損保数理 （問題）

問題1． 次の(1)から(10)について、それぞれ選択肢の中から正しい答えを一つ選んで、指定の解答用紙の所定欄にその記号を記入せよ。 (70点)

(1) 次の条件が与えられている保険契約（保険期間1年間）がある。

① 1事故の支払額 X の支払限度額は1,000,000で、免責金額の適用はない。

② 年間総支払額の平均は2,000,000である。

③ 損害額 L が500,000を超える事故件数は、ポアソン分布に従う。

④ X, L の分布について、次のことが分かっている。

$$P(X > 500,000) = 0.0112$$
$$E[\min(L,\ 500,000)] = 20,600$$
$$E[\min(L,\ 1,000,000)] = 22,400$$

この保険契約について、3年間で損害額が500,000を超える事故が1件も発生しない確率に最も近いものは次のうちどれか。なお、必要があれば、$e = 2.7183$ として計算すること。

(a) 1%　(b) 2%　(c) 3%　(d) 4%
(e) 5%　(f) 7%　(g) 10%　(h) 15%

(2) ある保険会社の自動車保険（免責金額0）において、1契約につき1年間のクレーム件数は、パラメータ2のポアソン分布に従い、クレーム額は平均10の指数分布に従うことが分かっている。今、免責金額10を設定したとき、ある契約において1年間のクレーム件数が0となる確率に最も近いものは次のうちどれか。

(a) $e^{-\frac{2}{e}}$　(b) $e^{-\frac{4}{e}}$　(c) $e^{-\frac{1}{e}}$　(d) $e^{-\frac{10}{e}}$
(e) e^{-2e}　(f) e^{-4e}　(g) e^{-e}　(h) e^{-10e}

(3) ある契約集団のクレーム額の分布を調べたところ、次の結果を得た。クレーム額の分布が、各区間において一様分布であると仮定したとき、次の各問いに答えよ。

クレーム額の区間	クレーム件数
0以上　25未満	33
25以上　50未満	35
50以上 100未満	23
100以上 200未満	9
200以上	0

① この契約集団のクレーム額の平均として最も近いものは、次のうちのどれか。

(a) 36　(b) 40　(c) 44　(d) 48
(e) 52　(f) 56　(g) 60　(h) 64

② この契約集団のクレーム額の分散として最も近いものは、次のうちのどれか。

(a) 1,560 (b) 1,720 (c) 2,010 (d) 2,300
(e) 2,880 (f) 3,150 (g) 3,860 (h) 4,020

(4) ある保険会社では、次の割増引制度を実施している。新規契約者は等級2からスタートし、一定期間に無事故なら等級は1つ加算、事故が1件なら等級は据え置き、事故が2件以上なら等級は1つ減算される。等級4で無事故の場合と、等級0で事故が2件以上の場合、等級は据え置かれる。

等　級	0	1	2	3	4
割増引率(%)	20	10	0	-10	-20

- 契約者数は781,000人で、その数は常に一定
- 一定期間に無事故の確率は0.5、事故が1回起こる確率は0.4

将来的にこの契約ポートフォリオが定常状態に達した際の、平均割増引率に最も近いのは、次のうちどれか。

(a) -15.5% (b) -16.0% (c) -16.5% (d) -17.0%
(e) -17.5% (f) -18.0% (g) -18.5% (h) -19.0%

(5) 団体傷害保険の1契約について調べたところ、今年度の実績が次のとおりであった。このとき、次の各問いに答えよ。

被保険者数	10,000名
総保険料	150,000,000円
クレーム発生率	2.5%
平均クレーム額	180,000円
クレーム額の標準偏差	240,000円

① クレーム額の標準偏差が0である場合に全信頼度を与える最低限のクレーム件数を1,000件としたとき、今年度の実績に対する部分信頼度として最も近いものは、次のうちのどれか。

