年金数理（問題）

この年金数理の問題における「Trowbridge モデルの年金制度」とは、定年退職者のみに対し、定年年齢 x_r 歳時より単位年金額の終身年金を年 1 回期初に支払う年金制度をいう。

問題 1．次の(1)～(13)について、それぞれ 5 つの選択肢から、設問の答として正しいものを選んでその記号を解答用紙の所定欄に記入せよ。（52 点）

(1)次の算式のうち誤っているものの記号を選べ。

(A) $\overline{a}_{x|y} = \ddot{a}_{xy} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\cdot(\mu_x + \mu_y + \delta)$　(B) $\ddot{a}_{\overline{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$　(C) $\ddot{a}_{y|x} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy}$

(D) $\ddot{a}_{\frac{1}{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$　(E) $\ddot{a}_{\frac{[1]}{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - 2\cdot\ddot{a}_{xy}$

(2)Trowbridge モデルの年金制度において、財政方式を開放基金方式によるものとすれば、定常状態における積立金 ${}^{OAN}F$ を表す算式は次のうちどれか。ただし、年金受給権者の給付現価を S^p とし、在職中の被保険者の給付現価 S^a は、過去の加入期間に対応する給付現価 S^a_{PS} と、将来の加入期間に対応する給付現価 S^a_{FS} に分離されるものとする。

(A) S^p　(B) $S^p + S^a_{PS}$　(C) $S^p + S^a_{FS}$　(D) $S^p + S^a$　(E) S^a

(3)保険料および給付が全て期初に行われる年金制度で、ある年度の財政が予定どおりに推移し次のとおりであった。この年度の過去勤務債務償却ための特別保険料として最も近い値の記号を選べ。期初年金資産:100、給付:35、期初責任準備金:169、標準保険料:41、期末責任準備金:182、資産運用収入:5。

(A) 15　(B) 16　(C) 17　(D) 18　(E) 19

(4)Trowbridge モデルの年金制度が財政方式は開放型総合保険料方式としており、定常状態に達していた。ある年度に何らかの理由で資産に ΔF だけの不足をきたしてしまった。翌年度からの保険料率は以前の定常状態を維持するために必要な保険料率に加え、不足を償却する保険料率分の $\Delta F/(G^a + G^f)$ を上乗せした。ここに G^a は在職中の被保険者の人数現価、G^f は将来加入が見込まれる被保険者の人数現価とする。2 年後の未償却不足額として正しい算式の記号を選べ。ただし、その 2 年間の財政は予定どおり推移し、後発過去勤務債務の発生は無かったものとする。選択肢中の記号 i は予定利率(以下、ことわらない限り同様)である。

(A) $\Delta F\cdot(1+i)^2$　(B) $\Delta F/(1+i)^2$　(C) $\Delta F\cdot(1-i)^2$　(D) ΔF　(E) $\Delta F/(1-i)^2$

(5)利率が 4.0%であるとき Ia_∞（$Ia_{\overline{n|}}$ の $n\to\infty$ としたもの。$(Ia)_\infty$ とも書く)の値として最も近いものの記号を選べ。

(A) 500　(B) 550　(C) 600　(D) 650　(E) 700

(6)ある年金制度において、財政方式は開放基金方式としており、定常人口に達しているある年度末の財政状態は、積立金がFであり、標準保険料率${}^{OAN}P$による保険料収入${}^{OAN}C$の現価の他に、収入現価としてU相当の特別保険料を徴収することで、給付現価と収支相等する計画となっていた。この年度末に、すでに年金者となっている者以外の者の給付を一律$(1+\alpha)$倍とする変更を行った。変更後の標準保険料率も$(1+\alpha)$倍するとした場合の変更後の未償却過去勤務債務として、正しい算式の記号を選べ。ただし、この制度において受給待期者はいないものとし、選択肢中の記号の意味は(2)で説明されているものと同じである。

(A) $U+\alpha\cdot S_{PS}^{a}$　(B) $(1+\alpha)\cdot U+\alpha\cdot F$　(C) $U+\alpha\cdot F$　(D) $(1+\alpha)\cdot U+\alpha\cdot S^{p}$

