齢について q_x から q'_x に変更して平準純保険料式責任準備金を計算したとき、q_x に基づく責任準備金 ${}_tV_{x:\overline{n|}}$ と q'_x に基づく責任準備金 ${}_tV'_{x:\overline{n|}}$ には、

$${}_tV_{x:\overline{n|}} = {}_tV'_{x:\overline{n|}} \quad (0 \leqq t \leqq r \leqq n-2)$$

という関係が成り立っていたとする。このとき、$q'_{x+t} - q_{x+t}$ を表す式は次のうちどれか。最も適当な記号を選べ（$0 \leqq t \leqq r-1$ とし、k は定数とする）。

(A) $\dfrac{k}{a_{x+t:\overline{n-t|}}}$　(B) $\dfrac{k}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}$　(C) $\dfrac{k}{a_{x+t+1:\overline{n-t-1|}}}$　(D) $\dfrac{k}{\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1|}}}$

(E) $\dfrac{k}{a_{x+t-1:\overline{n-t+1|}}}$　(F) $\dfrac{k}{\ddot{a}_{x+t-1:\overline{n-t+1|}}}$　(G) $\dfrac{k}{a_{x+t+2:\overline{n-t-2|}}}$　(H) $\dfrac{k}{\ddot{a}_{x+t+2:\overline{n-t-2|}}}$

(I) $\dfrac{k}{a_{x+t-2:\overline{n-t+2|}}}$　(J) $\dfrac{k}{\ddot{a}_{x+t-2:\overline{n-t+2|}}}$

(6) 次の (A) ～ (E) を値が大きい順に解答せよ。
例: (A) 6%、(B) 5%、(C) 4%、(D) 3%、(E) 2%の場合、解答用紙には
(A) → (B) → (C) → (D) → (E) と記入する。

(A) 転化回数 12 回、年 1.5%の名称利率における実利率

(B) 以下の条件での、ハーディの公式を用いた総資産利回り
年始総資産 71,028 億円
年末総資産 78,490 億円
利息および配当金収入 1,130 億円

(C) $\ddot{a}_{\overline{31}|} = 25.0158$、$\ddot{s}_{\overline{29}|} = 36.5387$ のときの年利

(D) 永久年金現価 $a_{\infty} = 67.1141$ のときの年利

(E) 金融機関で借りた金額を 10 年間で減債基金(注)を積み立てて返済する場合の借入金利率。ただし、減債基金の積立利率は 2.50%、実質的な借入金利率を 0.72%とし、借入金利息の返済と減債基金の積み立ては年 1 回その年末に行われる。
必要であれば、$s_{\overline{10}|}^{(2.50\%)} = 11.2034$、$a_{\overline{10}|}^{(0.72\%)} = 9.6151$ を用いよ。

(注) 減債基金とは元金の返済をせずにその期の利息のみを返済する一方、元金返済のため一定額を別に積み立てたときの積立金のことをいう。

(7) 以下の死亡・就業不能脱退残存表が与えられるとき、(A) から (G) までのうち、3 番目に大きいものの記号を選び、その値（小数点以下第 7 位を四捨五入して小数点第 6 位まで答えよ）とともに解答せよ。

x	l_x^{aa}	d_x^{aa}	i_x	l_x^{ii}	d_x^{ii}	l_x	d_x
45	96,330	276	77	756	13	97,086	289
46	95,977	308	85	820	15	96,797	323
47	95,584	344	94	890	17	96,474	361

(A) q_{45}^{aa} (B) q_{45}^{aa*} (C) $q_{45}^{(i)*}$ (D) q_{45}^{ii} (E) q_{45}^{i} (F) q_{45}^{a} (G) q_{45}^{ai}

(8) 一般的に生命表には大きく分けて以下の 2 つがある。

国民表	… 国民全体について生存・死亡の状況を一定期間観察して作成される生命表
①	… 特定された範囲の生命保険加入者の全体について生存・死亡の状況を一定期間観察して作成される生命表

さらに、①には大きく分けて以下の 4 つがある。

②	… 契約後の一定期間を除外して年齢別に死亡率を算出して示す生命表
総合表	… 除外期間を設けずに契約直後の期間も観察に加えて作成される生命表
③	… 契約直後について各年度毎に死亡率を算出して示す生命表
④	… 契約時の医的選択による死亡率減少の効果が消滅した死亡率を算出して示す生命表

(ア) 上記①～④に当てはまる適切な語句は次のうちどれか。最も適当な記号を選べ。

(A) 標準生命表　(B) 最終表　(C) 截断表　(D) 経験表　(E) 簡易生命表

(F) 統合表　(G) 終局表　(H) 分断表　(I) 選択表　(J) 完全表

(イ) ①が下表のとおりとなっている。55 歳加入、保険料一時払、保険金額1、保険期間 3 年の定期保険について、④を用いた場合の一時払純保険料の値に最も近いものは次のうちどれか。最も適当な記号を選べ。なお、医的選択による死亡率減少の効果は3年で消滅するものとし、予定利率は考慮しないものとする。

$[x]$	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	q_{x+3}	$x+3$
50	2.76 ‰	3.53 ‰	4.30 ‰	5.07 ‰	53
51	3.33	4.10	4.87	5.64	54
52	3.90	4.67	5.44	6.30	55
53	4.47	5.24	6.10	7.03	56
54	5.04	5.90	6.83	7.81	57
55	5.70	6.63	7.61	8.64	58
56	6.43	7.41	8.44	9.51	59
57	7.21	8.24	9.31	10.22	60

(A) 0.01701　(B) 0.01934　(C) 0.01994　(D) 0.02114　(E) 0.02228

(F) 0.02242　(G) 0.02529　(H) 0.02655　(I) 0.02690　(J) 0.02837

問題 2. 40 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1、保険期間 20 年の養老保険において、以下の(1)(2)の時点で延長保険に変更する場合、変更時点からの延長期間を T、変更後の生存保険金額を S とするとき、それぞれの場合について $m \leqq T < m+1$ (年)を満たす整数 m および S (小数点以下第5位を四捨五入して小数点第4位まで答えよ)を解答用紙の所定の欄に記入せよ。必要であれば(付表)に記載された数値を用いよ。

ここで加入後経過 t 年の解約返戻金 ${}_tW = {}_tV - 0.02\dfrac{10-t}{10}$ ($t \leqq 10$、${}_tV$ は加入後経過 t 年の平準純保険料式責任準備金)とし、延長保険変更後の予定維持費は毎年度始に死亡保険金額の 1‰、生存保険金額の 1‰を徴収するものとする。(12 点)

(1) 加入後経過 2 年(t=2)

(2) 加入後経過 7 年(t=7)