(a) 0.10 (b) 0.15 (c) 0.20 (d) 0.25
(e) 0.30 (f) 0.35 (g) 0.40 (h) 0.50

② 来年度の契約につき、優良割引を行うこととした。今年度の予定料率構成割合が次のとおりであったとき、①の結果を使用して求めた来年度の割引率として最も近いものは、次のうちのどれか。

損　害　率	50%
社　費　率	25%
代理店手数料率（対営業保険料）	20%
利　潤　率（対営業保険料）	5%

(a) 4% (b) 8% (c) 12% (d) 16%
(e) 20% (f) 24% (g) 28% (h) 32%

(6) A,Bという2種類の危険標識の2×2の複合分類リスクにおいて、そのエクスポージャおよび実績に基づく相対クレームコスト指数が次のとおりであったとする。

＜エクスポージャ(E_{ij})＞

	b_1	b_2	計
a_1	$E_{11}=100$	$E_{12}=200$	$E_{1\bullet}=300$
a_2	$E_{21}=200$	$E_{22}=400$	$E_{2\bullet}=600$
計	$E_{\bullet 1}=300$	$E_{\bullet 2}=600$	$E_{\bullet\bullet}=900$

＜相対クレームコスト指数(r_{ij})＞

	b_1	b_2	計
a_1	$r_{11}=0.72$	$r_{12}=0.9$	$r_{1\bullet}=0.84$
a_2	$r_{21}=0.54$	$r_{22}=1.35$	$r_{2\bullet}=1.08$
計	$r_{\bullet 1}=0.6$	$r_{\bullet 2}=1.2$	$r_{\bullet\bullet}=1$

今、この複合分類リスクが乗法型であると仮定し、各相対クレームコスト指数の推定値($\hat{r}_{ij}$)をMinimum Bias法により求めるとき、$\hat{r}_{11}$, $\hat{r}_{12}$, $\hat{r}_{21}$, $\hat{r}_{22}$ のそれぞれの値に最も近いものは次のうちどれか。

(a) 0.12　(b) 0.24　(c) 0.36　(d) 0.48　(e) 0.60
(f) 0.72　(g) 0.84　(h) 0.96　(i) 1.08　(j) 1.2

(7) 事故発生年度から翌々年度までに支払いが完了する保険契約について、事故年度・経過年度別支払保険金表およびインフレ率が下記のとおり与えられているとき、2002、2003事故年度の最終累計支払保険金に最も近いものは、それぞれ下の選択肢のうちのどれか。ただし、累計支払保険金のロスディベロップメントの予測値は、対応する事故年度の既知の値を単純平均したものを用いるものとする。

・ 事故年度・経過年度別支払保険金表

事故年度	経過年度			
	1	2	3	最終累計支払保険金
2001年度	5,000	2,000	1,500	8,500
2002年度	10,000	3,000		
2003年度	12,500			

・ インフレ率： 毎年10%(支払保険金は、その支払年度の貨幣価値によるものとする)

(a) 15,500　(b) 15,600　(c) 15,700　(d) 15,800
(e) 20,500　(f) 20,600　(g) 20,700　(h) 20,800

(8) 積立保険の一時払契約において、保険期間中全損失効時に支払った返戻金の現価を表すものとして最もふさわしいものは、次のうちのどれか。なお、満期返戻金をW、保険期間をn年、予定利率をi、現価率を$v\left(=\dfrac{1}{1+i}\right)$、予定消滅率$q$を考慮した現価率を$\phi\left(=(1-q)\cdot v\right)$とする。また、全損失効時には未経過年度の積立保険料部分を返戻することとする。

(a) $W\times\phi^n\times\left[\dfrac{1-v^n}{1-v}-\dfrac{1-\phi^n}{1-\phi}\right]$　　(b) $W\times\phi^n\times\left[\dfrac{(1-v)\times(1-\phi^n)}{(1-v^n)\times(1-\phi)}-1\right]$