(E) $(1+\alpha)\cdot U+\alpha\cdot S_{PS}^{a}$

(7)ある年金制度の初期過去勤務債務Uを年1回期初払の特別保険料で償却するものとし、① 5 年間の元利均等償却による方法と、②前年度末未償却過去勤務債務(発足時は初期過去勤務債務)残高の一定割合αをその年度に償却する方法を考えた。①の方法による「第4年度末の未償却過去勤務債務残高」と②の方法によるそれが一致するとした場合、αの近似値として、最も近いものの記号を選べ。ただし、後発過去勤務債務は発生しないものとし、予定利率は3.5%で、$\ddot{a}_{\overline{5|}}^{(3.5\%)}=4.67308$とする。

(A) 0.303　(B) 0.313　(C) 0.323　(D) 0.333　(E) 0.343

(8)60歳支給開始期初払10年保証終身年金において、支給開始後2年ごとに当初年金額の5%相当額を増額し支給するものとし、保証期間経過後は保証期間の最終年度に支給された年金額の50%を継続して支給することとした場合、この年金の支給開始時点における年金現価率の近似値として、最も近いものの記号を選べ。ただし、予定利率iを5.0%とし、必要な場合には次の数値を参照せよ。$D_{60}=4{,}690.5$、$N_{60}=57{,}468.5$、$N_{70}=21{,}612.4$、$\ddot{a}_{\overline{10|}}=8.10782$、$v=\dfrac{1}{1+i}=0.95238$、$v^{10}=0.61391$。

(A) 11.0　(B) 11.3　(C) 11.6　(D) 11.9　(E) 12.2

(9)開放型総合保険料方式を採用していて、極限方程式の成立する状態にある年金制度があるものとする。ある年度で剰余金Rを使い、保険料率の引き下げを行ったとした場合、剰余金を使用しなかった場合との保険料の差を表す算式の記号を選べ。

(A) $\dfrac{i}{(1-i)}\cdot R$　(B) $\dfrac{i}{(1+i)}\cdot R$　(C) $i\cdot R$　(D) $i\cdot(1+i)\cdot R$　(E) $i\cdot(1-i)\cdot R$

(10)年金資産F_Aの時刻tにおける利力が${}^{A}\delta_t=4+t$であり、年金資産F_Bの時刻tにおける利力が${}^{B}\delta_t=1+3\cdot t$であるとする。時刻$t=0$のとき、年金資産$F_A$と、年金資産$F_B$は等しく、時刻$t=n$のときも等しい場合、$n$の値を表す記号を選べ。

(A) 1/3　(B) 1/2　(C) 1　(D) 2　(E) 3

(11)ある年金制度において、第n年度期初に 10,000 の過去勤務債務残高があったので、償却期間を 10 年とし、給与に対する一定割合の特別保険料率を定め、年 1 回期初に償却することとした。予定利率$i = 5.0\%$、$\ddot{a}_{\overline{10}|} = 8.10782$、第$n$年度期初の総給与 100,000 を用い、小数第 5 位を切り上げて特別保険料率を決め、第n年度期初から償却を開始した。その後、総給与が毎年 4,000 ずつ減少したため、総給与が毎年 4,000 ずつ減少したことによる償却不足以外の年金財政上の後発債務は発生しなかったものの、当初の総給与が変わらない償却計画より過去勤務債務残高は多くなってしまった。第$n+3$年度期末における過去勤務債務残高の、当初計画値を上回っている額として最も近いものの記号を選べ。

(A) 159　(B) 234　(C) 323　(D) 428　(E) 547

(12)$\bar{a}_{x:\overline{n}|}$の近似値を表す正しい算式の記号を選べ。ただし、$\bar{a}_x \fallingdotseq \ddot{a}_x - \dfrac{1}{2}$ とする。

(A) $\dfrac{1}{2}\cdot\left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + a_{x:\overline{n}|}\right)$　(B) $\dfrac{1}{2}\cdot\upsilon^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\upsilon\cdot\ddot{a}_{x+1:\overline{n}|} + a_{x:\overline{n}|}\right)$　(C) $\dfrac{1}{2}\cdot\upsilon^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \upsilon^{-1}\cdot a_{x:\overline{n}|}\right)$