問題 3. 次の各問の指示にしたがって、各解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ。
必要であれば(付表)に記載された数値を用いよ。(12 点)

(1) x 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険期間 n 年の逓増定期保険があり、保険金額は、被保険者が第1保険年度に死亡する場合は 1、第 2 保険年度に死亡する場合は2、以下同様に毎年 1 ずつ増加する。この保険の年払純保険料を P_1 とする。その P_1 を計算基数を用いて表わすと、

$$P_1 = \frac{\boxed{①}}{\boxed{②}}$$

①および②に当てはまる簡潔な算式を示せ。

(2) x 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険期間 n 年の逓減定期保険があり、保険金額は、被保険者が第 1 保険年度に死亡する場合は n、第 2 保険年度に死亡する場合は $n-1$、以下同様に毎年 1 ずつ減少し、第 n 年度に死亡する場合 1 となる。この保険の年払純保険料を P_2 とする。その P_2 を計算基数を用いて表わすと、

$$P_2 = \frac{\boxed{③}}{\boxed{④}}$$

③および④に当てはまる簡潔な算式を示せ。

(3) ③ $= 53{,}932$ 、 ④ $= 1{,}081{,}891$ 、 $M_x - M_{x+n} = 5{,}737$ 、n=25 年とするとき、P_1 の値を解答せよ(小数点以下第 6 位を四捨五入して小数点第 5 位まで答えよ)。

(4) (1)で示した保険の第 t 年度末平準純保険料式責任準備金を計算基数を用いて示せ。必要であれば、P_1 を用いよ。

(5) x =40 歳、n =10 年とするとき、(1)で示した保険の平準純保険料式責任準備金が最大となるのは第$\boxed{}$年度末である。$\boxed{}$に当てはまる<u>整数</u>を解答せよ。

問題 4. 以下の①～⑬に当てはまる最も適当な語句または1つの記号(例: $P_{x:\overline{n|}}$)を解答用紙の所定の欄に記入せよ。なお、①～⑬については、番号が同じである空欄に同じ語句または同じ1つの記号が入るものとする。(13 点)

x 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額1、保険期間 n 年の養老保険において、責任準備金をチルメル期間 m 年、チルメル割合 α のチルメル式で積み立てるとき、保険料が平準純保険料式で責任準備金を積み立てる場合と同様に、$\boxed{①}$保険料と$\boxed{②}$保険料に分解できることを証明する。

まず、第 1 年度の純保険料を P_1、第 2 年度以降第 m 年度までの純保険料を P_2 とすると、
$1 \leqq t \leqq m$ の場合、チルメル式責任準備金は

$${}_tV^{[mz]}_{x:\overline{n|}} = \boxed{③} - \{P_2 \cdot \boxed{④} + P_{x:\overline{n|}}(\boxed{⑤} - \boxed{④})\}$$ と表される。

$P_2 = P_{x:\overline{n|}} + \dfrac{\alpha}{\boxed{⑥}}$ であるから、${}_tV^{[mz]}_{x:\overline{n|}} = \boxed{③} - P_{x:\overline{n|}} \cdot \boxed{⑤} - \dfrac{\alpha}{\boxed{⑥}} \cdot \boxed{④}$ ……(ア)

$2 \leqq t \leqq m$ のとき、これを変形し、${}_{t-1}V^{[mz]}_{x:\overline{n|}} = \boxed{⑦} - P_{x:\overline{n|}} \cdot \boxed{⑧} - \dfrac{\alpha}{\boxed{⑥}} \cdot \boxed{⑨}$

$$= v \cdot \boxed{⑩} + v \cdot \boxed{⑪} \cdot \boxed{③} - P_{x:\overline{n|}}(1 + v \cdot \boxed{⑪} \cdot \boxed{⑤}) - \frac{\alpha}{\boxed{⑥}}(1 + v \cdot \boxed{⑪} \cdot \boxed{④})$$

とし、これを(ア)の両辺に $v \cdot \boxed{⑪}$ を乗じたものから引くと、

$$v \cdot \boxed{⑪}\,{}_tV^{[mz]}_{x:\overline{n|}} - {}_{t-1}V^{[mz]}_{x:\overline{n|}} = P_{x:\overline{n|}} - v \cdot \boxed{⑩} + \frac{\alpha}{\boxed{⑥}} = P_2 - v \cdot \boxed{⑩} \text{……(イ)}$$

となり、$P_2 = v \cdot \boxed{⑩}(1 - {}_tV^{[mz]}_{x:\overline{n|}}) + (v \cdot {}_tV^{[mz]}_{x:\overline{n|}} - {}_{t-1}V^{[mz]}_{x:\overline{n|}})$
となるが、右辺の第 1 項は$\boxed{①}$保険料、第 2 項は$\boxed{②}$保険料を表していることがわかる。

$t=1$ のときについても(イ)式において、${}_0V^{[mz]}_{x:\overline{n|}} = -\alpha$ であることから、

$$v \cdot \boxed{⑫} \cdot {}_1V^{[mz]}_{x:\overline{n|}} + \alpha = P_{x:\overline{n|}} - v \cdot \boxed{⑬} + \frac{\alpha}{\boxed{⑥}}$$

となる。ここで $P_1 = P_{x:\overline{n|}} + \dfrac{\alpha}{\boxed{⑥}} - \alpha$ を用いると、

$$P_1 = P_{x:\overline{n|}} + \frac{\alpha}{\boxed{⑥}} - \alpha = v \cdot \boxed{⑬}(1 - {}_1V^{[mz]}_{x:\overline{n|}}) + v \cdot {}_1V^{[mz]}_{x:\overline{n|}}$$

が得られ、このときも右辺の第 1 項は$\boxed{①}$保険料、第 2 項は$\boxed{②}$保険料を表している。

問題 5. 次の各問の指示にしたがって、各解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ((2)は汎用の解答用紙に問題番号を記入して使用すること)。(15 点)

X 歳の死力が $\mu_X = A + Bc^X$ (A, B, c は定数で、$A, B > 0, c > 1$)と表されるものとする。

(1) 次のとおり、3 人の被保険者(x)、(y)、(z)を対象とする、保険料連続払終身払込、保険金即時払、保険金額 1 の連生終身保険を 2 種類考える。

(a) 3 人のうちいずれかが最初に死んだときに保険金を支払い、保険契約は消滅する。

(b) 3 人のうちいずれかが最初に死んだときに保険契約は消滅するが、保険金は(x)が最初に死んだ場合にのみ支払う。(y)または (z)が最初に死んだ場合には保険金は支払わない。