(c) $W\times\phi^n\times\left[\dfrac{(1-v^n)\times(1-\phi)}{(1-v)\times(1-\phi^n)}-1\right]$　　(d) $W\times\phi^n\times\left[1-\dfrac{(1-v)\times(1-\phi^n)}{(1-v^n)\times(1-\phi)}\right]$

(e) $W\times v^n\times\left[\dfrac{1-v^n}{1-v}-\dfrac{1-\phi^n}{1-\phi}\right]$　　(f) $W\times v^n\times\left[\dfrac{(1-v)\times(1-\phi^n)}{(1-v^n)\times(1-\phi)}-1\right]$

(g) $W\times v^n\times\left[\dfrac{(1-v^n)\times(1-\phi)}{(1-v)\times(1-\phi^n)}-1\right]$　　(h) $W\times v^n\times\left[1-\dfrac{(1-v)\times(1-\phi^n)}{(1-v^n)\times(1-\phi)}\right]$

(9) ポアソン過程に従うクレーム件数過程に対して、20回目のクレームが発生する時刻を表す確率変数T_{20}の分散に最も近いのは、次のうちどれか。ただし、単位時間あたりの事故発生件数の平均を10とする。

(a) 0.025　(b) 0.2　(c) 0.4　(d) 0.5
(e) 2　(f) 4　(g) 5　(h) 40

(10) ある保険種目の1件あたりの支払保険金Xは、次の確率密度関数$f(x)$を持つパレート分布に従っているとする。

$$f(x)=\frac{1500}{x^{2.5}}\qquad(x>100)$$

今、この保険種目を12%比例再保険に出再しているが、これとネット再保険料が等しくなるようなELC再保険特約(超過損害額再保険特約)に変更したい。このとき、このELC再保険特約の責任限度額を無限大(無制限)とすれば、設定すべきエクセスポイントに最も近いものは次のうちのどれか。ここにおいて、ネット再保険料とは再保険金の期待値のことを意味する。

(a) 150　(b) 200　(c) 250　(d) 300
(e) 1,500　(f) 2,000　(g) 2,500　(h) 3,000

問題2. ある保険において、クレーム総額Sの平均は10、分散は4、歪度は1であるとする。このとき、次の問いに答えよ。 (15点)

(1) ガンマ分布の分布関数$G(x:\alpha,\beta)=\int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}e^{-\beta t}dt \quad (0\leq x<\infty)$を用いて、$S$の分布関数を$H(x:\alpha,\beta,x_0)=G(x-x_0:\alpha,\beta)$で近似するとした場合に、平均、分散、歪度が等しいとしてx_0の値を求めよ

(2) 保険会社は、クレーム総額の期待値の15%にあたるファンドを期初のサープラスとして保有し、保険料収入はクレーム総額の期待値に5%の安全割増を付加したものとした。初年度の期末のサープラスが負になる確率を(1)の近似を用いて求めよ(小数点以下第3位を四捨五入して小数点以下第2位まで求めよ)。なお、期中のクレームはすべて期末に支払うものとし、もし必要であれば$e=2.7183$を用いて計算せよ。

問題3. 時刻tでのサープラスU_tが次の形で表されるLundbergモデルを考える。

$$U_t=u+(1+\theta)\lambda\mu t-S_t \qquad (t\geq 0)$$

ここで、u : 期初サープラス(≥ 0)

U_t: 時刻t時点でのサープラス

$(1+\theta)\lambda\mu t$: 時刻tまでの収入保険料 ($\theta(>0)$は安全割増率)

S_t : 時刻tまでの支払保険金

であり、S_tは複合ポアソン過程に従う。また、S_tのポアソンパラメータはλであり、個々のロスは、平均がμ、確率密度関数が$f(x)$、積率母関数が$M(\tau)$の分布に従うものとする。また、n件目のロス発生時点までに破産している確率を$\psi_n(u)$とし、破産確率を$\psi(u)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(u)$と定義する。このとき、次の問いに答えよ。 (15点)