(D) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \dfrac{1}{2}$　(E) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{D_{x+n}}{D_x}$

(13)ある年金制度では、利回りiのもと定常状態を保っており、保険料の払い込みおよび給付の支払は共に年 1 回期初に発生するものとして、いわゆる極限方程式が成立していた。ところが、ある年度初の保険料の払い込みおよび給付の支払後から、利回りがiからj　$(j < i)$に変化し、また、その翌年以降の年度から保険料と給付の双方に対して前年比$(1+k)$倍$(k > 0)$の改定が行われることとなった。このとき、ある年度を第 1 年度として、第何年度初にこの年金制度は支払不能となるか。支払不能となる年度を第n年度として、正しい算式の記号を選べ。ただし、記号$\langle G\rangle$は G を超えない最大の整数を表すものとし、$k \neq j$とする。

(A) $n = \left\langle \dfrac{\log\dfrac{i-j+(1+i)\cdot k}{i}}{\log(1+k)} \right\rangle + 1$　(B) $n = \left\langle \dfrac{\log\dfrac{i-j+(1+k)\cdot i}{i}}{\log(1+k)} \right\rangle + 1$

(C) $n = \left\langle \dfrac{\log(i-j+i\cdot k)}{\log(1+k)} \right\rangle + 1$　(D) $n = \left\langle \dfrac{\log\dfrac{i-j+(1+i)\cdot k}{i\cdot(1+j)}}{\log\dfrac{1+k}{1+j}} \right\rangle + 1$

(E) $n = \left\langle \dfrac{\log\dfrac{i-j+(1+k)\cdot i}{i\cdot(1+j)}}{\log\dfrac{1+k}{1+j}} \right\rangle + 1$

問題2.次の説明文中の空欄に当てはまる記号または算式を解答用紙の所定欄に記入せよ。(13点)

財政方式として開放基金方式を採用する給与比例制の年金制度の場合に、保険料率計算を行った計算基準日における被保険者数および給与総額が定常人口にあるものと仮定し、その被保険者数および給与総額が計算基準日時点と同じとなるように、毎年の新規被保険者数および新規被保険者の給与を見込むものとする。

いま、脱退残存表上のx歳の残存者数をl_x人、昇給指数算定上の昇給指数をb_xとし、新規加入年齢をx_0歳、最終年齢をx_r歳、x歳の者の将来分の平均被保険者期間を$e_x=(l_x+l_{x+1}+\cdots+l_{x_r-1})/l_x$とする。

(1)毎年$\alpha\cdot l_{x_0}$(人)の新規被保険者が加入し、基礎率どおりの推移をし、定常人口になったとすれば、その総被保険者数L'(人)は$L'=\sum_{x=\boxed{①}}^{\boxed{②}}\boxed{③}$。

計算基準日時点の被保険者集団の総人数をL(人)とすると、$\boxed{④}$となるαは、

$\alpha=\boxed{⑤}/\sum_{x=\boxed{①}}^{\boxed{②}}\boxed{⑥}$。よって、毎年の$x_0$歳の新規被保険者数は$\boxed{⑤}\cdot\boxed{⑦}/\sum_{x=\boxed{①}}^{\boxed{②}}\boxed{⑥}$

ここで、$(\sum_{x=\boxed{①}}^{\boxed{②}}\boxed{⑥})/\boxed{⑦}$は$\boxed{⑧}$であり、新規被保険者数$=\boxed{⑤}/\boxed{⑧}$となり、計算基準日時点の$\boxed{⑤}$に比例する。

(2)続いて、新規被保険者の給与を考える。(1)と同様に毎年$\alpha\cdot l_{x_0}$(人)の新規被保険者が$\beta\cdot b_{x_0}$(円)の給与で加入し、基礎率どおりの推移をし定常人口になったとすれば、その給与総額B'(円)は$B'=\sum_{x=\boxed{①}}^{\boxed{②}}(\boxed{⑨}\cdot\boxed{③})$。