(b)の純保険料 $P^{(b)}$ を、(a)の純保険料 $P^{(a)}$ の1次式で表すと、

$$P^{(b)} = \boxed{\quad ① \quad} \times P^{(a)} + \boxed{\quad ② \quad}$$

①および②に当てはまる簡潔な算式を示せ。

(2) ②= 0 の場合に、次の(ア)および(イ)が成り立つことを証明せよ。

(ア) 共存確率について、${}_t p_{yz} = {}_t p_{xx}$ となる(つまり、y と z の均等年齢は x)

(イ) 連続払の連生終身年金の年金現価について、$\bar{a}_{\overline{xyz}} \geqq \bar{a}_{\overline{xxx}}$ となる

以　上

（付表） 計算基数表 【問題 2、問題 3 共通】

x	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x
40	53,536	1,557,511	29,699,249	82	30,522	1,118,705
41	52,663	1,503,975	28,141,738	89	30,440	1,088,183
42	51,796	1,451,312	26,637,763	96	30,351	1,057,743
43	50,935	1,399,516	25,186,451	104	30,255	1,027,392
44	50,077	1,348,581	23,786,935	113	30,151	997,137
45	49,224	1,298,504	22,438,354	122	30,038	966,986
46	48,375	1,249,280	21,139,850	130	29,916	936,948
47	47,530	1,200,905	19,890,570	139	29,786	907,032
48	46,689	1,153,375	18,689,665	148	29,647	877,246
49	45,852	1,106,686	17,536,290	157	29,499	847,599
50	45,017	1,060,834	16,429,604	168	29,342	818,100
51	44,183	1,015,817	15,368,770	181	29,174	788,758
52	43,350	971,634	14,352,953	195	28,993	759,584
53	42,514	928,284	13,381,319	212	28,798	730,591
54	41,673	885,770	12,453,035	232	28,586	701,793
55	40,826	844,097	11,567,265	253	28,354	673,207
56	39,969	803,271	10,723,168	277	28,101	644,853
57	39,102	763,302	9,919,897	301	27,824	616,752
58	38,223	724,200	9,156,595	325	27,523	588,928
59	37,333	685,977	8,432,395	350	27,198	561,405
60	36,431	648,644	7,746,418	367	26,848	534,207

生 保 数 理 （ 解答例 ）

問題 1.

<table>
<tr><td>(1)</td><td>①</td><td>(D)</td><td>②</td><td>(I)</td><td>③</td><td>(F)</td><td>④</td><td>(H)</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="8">(A)</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td colspan="8">(I)</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td>k_1</td><td>0.6</td><td>k_2</td><td colspan="5">0.4</td></tr>
<tr><td>(5)</td><td colspan="8">(D)</td></tr>
<tr><td>(6)</td><td colspan="8">(B) → (A) → (C) → (D) → (E)</td></tr>
<tr><td>(7)</td><td>記号</td><td>(F)</td><td>値</td><td colspan="5">0.002872</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(8)</td><td>(ア)</td><td>① (D)</td><td>②</td><td>(C)</td><td>③</td><td>(I)</td><td>④</td><td>(G)</td></tr>
<tr><td>(イ)</td><td colspan="7">(D)</td></tr>
</table>

(1) 現価率vを用いて、それぞれの保険給付現価、生命年金現価を確率論的に表示する。

$$A_{x:\overline{n}|} = v \times q_x + v^2 \times {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + v^n \times {}_{n-1|}q_x + v^n \times {}_np_x$$

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = 0 \times q_x + 0 \times {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + 0 \times {}_{n-1|}q_x + v^n \times {}_np_x$$

$$(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} = v \times q_x + 2v^2 \times {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + nv^n \times {}_{n-1|}q_x + 0 \times {}_np_x$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = 0 \times q_x + v \times {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + (v + 2v^2 + \cdots + (n-1)v^{n-1}) \times {}_{n-1|}q_x + (v + 2v^2 + \cdots + (n-1)v^{n-1} + nv^n) \times {}_np_x$$

$(Ia)_{x:\overline{n}|}$ の第 t 項 $\left(t=1,2,\cdots,n,n+1\right)$ の係数を S_t として、これを計算すると、

$$
\begin{array}{rl}
S_t = & v + 2v^2 + \cdots + (t-1)v^{t-1} \\
vS_t = & \quad\;\; v^2 + \cdots + (t-2)v^{t-1} + (t-1)v^t \\
\hline
(1-v)S_t = & v + v^2 + \cdots + \quad v^{t-1} - (t-1)v^t \\
= & \dfrac{v(1-v^{t-1})}{1-v} - (t-1)v^t
\end{array}
$$

$$
S_t = \frac{v(1-v^{t-1})}{(1-v)^2} - \frac{(t-1)v^t}{1-v} = \frac{1-d}{d^2} - \frac{1}{d^2}v^t - \frac{1}{d}tv^t + \frac{1}{d}v^t = \frac{1-d}{d^2} - \frac{1-d}{d^2}v^t - \frac{1}{d}tv^t
$$

となる。

ここで、この式の第２項および第３項に現れる v^t と tv^t については、先述の保険給付現価を組み合わせた算式の第 t 項 $\left(t=1,2,\cdots,n,n+1\right)$ の係数として表すことができる。

（S_t の式の第２項に現れる v^t について）

$$
\begin{aligned}
& v \times q_x + v^2 \times {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + v^n \times {}_{n-1|}q_x + v^{n+1} \times {}_n p_x \\
= & v \times q_x + v^2 \times {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + v^n \times {}_{n-1|}q_x + v^n \times {}_n p_x - (1-v) \times v^n \times {}_n p_x \\
= & v \times q_x + v^2 \times {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + v^n \times {}_{n-1|}q_x + v^n \times {}_n p_x - (1-v) \times (0 \times q_x + 0 \times {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + 0 \times {}_{n-1|}q_x + v^n \times {}_n p_x) \\
= & A_{x:\overline{n}|} - (1-v) \times A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}
\end{aligned}
$$

⇒よって v^t は、$A_{x:\overline{n}|} - (1-v) \times A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$ の第 t 項 $\left(t=1,2,\cdots,n,n+1\right)$ の係数として表せる

（S_t の式の第３項に現れる tv^t について）

$$
\begin{aligned}
& v \times q_x + 2v^2 \times {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + nv^n \times {}_{n-1|}q_x + (n+1)v^{n+1} \times {}_n p_x \\
= & v \times q_x + 2v^2 \times {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + nv^n \times {}_{n-1|}q_x + 0 \times {}_n p_x + (n+1)v \times v^n \times {}_n p_x \\
= & v \times q_x + 2v^2 \times {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + nv^n \times {}_{n-1|}q_x + 0 \times {}_n p_x + (n+1)v \times (0 \times q_x + 0 \times {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + 0 \times {}_{n-1|}q_x + v^n \times {}_n p_x) \\
= & (IA)_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} + (n+1)v \times A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}
\end{aligned}
$$