(1) 1件目のロスが起こった時刻を表す確率変数をT_1とする。$T_1=t$の条件の下で、1件目のロスが発生したときに破産する確率$\psi_1(u|T_1=t)$を求めよ。($f(x)$を用いた積分の形で表せ。)

(2) $T_1=t$の条件の下で、$n+1$件目のロスが発生したときに破産している確率$\psi_{n+1}(u|T_1=t)$は、1件目のロスが発生した時点で破産する確率と、1件目のロスが発生した時点でサープラスが0以上であり、次のn件のロス発生までに破産する確率の和で表すことができる。1件目のロスをx(1件目で破産していないため$0\leq x\leq u+(1+\theta)\lambda\mu t$)とすれば、時刻$t$以降の過程は初期サープラス$u+(1+\theta)\lambda\mu t-x$の新たな同様のモデルと考えることができる。よって、後者の確率は、$\int_0^{u+(1+\theta)\lambda\mu t}\psi_n(u+(1+\theta)\lambda\mu t-x)f(x)dx$となる。これらを用いて、ある正の定数$R$について$\psi_n(u)\leq e^{-Ru} \quad (u\geq 0)$が成り立っているならば、$\psi_{n+1}(u|T_1=t)\leq e^{-R(u+(1+\theta)\lambda\mu t)}M(R)$が成り立つことを証明せよ。

(3) ある正の定数Rについて$\psi_n(u)\leq e^{-Ru}$ $(u\geq 0)$が成り立っているならば、$\psi_{n+1}(u)\leq \frac{M(R)}{1+(1+\theta)R\mu}e^{-Ru}$が成り立つことを証明せよ。

(4) Rが$1+(1+\theta)R\mu=M(R)$を満たす正の解であるとき、$\psi(u)\leq e^{-Ru}$ $(u\geq 0)$が成り立つことを証明せよ。

損保数理（解答例）

問題1.

(1)　(e)　（テキスト1-33ページ参照）

年間総支払額をS、年間支払件数をN、1事故の支払額をXとする。

$$E(S)=E(N)\cdot E(X)=2,000,000$$

条件の①と④より、$E(X)=E[\min(L,1,000,000)]=22,400$であるから、

$$E(N)=\frac{2,000,000}{22,400}=89.2857$$

$P(X>500,000)=0.0112$より、損害額Lが500,000を超える年間事故件数の平均は、

$$E(N)\cdot P(X>500,000)=89.2857\times 0.0112=1.0000$$

したがって、損害額Lが500,000を超える年間事故件数は、平均1.0000のポアソン分布に従う。すなわち、3年間の事故件数は、平均3.0000のポアソン分布に従うこととなる。

よって、求める確率は、$\exp(-3.0000)=\dfrac{1}{2.7183^3}=0.049786$である。

(2)　(a)　（テキスト1-40ページ参照）

免責金額10万円より、免責となる事故の確率qは、

$$q=\int_0^{10}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}dx=\left[-e^{-\frac{x}{10}}\right]_0^{10}=1-e^{-1}$$

年間の事故件数の確率変数をN、事故件数$N=n$のうち保険金が支払われる事故件数の確率変数をMとする。このとき、保険金が支払われる事故件数Mの確率$P[M=m|N=n]$は、

$$P[M=m|N=n]=\binom{n}{m}(1-q)^m\times q^{n-m}$$

と2項分布で表現できる。

免責金額10万円を設定したときの保険金が支払われる事故件数の確率は、

$$\begin{aligned}P(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}P(M=m|N=n)P(N=n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n}{m}(1-q)^m q^{n-m}\cdot e^{-2}\cdot\frac{2^n}{n!}\end{aligned}$$