計算基準日時点の被保険者集団の給与総額をB(円)とすると、$\boxed{⑩}$となるβは、

$\beta=\boxed{⑪}/(\alpha\cdot\sum_{x=\boxed{①}}^{\boxed{②}}\boxed{⑫})$。(1)の結果を代入して$\beta=(\boxed{⑪}\cdot\sum_{x=\boxed{①}}^{\boxed{②}}\boxed{⑥})/(\boxed{⑤}\cdot\sum_{x=\boxed{①}}^{\boxed{②}}\boxed{⑫})$

よって、毎年のx_0歳の新規被保険者の給与は$(\boxed{⑪}/\boxed{⑤})\cdot(\boxed{⑬}\cdot\sum_{x=\boxed{①}}^{\boxed{②}}\boxed{⑥}/\sum_{x=\boxed{①}}^{\boxed{②}}\boxed{⑫})$

となり、計算基準日時点の$\boxed{⑪}/\boxed{⑤}$に比例する。

問題3.Trowbridge モデルの年金制度において、財政方式として平準積立方式により運営する場合、以下の問に答えよ。ただし、記号の定義は問題 1.(2)および(4)と同じとし、添字Lは平準積立方式を示すものとする。(15 点)

(1)毎年 1 人当たり一定の額の保険料を${}^{L}P$とし、x_e歳で新規加入する被保険者について成り立っている収支相等の原則を計算基数を用いて等式に表わせ。さらに、この等式より${}^{L}P$を求めよ。

(2)また、x_e歳で将来に亘って制度に加入してくる者の給付現価S^fと人数現価G^fのそれぞれを無限等比級数(算式中に計算基数を用いてよい)として表現した上で、${}^{L}P = S^f / G^f$が(1)の${}^{L}P$と等しくなることを示せ。

(3)定常状態における平準積立方式の積立金の額は$S^p + S^a - {}^{L}P \cdot G^a$となることを、極限方程式${}^{L}C + d \cdot {}^{L}F = B$を変形させて求めよ。ただし、$C$は保険料収入、$F$は積立金残高、$d = 1 - v$および$B$は毎年の給付金である。

問題4. 保険料を給与の一定割合とし、年金給付として年金額は退職時給与b_{x_r}(円)と同額の終身年金を定年退職者にのみ支給する制度を考える。ここにx_rは定年年齢とし、以下の問に答えよ。(20 点)

(1)x歳の被保険者 1 人当たりの給付現価S_x、給与現価G_xを、x歳の給与を表すb_x(円)および計算基数、年金現価率を用いて表し、それらを用いて加入年齢をx_e歳としたときの加入年齢方式での標準保険料率P_{x_e}を示せ。

(2)集団Aの年齢別給与b_x^A(円)と、集団Bの年齢別給与b_x^B(円)との関係が
$b_x^A = a \cdot (x - x_e) + b_{x_e}$　　$b_x^B = \beta \cdot a \cdot (x - x_e) + b_{x_e}$　　ここに$(1 < a、1 < \beta)$であるとき、集団Aの加入年齢方式での標準保険料率$P_{x_e}^A$と、集団Bの加入年齢方式での標準保険料率$P_{x_e}^B$との大小を論ぜよ。

(3)同様の前提で、集団Bの年齢別給与b_x^B(円)のうち、年齢τ歳以上では集団Aの定年年齢の給与$b_{x_r}^A$(円)より大きくなることが判明したので年齢τ歳以上の集団Bの者の給与は$b_{x_r}^A$(円)とすることとし、給付および保険料率を決めることとした。この場合、集団Aの加入年齢方式での標準保険料率$P_{x_e}^A$と、集団Bの加入年齢方式での標準保険料率$P_{x_e}'^B$との大小を論ぜよ。

以上

(注)問題 1.(6)において出題時点では財政方式を「開放型総合保険料方式」と誤記していたため、それを「開放基金方式」に訂正して問題を掲載し、全ての受験者に配点をした。

年金数理 解答例

問題１.