⇒よって tv^t は、$(IA)_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} + (n+1)v \times A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$ の第 t 項 $\left(t=1,2,\cdots,n,n+1\right)$ の係数として表せる

また、S_t の式の第１項はtによらない定数項となっているが、

$1 = 1\times q_x + 1\times {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + 1\times {}_{n-1|}q_x + 1\times {}_n p_x$ であるから、

$$\frac{1-d}{d^2} = \frac{1-d}{d^2}\times q_x + \frac{1-d}{d^2}\times {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + \frac{1-d}{d^2}\times {}_{n-1|}q_x + \frac{1-d}{d^2}\times {}_n p_x$$

と表すことができ、発生確率$\{q_x,\ {}_{1|}q_x,\ \cdots\cdot,\ {}_{n-1|}q_x,\ {}_n p_x\}$を用いて、この定数の平均値を計算しても、やはり同じ定数となる。

従って、確率変数$S_t\ (t = 1,2,\cdots,n,n+1)$に対して、第１項、第２項および第３項の項別に発生確率$\{q_x,\ {}_{1|}q_x,\ \cdots\cdot,\ {}_{n-1|}q_x,\ {}_n p_x\}$を用いて平均値を計算して、最後にその和をとることにより、

$$\begin{aligned}(Ia)_{x:\overline{n}|} &= \frac{1-d}{d^2} - \frac{1-d}{d^2}(A_{x:\overline{n}|} - (1-v)\times A^{\ \ 1}_{x:\overline{n}|}) - \frac{1}{d}((IA)^{1}_{x:\overline{n}|} + (n+1)v\times A^{\ \ 1}_{x:\overline{n}|}) \\ &= \frac{1-d}{d^2} - \frac{1-d}{d^2}A_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{d}(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} + \frac{v-(n+1)v}{d}A^{\ \ 1}_{x:\overline{n}|} \\ &= \frac{1-d}{d^2} - \frac{1-d}{d^2}A_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{d}(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} - \frac{1-d}{d}nA^{\ \ 1}_{x:\overline{n}|}\end{aligned}$$

という関係式を作ることができる。

解答：①・・(D)　②・・(I)　③・・(F)　④・・(H)

(2) ${}_tp_x\mu_{x+t}=-\frac{d}{dt}{}_tp_x=a\cdot e^{bt}$ であるから、${}_tp_x=-\left(k+\frac{a}{b}e^{bt}\right)$ （k は定数）

$t=0$ を代入すると、$k+\frac{a}{b}=-1$ $\therefore k=-\frac{a}{b}-1$ ${}_tp_x=1+\frac{a}{b}-\frac{a}{b}e^{bt}$

従って、求める確率は、

$$\int_0^1{}_tp_x\cdot{}_tp_{x+1}\cdot\mu_{x+1+t}dt=\int_0^1{}_tp_x\cdot\frac{{}_{t+1}p_x}{p_x}\cdot\mu_{x+t+1}dt=\int_0^1\frac{1+\frac{a}{b}-\frac{a}{b}e^{bt}}{1+\frac{a}{b}-\frac{a}{b}e^{b}}\cdot ae^{b(t+1)}dt$$

$$=\frac{ae^b}{1+\frac{a}{b}-\frac{a}{b}e^b}\int_0^1\left(e^{bt}+\frac{a}{b}e^{bt}-\frac{a}{b}e^{2bt}\right)dt=\frac{ae^b}{1+\frac{a}{b}-\frac{a}{b}e^b}\left[\frac{1}{b}e^{bt}+\frac{a}{b^2}e^{bt}-\frac{a}{2b^2}e^{2bt}\right]_0^1$$

$$=\frac{ae^b}{1+\frac{a}{b}-\frac{a}{b}e^b}\left(\frac{1}{b}e^b+\frac{a}{b^2}e^b-\frac{a}{2b^2}e^{2b}-\frac{1}{b}-\frac{a}{b^2}+\frac{a}{2b^2}\right)=\frac{ae^b(2be^b+2ae^b-ae^{2b}-2b-a)}{2(b^2+ab-abe^b)}$$

解答：(A)

[参考1]

なお、参考までに、1年以内に x 歳の者が $(x+1)$ 歳の者に先立って死亡する確率は、

$$\int_0^1{}_tp_x\cdot{}_tp_{x+1}\cdot\mu_{x+t}dt=\int_0^1{}_tp_x\cdot\frac{{}_{t+1}p_x}{p_x}\cdot\mu_{x+t}dt=\int_0^1\frac{1+\frac{a}{b}-\frac{a}{b}e^{b(t+1)}}{1+\frac{a}{b}-\frac{a}{b}e^{b}}\cdot ae^{bt}dt$$

$$=\frac{a}{1+\frac{a}{b}-\frac{a}{b}e^b}\int_0^1\left(e^{bt}+\frac{a}{b}e^{bt}-\frac{ae^b}{b}e^{2bt}\right)dt=\frac{a}{1+\frac{a}{b}-\frac{a}{b}e^b}\left[\frac{1}{b}e^{bt}+\frac{a}{b^2}e^{bt}-\frac{ae^b}{2b^2}e^{2bt}\right]_0^1$$

$$=\frac{a}{1+\frac{a}{b}-\frac{a}{b}e^b}\left(\frac{1}{b}e^b+\frac{a}{b^2}e^b-\frac{ae^b}{2b^2}e^{2b}-\frac{1}{b}-\frac{a}{b^2}+\frac{ae^b}{2b^2}\right)=\frac{a(2be^b+3ae^b-ae^{3b}-2b-2a)}{2(b^2+ab-abe^b)}$$

また、1年後にx歳の者も$(x+1)$歳の者も共に生存している確率は、

$$p_x \cdot p_{x+1} = {}_2p_x = 1+\frac{a}{b}-\frac{a}{b}e^{2b} = \frac{1}{1+\frac{a}{b}-\frac{a}{b}e^{b}}\cdot\left(1+\frac{a}{b}-\frac{a}{b}e^{2b}\right)\cdot\left(1+\frac{a}{b}-\frac{a}{b}e^{b}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\frac{a}{b}-\frac{a}{b}e^{b}}\cdot\left(1+\frac{2a}{b}+\frac{a^2}{b^2}-\frac{a}{b}e^{2b}-\frac{a^2}{b^2}e^{2b}+\frac{a^2}{b^2}e^{3b}-\frac{a}{b}e^{b}-\frac{a^2}{b^2}e^{b}\right)$$

$$= \frac{2b^2+4ab+2a^2-2abe^{2b}-2a^2e^{2b}+2a^2e^{3b}-2abe^{b}-2a^2e^{b}}{2(b^2+ab-abe^{b})}$$