よって、保険金が支払われる件数が0である確率は、

$$\begin{aligned}e^{-2}\frac{2^0}{0!}+\sum_{n=1}^{\infty}P(M=0|N=n)P(N=n)&=e^{-2}+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n}{0}q^n\cdot e^{-2}\cdot\frac{2^n}{n!}\\&=e^{-2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-2}\cdot\frac{(2q)^n}{n!}\\&=e^{-2}+e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2q)^n}{n!}-e^{-2}\\&=e^{-2}\cdot e^{2q}\\&=e^{-2+2q}=e^{-2+2(1-e^{-1})}=e^{-\frac{2}{e}}\end{aligned}$$

となる。

(3)　①　(d)　②　(b)　(テキスト2-25ページ参照)

クレーム額の区間を(a,b)、その区間のクレーム件数をk、総クレーム件数をn $(=100)$とすると、その区間におけるクレーム額Xの確率密度関数は、

$$f(x)=\frac{k}{n(b-a)}\quad(a\le x<b)$$

で表される。クレーム額200以上のクレーム件数は0であるから、$x\ge 200$のとき、$f(x)=0$。

したがって、この契約集団のクレーム額の平均は、

$$E(X)=\int_0^{200}x\cdot f(x)dx=\int_0^{25}\frac{33x}{100(25-0)}dx+\cdots+\int_{100}^{200}\frac{9x}{100(200-100)}dx$$

$$=\frac{1}{100\times 2}\left[\frac{33(25^2-0^2)}{25-0}+\frac{35(50^2-25^2)}{50-25}+\frac{23(100^2-50^2)}{100-50}+\frac{9(200^2-100^2)}{200-100}\right]$$

$$=48$$

同様に、この契約集団のクレーム額の分散は、

$$E(X^2)=\int_0^{200}x^2f(x)dx=\int_0^{25}\frac{33x^2}{100(25-0)}dx+\cdots+\int_{100}^{200}\frac{9x^2}{100(200-100)}dx$$

$$=\frac{1}{100\times 3}\left[\frac{33(25^3-0^3)}{25-0}+\frac{35(50^3-25^3)}{50-25}+\frac{23(100^3-50^3)}{100-50}+\frac{9(200^3-100^3)}{200-100}\right]$$

$$=4021$$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=4021-48^2=1717$$

となる。

(4)　(e)　(テキスト3-8ページ参照)

無事故の確率をp_0、事故が1回起こる確率をp_1とする。題意より推移行列を求めると次のようになる。

$$\begin{array}{cc} & \text{移動後の等級} \\ & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{移}\ 0 \\ \text{動}\ 1 \\ \text{前}\ 2 \\ \text{等}\ 3 \\ \text{級}\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1-p_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p_0-p_1 & p_1 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p_0-p_1 & p_1 & p_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p_0-p_1 & p_1 & p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p_0-p_1 & p_0+p_1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

上記の推移行列をXとし、y_iを第i年度における等級jの契約件数y_{ij}を要素に持つベクトル$y_i=(y_{i0}\quad y_{i1}\quad y_{i2}\quad y_{i3}\quad y_{i4})$とすると、定常状態では、

$$\begin{cases} y_\infty=y_\infty X & ① \\ y_{\infty 0}+y_{\infty 1}+y_{\infty 2}+y_{\infty 3}+y_{\infty 4}=781,000 \end{cases}$$

①より、

$$\begin{cases} y_{\infty 0} = 0.5y_{\infty 0} + 0.1y_{\infty 1} \\ y_{\infty 1} = 0.5y_{\infty 0} + 0.4y_{\infty 1} + 0.1y_{\infty 2} \\ y_{\infty 2} = 0.5y_{\infty 1} + 0.4y_{\infty 2} + 0.1y_{\infty 3} \\ y_{\infty 3} = 0.5y_{\infty 2} + 0.4y_{\infty 3} + 0.1y_{\infty 4} \\ y_{\infty 4} = 0.5y_{\infty 3} + 0.9y_{\infty 4} \end{cases}$$

これを解いて、$y_{\infty} = (1,000 \quad 5,000 \quad 25,000 \quad 125,000 \quad 625,000)$