番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
記号	A	B	E	D	D	A	E	C	B	E	C	A	D

問題１. の正答は上記であるが、以下に略解を付す。

(1)教科書P 40～42 より、(B)～(D)は正しい算式であり、(A)の算式は$\bar{a}_{xy}$の近似式を表しており(A)が誤りである。

(2)教科書P 91 より、(B)の算式が正しい。

(3)責任準備金の推移は、$(169+41-35)\times(1+i)=182$ より、$i=4.0\%$ であることが分かる。この年度の過去勤務債務償却特別保険料をUとして、予定利率 4%での資産運用収入が 5 となることから方程式

$5/0.04=100+41-35+U$ を解くと、$U=19$ となるから(E)が正解である。

(4)教科書P 92 のとおり未償却額は減少しないので(D)が正解である。

(5) $Ia_{\infty}=(1+i)/i^2$ であるから $(1+0.04)/0.04^2=650$ となるので（D）が正解である。

(6)年度末の変更前の貸借対照表は$U={}^{OAN}V-F$となっていた。ここに、

${}^{OAN}V=(S^p+S^a+S^f)-{}^{OAN}P\cdot(G^a+G^f)$ である。制度変更後の責任準備金は

${}^{OAN}V'=S^p+(1+\alpha)\cdot(S^a+S^f)-(1+\alpha)\cdot{}^{OAN}P\cdot(G^a+G^f)$ となり、制度変更後の過去勤務債務は、責任準備金額から年金資産額を控除した

$U'={}^{OAN}V'-F$ となるので、${}^{OAN}P=\dfrac{S^a_{FS}+S^f}{G^a+G^f}$ を代入して、

$U'=S^p+(1+\alpha)\cdot S^a_{PS}-F=U+\alpha\cdot S^a_{PS}$ ここに$U=S^p+S^a_{PS}-F$である。したがって(A)が正解である。

(7)①の方法による第 4 年度末の未償却過去勤務債務は$U/\ddot{a}^{(3.5\%)}_{\overline{5}|}$である。②のそれは、$U\cdot\{(1-\alpha)\cdot 1.035\}^4$であり、これらが一致するので

$\{(1-\alpha)\cdot 1.035\}^4=1/\ddot{a}^{(3.5\%)}_{\overline{5}|}=1/4.67308=0.21399\cdots$ より

$(1-\alpha)\cdot 1.035=0.6801413\cdots$ であるから、$\alpha=0.3428\cdots$ となり、(E)が正解で

ある。

(8)年金額の推移は当初額 1.0 で 2 回の後、2 回ずつ 1.05、1.10、1.15、1.20 となり、保証終了後は 0.60 となる。求める現価は「保証期間分現価＋$0.6\cdot N_{70}/D_{60}$」であり、保証期間分現価を計算すると「$0.95\ddot{a}_{\overline{10|}}$ ＋0.05 の 2 年間隔逓増現価分」となり、この式の第 2 項を、年金額が同じ年度分を括って、υ^2を乗じた数列の和との差を求めることにより、数式で表すと $\dfrac{0.05\cdot(1-\upsilon^{10})}{(1-\upsilon)^2\cdot(1+\upsilon)}-\dfrac{0.25\cdot\upsilon^{10}}{1-\upsilon}$ となるので、参照値のυおよびυ^{10}を用いて計算すると 1.137435…となる。また、保証後終身部分現価は 2.76461…であるから、合計は 0.95・8.10782+1.137435 +2.76461=11.60447…。したがって(C)が正解である。

(9) Pを剰余金を使用しない場合の保険料率、P'を剰余金を使用する場合の保険料率とすると、$P=\dfrac{S^a+S^f+S^p-F}{G^a+G^f}$、$P'=\dfrac{S^a+S^f+S^p-F-R}{G^a+G^f}$だから、保険料率の差は$P-P'=\dfrac{R}{G^a+G^f}$である。また、$G^a+G^f=L/d$より、制度全体の保険料は人数を乗じたものであるから

$\dfrac{L\cdot R}{G^a+G^f}=\dfrac{L\cdot R\cdot d}{L}=R\cdot d=\dfrac{i}{1+i}\cdot R$より(B)が正解である。

(10)$\dfrac{dF_A(t)}{dt}=4+t$、$\dfrac{dF_B(t)}{dt}=1+3\cdot t$より、$F_A(t)=C_A+4\cdot t+(1/2)\cdot t^2$