問題の「1年以内に〜死亡する」事象とこれら2つの事象は互いに排反であり、かつ、そのいずれかが起こりえることから、3つの確率の和は、1になるはずである。

実際に計算してみると、

$$\frac{ae^{b}(2be^{b}+2ae^{b}-ae^{2b}-2b-a)}{2(b^2+ab-abe^{b})}+\frac{a(2be^{b}+3ae^{b}-ae^{3b}-2b-2a)}{2(b^2+ab-abe^{b})}$$

$$+\frac{2b^2+4ab+2a^2-2abe^{2b}-2a^2e^{2b}+2a^2e^{3b}-2abe^{b}-2a^2e^{b}}{2(b^2+ab-abe^{b})}$$

$$=\frac{1}{2(b^2+ab-abe^{b})}\cdot$$

$$\{(2abe^{2b}+2a^2e^{2b}-a^2e^{3b}-2abe^{b}-a^2e^{b})+$$

$$(2abe^{b}+3a^2e^{b}-a^2e^{3b}-2ab-2a^2)+$$

$$(2b^2+4ab+2a^2-2abe^{2b}-2a^2e^{2b}+2a^2e^{3b}-2abe^{b}-2a^2e^{b})\}$$

$$=\frac{2(b^2+ab-abe^{b})}{2(b^2+ab-abe^{b})}=1$$

と、確率の和が1であることが確認できる。

［参考2］

問題の「1年以内に$(x+1)$歳の者がx歳の者に先立って死亡する」事象は、つぎの2つの事象に分解することができる。

事象A：「1年以内に$(x+1)$歳の者は死亡するが、x歳の者は1年後に生存している」

事象B：「1年以内にx歳の者も$(x+1)$歳の者も死亡し、その順番が$(x+1)$歳の者の方が先」

この２つの事象の確率を計算すると、

（事象Ａの確率）

$$p_x \cdot \int_0^1 {}_t p_{x+1} \cdot \mu_{x+1+t} dt = p_x \cdot \int_0^1 \frac{{}_{t+1}p_x}{p_x} \cdot \mu_{x+t+1} dt = \int_0^1 {}_{t+1}p_x \cdot \mu_{x+t+1} dt$$

$$= \int_0^1 ae^{b(t+1)} dt = ae^b \cdot \left[\frac{1}{b}e^{bt}\right]_0^1 = \frac{ae^b}{b}\left(e^b - 1\right)$$

$$= \frac{2ae^b(e^b-1)(b+a-ae^b)}{2(b^2+ab-abe^b)}$$

（事象Ｂの確率）

$$\int_0^1 {}_t p_x \cdot {}_t q_{x+1} \cdot \mu_{x+t} dt = \int_0^1 {}_t p_x \cdot \left(1 - {}_t p_{x+1}\right) \cdot \mu_{x+t} dt = \int_0^1 {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} \cdot \left(1 - \frac{{}_{t+1}p_x}{p_x}\right) dt$$

$$= \int_0^1 ae^{bt} \cdot \left(1 - \frac{1 + \frac{a}{b} - \frac{a}{b}e^{b(t+1)}}{1 + \frac{a}{b} - \frac{a}{b}e^b}\right) dt = \frac{1}{1 + \frac{a}{b} - \frac{a}{b}e^b} \int_0^1 ae^{bt} \cdot \left(-\frac{a}{b}e^b + \frac{a}{b}e^{b(t+1)}\right) dt$$

$$= \frac{\frac{a^2e^b}{b}}{1 + \frac{a}{b} - \frac{a}{b}e^b} \int_0^1 \left(-e^{bt} + e^{2bt}\right) dt = \frac{2a^2be^b}{2(b^2+ab-abe^b)} \left[-\frac{1}{b}e^{bt} + \frac{1}{2b}e^{2bt}\right]_0^1$$

$$= \frac{2a^2be^b}{2(b^2+ab-abe^b)} \left(-\frac{1}{b}e^b + \frac{1}{2b}e^{2b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{2b}\right)$$

$$= \frac{ae^b}{2(b^2+ab-abe^b)} \left(-2ae^b + ae^{2b} + a\right)$$

事象Ａと事象Ｂは排反であるため、上記の２つの確率を合計すると選択肢**(A)**の算式と一致するはずであり、実際に計算することにより確認することができる。

$$\frac{2ae^b(e^b-1)(b+a-ae^b)}{2(b^2+ab-abe^b)} + \frac{ae^b}{2(b^2+ab-abe^b)}\left(-2ae^b + ae^{2b} + a\right)$$

$$= \frac{ae^b}{2(b^2+ab-abe^b)} \cdot \left(2(e^b-1)(b+a-ae^b) - 2ae^b + ae^{2b} + a\right)$$

$$= \frac{ae^b}{2(b^2+ab-abe^b)} \cdot \left(2be^b + 2ae^b - 2ae^{2b} - 2b - 2a + 2ae^b - 2ae^b + ae^{2b} + a\right)$$

$$= \frac{ae^b}{2(b^2+ab-abe^b)} \cdot \left(2be^b + 2ae^b - ae^{2b} - 2b - a\right)$$

(3) 第１保険年度末の全期チルメル式責任準備金がゼロとなる場合、$\alpha = P_{x+1:\overline{n-1}|} - vq_x$ となる。

求める年払営業保険料を P^*、予定集金費率を β、予定維持費率を r とすると、収支相等の原則より、

$$P^* \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + r \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \beta \cdot P^* \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$ が成り立つ。

ここで、$P_{x+1:\overline{n-1}|} = \dfrac{1}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} - d$、$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + vp_x \cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}$ を用いると、

$$P^* \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + \frac{1}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} - d - vq_x + r \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \beta \cdot P^* \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$P^* \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{vp_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1} - d - vq_x + r \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \beta \cdot P^* \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$\therefore P^* = \frac{1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \dfrac{vp_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1} - d - vq_x + r \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{(1-\beta) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

これより数値を代入して、

$$P^* = \frac{1 - (0.025/1.025) \cdot 15.585 + \dfrac{(1/1.025) \cdot 0.998}{15.585 - 1} - (0.025/1.025) - (1/1.025)(1 - 0.998) + 0.003 \cdot 15.585}{(1 - 0.03) \cdot 15.585}$$

$P^* = 0.0467704\cdots$　$\Rightarrow$　よって選択肢の中で最も近い値は「(Ｉ)0.0468」となる。

解答：(Ｉ)

(4) $w_x = l_x q_x^w = l_x \cdot 4q_x = 4d_x$ であるから、

$l_{x+1} = l_x - d_x - w_x = l_x - d_x - 4d_x = l_x - 5d_x$ となり、$d_x = \dfrac{l_x - l_{x+1}}{5} = \dfrac{a}{5}$