平均割増率は、

$$\frac{1000 \times 0.2 + 5000 \times 0.1 + 25000 \times 0 + 125000 \times (-0.1) + 625000 \times (-0.2)}{781000}$$

$$= -0.17516\cdots$$

(5)　① (e)　② (b)　(テキスト3-14、24ページ参照)

今年度のクレーム件数は、10,000×2.5%=250(件)であるから、部分信頼度Zは、次のとおりとなる。

$$Z = \sqrt{\frac{250}{1,000 \times \left\{1 + \left(\frac{24\text{万円}}{18\text{万円}}\right)^2\right\}}} = \sqrt{\frac{9}{100}} = 0.3$$

また、今年度の実績損害率は、250×18万円／15,000万円=30%であるから、、部分信頼度Zを勘案した修正損害率は、30%×0.3+50%×(1−0.3)=44%となる。

これを用いて料率改定率αを算出すると、

α=(44%+25%)／(1−20%−5%)−1=−8%

となる。

(6)　$\hat{r}_{11}$：(d)、$\hat{r}_{12}$：(h)、$\hat{r}_{21}$：(e)、$\hat{r}_{22}$：(j)　(テキスト4-12ページ参照)

Minimum Bias法によれば、各$\hat{r}_{ij}$は次の連立方程式を満たさなければならない。

$$\begin{cases} E_{11}(r_{11} - \hat{r}_{11}) + E_{12}(r_{12} - \hat{r}_{12}) = 0 \\ E_{21}(r_{21} - \hat{r}_{21}) + E_{22}(r_{22} - \hat{r}_{22}) = 0 \\ E_{11}(r_{11} - \hat{r}_{11}) + E_{21}(r_{21} - \hat{r}_{21}) = 0 \\ E_{12}(r_{12} - \hat{r}_{12}) + E_{22}(r_{22} - \hat{r}_{22}) = 0 \end{cases}$$

ここで、各危険標識の料率係数をそれぞれx_i, y_jとし、$C = E_{11}(r_{11} - \hat{r}_{11})$とおけば、この複合分類リスクが乗法型であることにより、上の方程式は次のように整理される。

$$\begin{cases} \hat{r}_{11} = x_1 y_1 = r_{11} - C/E_{11} \\ \hat{r}_{22} = x_2 y_2 = r_{22} - C/E_{22} \\ \hat{r}_{12} = x_1 y_2 = r_{12} + C/E_{12} \\ \hat{r}_{21} = x_2 y_1 = r_{21} + C/E_{21} \end{cases} \quad \cdots①$$

よって、$(r_{11} - C/E_{11})(r_{22} - C/E_{22}) = (r_{12} + C/E_{12})(r_{21} + C/E_{21})$であり、各$E_{ij}$, r_{ij}を代入してCについて解くと、$C = 21.6$が求まる。

これを(1)に代入して、

$\hat{r}_{11} = 0.504$,　$\hat{r}_{12} = 1.008$,　$\hat{r}_{21} = 0.648$,　$\hat{r}_{22} = 1.296$

(7)　2002事故年度：(d)、2003事故年度：(e)　　　　　　　　　　　　(テキスト5-8ページ参照)

保険金の水準を2003年度ベースにインフレ調整を行う。

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2001年度	6,050	2,200	1,500
2002年度	11,000	3,000	
2003年度	12,500		

次にロスディベロップメントファクターを計算する。

事故年度	経過年度	
	1→2	2→3
2001年度	1.364	1.182
2002年度	1.273	1.182
2003年度	1.318	1.182

2003年度ベースの支払保険金を計算する。

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2001年度	6,050	2,200	1,500
2002年度	11,000	3,000	2,545
2003年度	12,500	3,977	2,996

最後に将来のインフレ率を反映する。

事故年度	経過年度			
	1	2	3	最終累計支払保険金
2001年度	5,000	2,000	1,500	8,500
2002年度	10,000	3,000	2,800	15,800
2003年度	12,500	4,375	3,625	20,500