$F_B(t)=C_B+t+(3/2)\cdot t^2$であり、$F_A(0)=F_B(0)$より$C_A=C_B$。

$F_A(n)=F_B(n)$より、$4\cdot n+(1/2)\cdot n^2=n+(3/2)\cdot n^2$　　$n^2-3\cdot n=0$より

$n=3$だから(E)が正解である。

(11)特別保険料率は$PSL/(\ddot{a}_{\overline{10|}}\cdot\sum B)$＝10,000/(8.10782・100,000)≒0.01233…。したがって、端数処理後の特別保険料率 1.24%を用いて、給与が変わらないとした場合の各期末の過去勤務債務残高の推移および実際の給与に基づき償却された場合の過去勤務債務残高実績は、利息を考慮すると下記のとおり。

	計画値(n 年期初 PSL＝10,000)				実績値			
	給与	特別保険料	直後 PSL	期末 PSL	給与	特別保険料	直後 PSL	期末 PSL
n 年度	100,000	1,240	8,760	9,198	100,000	1,240	8,760	9,198
n+1 年度	100,000	1,240	7,958	8,356	96,000	1,190	8,008	8,408
n+2 年度	100,000	1,240	7,116	7,472	92,000	1,141	7,267	7,631
n+3 年度	100,000	1,240	6,232	6,543	88,000	1,091	6,539	6,866

この結果、差額は 6,866－6,543＝323 となり、(C)が正解である。

(12)教科書 P32 より、(A)が正解である。

(13)$(1+k)/(1+j)=\upsilon$ と置いて、第n年度始に支払不能になるとすれば、給付 B、保険料 C、積立金 F の関係から、

$F<(B-C)\cdot(1+\upsilon+\cdots+\upsilon^{n-1})$ を満たす最小のnを求めればよい。この式を変形すると $F<(B-C)\cdot\dfrac{1-\upsilon^n}{1-\upsilon}$ となり、これをnについて解いて

$$n=\left\langle\frac{\log\dfrac{i-j+(1+i)\cdot k}{i\cdot(1+j)}}{\log\dfrac{1+k}{1+j}}\right\rangle+1$$ となるから、(D)が正解である。

問題２ 教科書 P165～167 参照

番号	記号または算式
①	x_0
②	x_r-1
③	$(\alpha\cdot l_x)$
④	$L=L'$ または $L'=L$
⑤	L
⑥	l_x
⑦	l_{x_0}
⑧	e_{x_0}
⑨	$\beta\cdot b_x$
⑩	$B=B'$ または $B'=B$
⑪	B
⑫	$(b_x\cdot l_x)$
⑬	b_{x_0}

問題３．教科書Ｐ 64、P60 参照

(１) $P\cdot(D_{x_e}+D_{x_e+1}+D_{x_e+2}+\cdots\cdots+D_{x_r-1})=D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}$ より P を ^{L}P とすれば

$$^{L}P=\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x}$$

(２)

$$S^f=l_{x_e}^{(T)}\cdot(\upsilon+\upsilon^2+\cdots+\upsilon^\infty)\cdot(N_{x_r}/D_{x_e})=l_{x_e}^{(T)}\cdot\upsilon\cdot\ddot{a}_\infty\cdot(N_{x_r}/D_{x_e})=(\upsilon/d)\cdot l_{x_e}^{(T)}\cdot(N_{x_r}/D_{x_e})$$

$$G^f=l_{x_e}^{(T)}\cdot(\upsilon+\upsilon^2+\cdots+\upsilon^\infty)\cdot\left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x\right)/D_{x_e}=(\upsilon/d)\cdot l_{x_e}^{(T)}\cdot\left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x\right)/D_{x_e}=(\upsilon/d)\cdot\upsilon^{-x_e}\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x$$

$$S^f/G^f=\left\{(\upsilon/d)\cdot l_{x_e}^{(T)}\cdot\left(\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}}\right)\right\}/\left\{(\upsilon/d)\cdot l_{x_e}^{(T)}\cdot\left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x\right)/D_{x_e}\right\}=\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x}={}^{L}P$$