したがって、$w_x = 4d_x = \dfrac{4}{5}a$ となり、これを $q_x^* = \dfrac{d_x}{l_x - \dfrac{w_x}{2}}$ に代入すると、

$q_x^* = \dfrac{\dfrac{a}{5}}{l_x - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{5}a} = 1 - \dfrac{l_x - \dfrac{3}{5}a}{l_x - \dfrac{2}{5}a}$ となることから、$k_1 = \dfrac{3}{5} = 0.6$、$k_2 = \dfrac{2}{5} = 0.4$ となる。

解答：$k_1 = 0.6$、$k_2 = 0.4$

(5) 将来法の考え方で平準純保険料式責任準備金を表すと、

${}_tV_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$ であり、これは次のように変形できる。

$${}_tV_{x:\overline{n}|} = 1 - (P_{x:\overline{n}|} + d)\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

今、$0 \leqq t \leqq r \leqq n\text{-}2$ において、${}_tV_{x:\overline{n}|} = {}_tV'_{x:\overline{n}|}$ が成り立っていることから、

$$\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} \qquad (0 \leqq t \leqq r)$$

となり、

$$\frac{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\ddot{a}'_{x+1:\overline{n-1}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} = \frac{\ddot{a}'_{x+2:\overline{n-2}|}}{\ddot{a}_{x+2:\overline{n-2}|}} = \cdots = \frac{\ddot{a}'_{x+r:\overline{n-r}|}}{\ddot{a}_{x+r:\overline{n-r}|}} = c \qquad (c \text{ は定数})$$

と表すことができる。

(ただし、$r=n\text{-}1$ の時は $\dfrac{\ddot{a}'_{x+n-1:\overline{1}|}}{\ddot{a}_{x+n-1:\overline{1}|}} = 1$ となるためこの場合は除外し、$r \leqq n\text{-}2$ である)

この中の続いている 2 項について、

$$c = \frac{\ddot{a}'_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}}{\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}} = \frac{\ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}} = \frac{1 + vp'_{x+t}\ddot{a}'_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}}{1 + vp_{x+t}\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}} \qquad (0 \leqq t \leqq r\text{-}1)$$

であることから、

$$c(1 + vp_{x+t}\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}) = 1 + vp'_{x+t}\ddot{a}'_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} = 1 + vp'_{x+t}c\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}$$

$$cv(p_{x+t} - p'_{x+t})\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} = 1 - c$$

$p_{x+t} - p'_{x+t} = q'_{x+t} - q_{x+t}$ であるから、$\dfrac{1-c}{cv} = k$ とすれば、

$$q'_{x+t} - q_{x+t} = \frac{k}{\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1|}}}$$

解答：(D)

(6) (A) 実利率 $= \left(1 + \dfrac{0.015}{12}\right)^{12} - 1 = 0.015103\cdots$

(B) ハーディの公式より、総資産利回り $= \dfrac{2 \times 1{,}130}{71{,}028 + 78{,}490 - 1{,}130} = 0.015230\cdots$

(C) $a_{\overline{30|}} = \ddot{a}_{\overline{31|}} - 1 = 25.0158 - 1 = 24.0158$

$s_{\overline{30|}} = \ddot{s}_{\overline{29|}} + 1 = 36.5387 + 1 = 37.5387$

$\dfrac{1}{a_{\overline{30|}}} - \dfrac{1}{s_{\overline{30|}}} = i$ より

年利 $i = \dfrac{1}{24.0158} - \dfrac{1}{37.5387} = 0.015000\cdots$

(D) $a_{\infty} = \dfrac{1}{i} = 67.1141$ である。よって、年利 $i = \dfrac{1}{67.1141} = 0.014899\cdots$

(E) 借入金利率 i %で借りた金額を T とすると、毎年の返済額は $T \cdot i + T \cdot \dfrac{1}{s_{\overline{10|}}^{(2.50\%)}}$

これが、0.72%による元利均等返済方法による毎年の返済額と等しいことから、

$$T \cdot \frac{1}{a_{\overline{10|}}^{(0.72\%)}} = T \cdot i + T \cdot \frac{1}{s_{\overline{10|}}^{(2.50\%)}}$$

したがって $i = \dfrac{1}{a_{\overline{10|}}^{(0.72\%)}} - \dfrac{1}{s_{\overline{10|}}^{(2.50\%)}} = \dfrac{1}{9.6151} - \dfrac{1}{11.2034} = 0.014744\cdots$

解答：(B)→(A)→(C)→(D)→(E)

(7) (A) $q_{45}^{aa}=\dfrac{d_{45}^{aa}}{l_{45}^{aa}}=\dfrac{276}{96{,}330}=0.0028651\cdots$

(B) $q_{45}^{aa*}=\dfrac{d_{45}^{aa}}{l_{45}^{aa}-\dfrac{i_{45}}{2}}=\dfrac{276}{96{,}330-\dfrac{77}{2}}=0.0028662\cdots$

(C) $q_{45}^{(i)*}=\dfrac{i_{45}}{l_{45}^{aa}-\dfrac{d_{45}^{aa}}{2}}=\dfrac{77}{96{,}330-\dfrac{276}{2}}=0.0008004\cdots$

(D) $q_{45}^{ii}=\dfrac{d_{45}^{ii}}{l_{45}^{ii}}=\dfrac{13}{756}=0.0171957\cdots$

(E) $q_{45}^{i}=\dfrac{d_{45}^{ii}}{l_{45}^{ii}+\dfrac{i_{45}}{2}}=\dfrac{13}{756+\dfrac{77}{2}}=0.0163624\cdots$

(F) $q_{45}^{a}=\dfrac{d_{45}^{aa}+\dfrac{1}{2}i_{45}q_{45}^{i}}{l_{45}^{aa}}=\dfrac{276+\dfrac{1}{2}\cdot 77\cdot 0.0163624}{96{,}330}=0.0028716\cdots$

(G) $q_{45}^{ai}=\dfrac{d_{45}^{ii}-l_{45}^{ii}q_{45}^{i}}{l_{45}^{aa}}=\dfrac{13-756\cdot 0.0163624}{96{,}330}=0.0000065\cdots$

大きい順に並べると、(D),(E),(F),(B),(A),(C),(G)ゆえに 3 番目に大きいのは(F)のq_{45}^{a}である。値は小数第7位を四捨五入し小数第6位まで求めて0.002872となる。

解答：(F)、0.002872

(8) (ア) ①‥(D)　②‥(C)　③‥(I)　④‥(G)

(イ) 一時払純保険料＝6.30‰＋（1-6.30‰）×7.03‰

＋（1-6.30‰）×（1-7.03‰）×7.81‰＝0.020991…

⇒　よって選択肢の中で最も近い値は「(D)0.02114」となる。

解答：(D)

問題 2.