(8)　　(c)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(テキスト6-20ページ参照)

第1保険年度に全損失効により契約が消滅する確率はqであり、その際に支払う返戻金は題意より、$W\times\phi^n\times\dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}\times\dfrac{1-v^{n-1}}{1-v}$である。同様にして、第$n-1$保険年度に全損失効により契約が消滅する確率は$q\times(1-q)^{n-2}$であり、その際に支払う返戻金は、$W\times\phi^n\times\dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}\times\dfrac{1-v^{n-(n-1)}}{1-v}$である。

したがって、求める返戻金の現価は、これらを第1保険年度から第$n-1$年度まで加算することにより求められる。

$$\text{返戻金の現価}=\sum_{t=1}^{n-1}(1-q)^{t-1}\times q\times W\times\phi^n\times\frac{1-\phi}{1-\phi^n}\times\frac{1-v^{n-t}}{1-v}\times v^t$$

$$= W \times \phi^n \times \frac{1-\phi}{1-\phi^n} \times \left(\frac{1-v^n}{1-v} - \frac{1-\phi^n}{1-\phi} \right)$$

(9)　(b)　(テキスト7-54ページ参照)

パラメータλのとき、確率変数T_nをn回目のクレームが発生する時刻を表すものとすると、

$$P(T_n \le t) = P(\text{期間}[0, t]\text{におけるクレーム発生件数が}n\text{件以上})$$

$$= e^{-\lambda t}\left(\frac{(\lambda t)^n}{n!} + \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(\lambda t)^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots \right)$$

$$\frac{dP(T_n \le t)}{dt} = -\lambda e^{-\lambda t}\left(\frac{(\lambda t)^n}{n!} + \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots \right) + e^{-\lambda t}\left(\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\lambda(\lambda t)^n}{n!} + \cdots \right)$$

$$= e^{-\lambda t}\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\lambda}{\Gamma(n)} e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}$$

これはガンマ分布の確率密度関数であり、分散は$\dfrac{n}{\lambda^2}$となる。$\lambda = 10, n = 20$を代入すると0.2となる。

(10)　(h)　(テキスト1-40ページ参照)

12%比例再保険特約の1件あたりネット再保険料は、

$$= 0.12 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 0.12 \cdot \int_{100}^{\infty} \frac{1500}{x^{1.5}} dx = 36$$

エクセスポイントをmとした場合のELC特約の1件あたりネット再保険料は、

$$= \int_m^{\infty} (x-m) f(x) dx = \int_m^{\infty} \left(\frac{1500}{x^{1.5}} - \frac{1500m}{x^{2.5}} \right) dx = \frac{2000}{\sqrt{m}}$$

よって、この両者が等しいことより、$m = 3086.4\cdots$となる。

問題2.　(1)　6　(2)　0.15（または15.12%）　(テキスト2-23ページ参照)

(1) ガンマ分布の性質より、

$$\text{平均} = x_0 + \frac{\alpha}{\beta} = 10 \qquad ①$$

$$\text{分散} = \frac{\alpha}{\beta^2} = 4 \qquad ②$$

また、歪度$= \dfrac{E((S-E(S))^3)}{\sigma^3} = \dfrac{E((S-E(S))^3)}{8} = 1$より、$E((S-E(S))^3) = 8$となる。

Sのキュムラント母関数を用いると、

$$E((S-E(S))^3) = \left.\frac{d^3}{dt^3}\log M_S(t)\right|_{t=0} = \left.\frac{d^3}{dt^3}\log\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{2\alpha}{(\beta-t)^3}\right|_{t=0} = \frac{2\alpha}{\beta^3} = 8 \qquad \cdots\cdots ③$$