(３) $^{L}C+d\cdot{}^{L}F=B$ より

$$^{L}F=(B-{}^{L}C)/d=(B/d)-{}^{L}P\cdot(L/d)=S^p+S^a+S^f-{}^{L}P\cdot(G^a+G^f)$$

$$=S^p+S^a+S^f-{}^{L}P\cdot G^a-{}^{L}P\cdot G^f=S^p+S^a+S^f-{}^{L}P\cdot G^a-S^f=S^p+S^a-{}^{L}P\cdot G^a$$

ここに、B/d は給付 B の永久現価と考えれば過去・現在・将来にわたる全ての者の給付現価となるので、$B/d=S^p+S^a+S^f$ であること、および保険料は人数×保険料率であるから $^{L}C={}^{L}P\cdot L$ と表せ、L/d も人数 L の永久現価と考えれば現在被保険者および将来被保険者の人数現価となることを用いている。

問題４.教科書Ｐ 156～Ｐ 159

(１) $S_x=b_{x_r}\cdot D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}/D_x$ 、$G_x=\dfrac{\sum_{y=x}^{x_r-1}(b_y\cdot D_y)}{D_x}$ より、$P_{x_e}=\dfrac{b_{x_r}\cdot D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}(b_y\cdot D_y)}$

(２)まず、$\dfrac{b_x^B}{b_x^A}=\dfrac{\beta\cdot a\cdot(x-x_e)+b_{x_e}}{a\cdot(x-x_e)+b_{x_e}}=\beta-\dfrac{(\beta-1)\cdot b_{x_e}}{a\cdot(x-x_e)+b_{x_e}}$ であるので、a、β に関する条件から

$\dfrac{b_x^B}{b_x^A}$ は x について単調増加である。つぎに、

$$\frac{P_{x_e}^B}{P_{x_e}^A}=\frac{b_{x_r}^B\cdot D_{x_r}\cdot \ddot{a}_{x_r}}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}(b_y^B\cdot D_y)}\cdot\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}(b_y^A\cdot D_y)}{b_{x_r}^A\cdot D_{x_r}\cdot \ddot{a}_{x_r}}=\frac{b_{x_r}^B}{b_{x_r}^A}\cdot\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}(b_y^A\cdot D_y)}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}(b_y^B\cdot D_y)}$$ となり、$\frac{b_x^B}{b_x^A}$が単調増加

であることから

$\frac{b_{x_r}^B}{b_{x_r}^A}>\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}b_y^B}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}b_y^A}$ …①。 また、$\frac{b_x^A}{b_x^B}$が単調減少かつD_y が単調減少であるから、

$$\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}(b_y^B\cdot D_y)}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}b_y^B}<\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}(b_y^A\cdot D_y)}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}b_y^A}$$ より $$\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}(b_y^B\cdot D_y)}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}(b_y^A\cdot D_y)}<\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}b_y^B}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}b_y^A}$$ …②。 したがって、

①、②より

$$\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}(b_y^B\cdot D_y)}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}(b_y^A\cdot D_y)}<\frac{b_{x_r}^B}{b_{x_r}^A}\quad\therefore\frac{P_{x_e}^B}{P_{x_e}^A}>1\quad\therefore P_{x_e}^B>P_{x_e}^A$$

(3)年齢τ以上の者の給与は $b_{x_\tau}^B=b_{x_\tau+1}^B=b_{x_\tau+2}^B=\cdots\cdots=b_{x_r}^B=b_{x_r}^A$ となり、標準保険料を比較すると

$$\frac{P_{x_e}^A}{P_{x_e}'^B}=\frac{b_{x_r}^A}{b_{x_r}^B}\cdot\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}(b_y^B\cdot D_y)}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}(b_y^A\cdot D_y)}=\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}(b_y^B\cdot D_y)}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}(b_y^A\cdot D_y)}$$ であり、 $x_e<y<x_r$ では常に $b_y^A<b_y^B$ であるから

$$\therefore\frac{P_{x_e}^A}{P_{x_e}'^B}>1\quad\therefore P_{x_e}^A>P_{x_e}'^B$$