(1)	m	16	S	0
(2)	m	13	S	0.3035

(1) 経過 2 年目の責任準備金を求めると

$$ {}_2V = \frac{M_{42} - M_{60} + D_{60}}{D_{42}} - \frac{M_{40} - M_{60} + D_{60}}{N_{40} - N_{60}} \cdot \frac{N_{42} - N_{60}}{D_{42}} $$

$$ = \frac{30{,}351 - 26{,}848 + 36{,}431}{51{,}796} - \frac{30{,}522 - 26{,}848 + 36{,}431}{1{,}557{,}511 - 648{,}644} \cdot \frac{1{,}451{,}312 - 648{,}644}{51{,}796} $$

$= 0.0871722\cdots$

ゆえに解約返戻金は

$$ {}_2W = 0.087172 - 0.02 \cdot \frac{10-2}{10} = 0.071172 $$

ここで、延長期間 k 年延長定期保険の保険料を $P_1(k)$ とすると

$$ P_1(18) = A_{\substack{1\\42:\overline{18}|}} + 0.001 \cdot \ddot{a}_{42:\overline{18}|} = \frac{M_{42} - M_{60}}{D_{42}} + 0.001 \cdot \frac{N_{42} - N_{60}}{D_{42}} $$

$$ = \frac{30{,}351 - 26{,}848}{51{,}796} + 0.001 \cdot \frac{1{,}451{,}312 - 648{,}644}{51{,}796} = 0.0831274\cdots $$

より ${}_2W < P_1(18)$ となる。

よって生存保険金額は $S = 0$ となる。

次に $P_1(17) = 0.075649$ より、${}_2W < P_1(17)$

さらに $P_1(16) = 0.068637$ より、${}_2W > P_1(16)$

よって $P_1(16) < {}_2W < P_1(17)$ より、延長期間 T は $16 < T < 17$ を満たす期間となる。

m は $m \leqq T < m+1$ を満たす整数であるため、$m = 16$ が求められる。

解答：$m = 16$、$S = 0$

(2) 経過 7 年目の責任準備金を求めると

$$ {}_7V = \frac{M_{47} - M_{60} + D_{60}}{D_{47}} - \frac{M_{40} - M_{60} + D_{60}}{N_{40} - N_{60}} \cdot \frac{N_{47} - N_{60}}{D_{47}} $$

$$ = \frac{29{,}786 - 26{,}848 + 36{,}431}{47{,}530} - \frac{30{,}522 - 26{,}848 + 36{,}431}{1{,}557{,}511 - 648{,}644} \cdot \frac{1{,}200{,}905 - 648{,}644}{47{,}530} $$

$$ = 0.3155844\cdots $$

ゆえに解約返戻金は

$$ {}_7W = 0.315584 - 0.02 \cdot \frac{10-7}{10} = 0.309584 $$

ここで、延長期間 k 年延長定期保険の保険料を $P_2(k)$ とすると

$$ P_2(13) = A_{\overset{1}{47:\overline{13}|}} + 0.001 \cdot \ddot{a}_{47:\overline{13}|} = \frac{M_{47} - M_{60}}{D_{47}} + 0.001 \cdot \frac{N_{47} - N_{60}}{D_{47}} $$

$$ = \frac{29{,}786 - 26{,}848}{47{,}530} + 0.001 \cdot \frac{1{,}200{,}905 - 648{,}644}{47{,}530} = 0.0734328\cdots $$

ゆえに ${}_7W > P_2(13)$ となるから T=13 となり求める m も 13 となる。

ここで、求める生存保険金額を S とすると

$$ S = \frac{{}_7W - A_{\overset{1}{47:\overline{13}|}} - 0.001 \cdot \ddot{a}_{47:\overline{13}|}}{A_{47:\overset{1}{\overline{13}|}} + 0.001 \cdot \ddot{a}_{47:\overline{13}|}} = \frac{0.309584 - \dfrac{M_{47} - M_{60}}{D_{47}} - 0.001 \cdot \dfrac{N_{47} - N_{60}}{D_{47}}}{\dfrac{D_{60}}{D_{47}} + 0.001 \cdot \dfrac{N_{47} - N_{60}}{D_{47}}} $$

$$ = \frac{0.309584 - \dfrac{29{,}786 - 26{,}848}{47{,}530} - 0.001 \dfrac{1{,}200{,}905 - 648{,}644}{47{,}530}}{\dfrac{36{,}431}{47{,}530} + 0.001 \cdot \dfrac{1{,}200{,}905 - 648{,}644}{47{,}530}} = 0.303495\cdots $$

よって、小数第 5 位を四捨五入し小数第 4 位まで求めて 0.3035 となる。

解答：m=13、 $S = 0.3035$

問題 3.

(1)	①	$R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}$
	②	$N_x - N_{x+n}$
(2)	③	$nM_x - R_{x+1} + R_{x+n+1}$
	④	$N_x - N_{x+n}$
(3)	0.08802	
(4)	${}_tV_{x:\overline{n}\rvert} = \dfrac{R_{x+t} - R_{x+n} - nM_{x+n} + tM_{x+t}}{D_{x+t}} - P_1 \cdot \dfrac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}$	
(5)	6	

(1) x 歳の被保険者が、第 1 保険年度に死亡する場合は保険金 1 を、第 2 保険年度に死亡する場合は保険金 2 を、以下同様に死亡に対する保険金（期末払）が毎年 1 ずつ増加する逓増定期保険の年払純保険料を P_1 とする。その P_1 を計算基数を用いて表わすと

$$P_1 = \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

解答：① $R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}$、② $N_x - N_{x+n}$

(2) x 歳の被保険者が、第 1 保険年度に死亡する場合は保険金 n を、第 2 保険年度に死亡する場合は保険金 $n-1$ を、以下同様に死亡に対する保険金（期末払）が毎年 1 ずつ減少し、第 n 年度で 1 となる逓減定期保険の年払純保険料を P_2 とする。その P_2 を計算基数を用いて表わすと

$$P_2 = \frac{nM_x - \left(R_{x+1} - R_{x+n+1}\right)}{N_x - N_{x+n}}$$

解答：③ $nM_x - R_{x+1} + R_{x+n+1}$、④ $N_x - N_{x+n}$

(3) $nM_x - R_{x+1} + R_{x+n+1}$ =53,932、 $N_x - N_{x+n}$ =1,081,891、 $M_x - M_{x+n} = 5{,}737$ 、

n=25 より、 $P_1 = \dfrac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} = \dfrac{M_x - 26\cdot M_{x+n} + R_{x+1} - R_{x+n+1}}{N_x - N_{x+n}}$

$$= \frac{26(M_x - M_{x+n}) - (25M_x - R_{x+1} + R_{x+n+1})}{N_x - N_{x+n}} = \frac{26\cdot 5{,}737 - 53{,}932}{1{,}081{,}891} = 0.0880218\cdots$$