①、②、③を解くと、$\alpha = 4, \beta = 1, x_0 = 6$となる。

(2) 破産確率εを求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned}\varepsilon &= P(\mu_0 + p - S < 0)\\ &= P(10\times 0.15 + 10\times 1.05 - S < 0) = P(S > 12)\\ &\approx 1 - G(12-6:4,1) = 1 - \int_0^6 \frac{1^4}{\Gamma(4)} t^{4-1} e^{-t} dt = 1 - \frac{1}{6}\int_0^6 t^3 e^{-t} dt\\ &= 1 - \frac{1}{6}\left\{\left[-t^3 e^{-t}\right]_0^6 + \int_0^6 3t^2 e^{-t} dt\right\} = \cdots = 1 - \frac{1}{6}\left(-366e^{-6} + 6\right)\\ &= 61e^{-6} \approx 0.15119\end{aligned}$$

問題3. (テキスト7-37ページ参照)

(1) 個々のロスが従う確率変数をXとすると、1件目のロス発生時刻が$T_1 = t$の条件の下でのサープラスは$U_t = u + (1+\theta)\lambda\mu t - X$であるから、

$$\psi_1(u|T_1 = t) = P(u + (1+\theta)\lambda u t < X) = \int_{u+(1+\theta)\lambda\mu t}^{\infty} f(x)dx$$

(2) 題意より、ある$R(>0)$について$\psi_n(u) \le e^{-Ru}$ $(u \ge 0)$が成り立っているならば、

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u|T_1 = t) &= \psi_1(u|T_1 = t) + \int_0^{u+(1+\theta)\lambda\mu t} \psi_n(u + (1+\theta)\lambda\mu t - x) f(x)dx\\ &= \int_{u+(1+\theta)\lambda\mu t}^{\infty} f(x)dx + \int_0^{u+(1+\theta)\lambda\mu t} \psi_n(u + (1+\theta)\lambda\mu t - x) f(x)dx\\ &\le \int_{u+(1+\theta)\lambda\mu t}^{\infty} e^{-R(u+(1+\theta)\lambda\mu t - x)} f(x)dx + \int_0^{u+(1+\theta)\lambda\mu} e^{-R(u+(1+\theta)\lambda\mu t - x)} f(x)dx\end{aligned}$$

(最初の積分は、$x \ge u + (1+\theta)\lambda\mu t$ならば、$e^{-R(u+(1+\theta)\lambda\mu t - x)} \ge 1$であることから従う。)

$$\begin{aligned}&= \int_0^{\infty} e^{-R(u+(1+\theta)\lambda\mu t - x)} f(x)dx = e^{-R(u+(1+\theta)\lambda\mu t)} \int_0^{\infty} e^{Rx} f(x)dx\\ &= e^{-R(u+(1+\theta)\lambda\mu t)} M(R)\end{aligned}$$

(3) T_1は確率密度関数$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $(t \ge 0)$をもつ指数分布に従うので、(2)の結果を用いれば

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u) &= \int_0^{\infty} \psi_{n+1}(u|T_1 = t)\lambda e^{-\lambda t} dt\\ &\le \int_0^{\infty} e^{-R(u+(1+\theta)\lambda\mu t)} M(R)\lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda M(R) e^{-Ru} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1+(1+\theta)R\mu)t} dt\\ &= \lambda M(R) e^{-Ru} \frac{1}{\lambda(1+(1+\theta)R\mu)} = \frac{M(R)}{1+(1+\theta)R\mu} e^{-Ru}\end{aligned}$$

(4) $U_0 = u \ge 0$なので、$\psi_0(u) = 0 <= e^{-Ru}$は明らか。

また、(3)より、$\psi_n(u) \le e^{-Ru}$ならば、$\psi_{n+1}(u) \le \dfrac{M(R)}{1+(1+\theta)R\mu} e^{-Ru} = e^{-Ru}$が成り立つ。よって、帰納法より任意の$n$に対し、$\psi_n(u) \le e^{-Ru}$が成り立つので、$\psi(u) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(u) \le e^{-Ru}$となる。