よって、小数第 6 位を四捨五入し小数第 5 位まで求めて 0.08802 となる。

なお、 $P_1 + P_2 = (n+1)\cdot P_{\overset{1}{x:\overline{n}|}}$ の関係から解答を求めることも可能である。

解答：0. 08802

(4) 求める責任準備金を ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ とすると

$${}_tV_{x:\overline{n}|} = \frac{R_{x+t} - R_{x+n} - nM_{x+n} + tM_{x+t}}{D_{x+t}} - P_1 \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}$$

(5) 与えられた前提から $P_1 = 0.01447$ となり、

${}_5V_{40:\overline{10}|} = 0.045037\cdots$、 ${}_6V_{40:\overline{10}|} = 0.045419\cdots$、 ${}_7V_{40:\overline{10}|} = 0.041808\cdots$ と、

経過 6 年時点で責任準備金が最大となる。

解答：6

問題 4.

①	危険	②	貯蓄
③	$A_{x+t:\overline{n-t}|}$	④	$\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}$
⑤	$\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$	⑥	$\ddot{a}_{x:\overline{m}|}$
⑦	$A_{x+t-1:\overline{n-t+1}|}$	⑧	$\ddot{a}_{x+t-1:\overline{n-t+1}|}$
⑨	$\ddot{a}_{x+t-1:\overline{m-t+1}|}$	⑩	q_{x+t-1}
⑪	p_{x+t-1}	⑫	p_x
⑬	q_x		

問題 5.

(1) まず、契約加入時の給付現価を求める。

(a)の給付現価は$\overline{A}_{xyz}$であり、(b)の給付現価は、次のとおりとなる。

$$\overline{A}^{1}_{xyz}=\int_0^\infty v^s{}_s p_{xyz}\mu_{x+s}ds=\int_0^\infty v^s{}_s p_{xyz}(A+Bc^{x+s})ds$$

$$=A\cdot\overline{a}_{xyz}+\frac{c^x}{c^x+c^y+c^z}\int_0^\infty v^s{}_s p_{xyz}(Bc^{x+s}+Bc^{y+s}+Bc^{z+s})ds$$

$$=A\cdot\overline{a}_{xyz}+\frac{c^x}{c^x+c^y+c^z}\int_0^\infty v^s{}_s p_{xyz}(\mu_{x+s}+\mu_{y+s}+\mu_{z+s}-3A)ds$$

$$=A\cdot\overline{a}_{xyz}+\frac{c^x}{c^x+c^y+c^z}(\overline{A}_{xyz}-3A\cdot\overline{a}_{xyz})$$

$$=\frac{c^x}{c^x+c^y+c^z}\overline{A}_{xyz}+\frac{-2c^x+c^y+c^z}{c^x+c^y+c^z}A\cdot\overline{a}_{xyz}$$

従って、両辺を$\overline{a}_{xyz}$で除して、次の1次式を得る。

$$P^{(b)}=\overset{①}{\boxed{\frac{c^x}{c^x+c^y+c^z}}}\times P^{(a)}+\overset{②}{\boxed{\frac{-2c^x+c^y+c^z}{c^x+c^y+c^z}A}}$$

(2) （ア）②＝0のときには、その分子が0であることから、$2c^x=c^y+c^z$となる。

ここで、A，B，cを用いて${}_t p_X$を表すと、$\mu_X=-\frac{d}{dX}\log l_X=A+Bc^X$より、

$\log l_X=-AX-\frac{B}{\log c}c^X+\log k$　（$\log k$は積分定数）であるから、

$l_X=ke^{-AX-\frac{B}{\log c}c^X}$と表すことができ、

$${}_t p_X=\frac{l_{X+t}}{l_X}=\frac{ke^{-A(X+t)-\frac{B}{\log c}c^{X+t}}}{ke^{-AX-\frac{B}{\log c}c^X}}=e^{-At-\frac{B}{\log c}c^X(c^t-1)}\quad となる。$$

従って、${}_t p_{yz}={}_t p_y\cdot{}_t p_z=e^{-2At-\frac{B}{\log c}(c^y+c^z)(c^t-1)}=e^{-2At-\frac{B}{\log c}2c^x(c^t-1)}=({}_t p_x)^2={}_t p_{xx}$　となる。

即ち、t年後の（y）と（z）の共存確率${}_t p_{yz}$は、2人の同一年齢者（（x）と（x））のt年後の共存確率${}_t p_{xx}$に等しくなる（つまり、yとzの均等年齢はxとなる）ことが示される。

（イ）証明すべき関係式の左右両辺を生存確率を用いて表すと、次のとおりとなる。

$$\bar{a}_{\overline{xyz}} = \int_0^{\infty} v^t \, {}_tp_{\overline{xyz}} dt = \int_0^{\infty} v^t \left({}_tp_x + {}_tp_y + {}_tp_z - {}_tp_{xy} - {}_tp_{xz} - {}_tp_{yz} + {}_tp_{xyz}\right) dt$$

$$\bar{a}_{\overline{xxx}} = \int_0^{\infty} v^t \, {}_tp_{\overline{xxx}} dt = \int_0^{\infty} v^t \left(3{}_tp_x - 3{}_tp_{xx} + {}_tp_{xxx}\right) dt$$

ここで、（ア）で示された結果を用いつつ、辺々を引き算すると、

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{\overline{xyz}} - \bar{a}_{\overline{xxx}} &= \int_0^{\infty} v^t \left({}_tp_y + {}_tp_z - {}_tp_{xy} - {}_tp_{xz} - 2{}_tp_x + 2{}_tp_{xx}\right) dt \\
&= \int_0^{\infty} v^t (1 - {}_tp_x)\left({}_tp_y + {}_tp_z - 2{}_tp_x\right) dt \\
&= \int_0^{\infty} v^t (1 - {}_tp_x)\left({}_tp_y + {}_tp_z - 2\sqrt{{}_tp_y \cdot {}_tp_z}\right) dt \\
&= \int_0^{\infty} v^t (1 - {}_tp_x)\left(\sqrt{{}_tp_y} - \sqrt{{}_tp_z}\right)^2 dt \qquad \geqq 0
\end{aligned}$$

となり、$\bar{a}_{\overline{xyz}} \geqq \bar{a}_{\overline{xxx}}$ が示される。（等号は $x = y = z$ のときにのみ成立）