数学（問題）

［問題１から問題４を通じて、必要であれば（付表）に記載された数値を用いよ。］

問題１．次の各問の $\boxed{}$ に入る答のみを、所定の解答用紙に記入せよ。(36 点)

(1) ある電機メーカーは、工場 A, B, C でそれぞれ全体の 20%，30%，50%のテレビを作っている。一方、各工場で作るテレビはおのおの、1%，0.8%，0.12%が不良品であることがわかっている。今、１つのテレビが不良品であったとする。このとき、これが工場 A で作られた確率は $\boxed{}$ である。

(2) X_1, X_2, X_3 は互いに独立で、それぞれ平均 0、分散 σ^2 の確率変数とする。

$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3$，$Z = b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3$ （a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 は定数）と定義するとき、Y と Z の共分散 $cov(Y,Z)$ は、$cov(Y,Z) = k\sigma^2$ （k は定数）と表される。ここに、

$k = \boxed{}$ である。

(3) 確率変数 X が $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & (x > 0) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$ $(\alpha > 0, \lambda > 0)$ なる確率密度関数 $f(x)$ を持つとき、X の積率母関数（モーメント母関数）$m(\theta)$ は、$m(\theta) = \boxed{}$ $(\theta < \lambda)$ である。ここで、$\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である。

(4) 確率変数 X が $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ $(-\infty < x < \infty)$ なる確率密度関数 $f(x)$ を持つとき、$Y = \sqrt{|X|}$ の確率密度関数 $g(y)$ は、$g(y) = \begin{cases} \boxed{} & (y > 0) \\ 0 & (y \le 0) \end{cases}$ である。

(5) 確率変数X,Yは互いに独立で、共に区間$(0,1)$上の一様分布$U(0,1)$に従うとき、$Z=X-Y$の確率密度関数$f(z)$は、$f(z)=\begin{cases}\boxed{} & (-1<z<1)\\ 0 & (z\le -1, 1\le z)\end{cases}$ である。

(6) 値$0,1,2,\cdots,n$を取りうる確率変数Xが平均 np の二項分布に従っているとする。今、Xの積率母関数（モーメント母関数）を$m_n(\theta)$とする。このとき、$np=\lambda$（λは定数）の関係を保ったまま、$n\to\infty$とすると、$\lim_{n\to\infty} m_n(\theta)=$ $\boxed{}$ である。

(7) 確率変数$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$が互いに独立で、すべて平均１のポアソン分布に従っているとする。このとき、$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=P(\boxed{}\le n)$であり、右辺に中心極限定理を適用することにより、$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=$ $\boxed{}$ が得られる。

(8) ３個のさいころを同時に投げる試行をn回繰り返す。このとき、３個中少なくとも２個の目が１であるという事象がn回のうち奇数回起こる確率をp_nとすると、$p_n=$ $\boxed{}$ である。

問題２．次の各問の $\boxed{}$ に入る答のみを、所定の解答用紙に記入せよ。(36 点)

(1) $X_1,X_2,\cdots,X_6$を、確率密度関数$f(x;\alpha)=\frac{2x}{\alpha^2}\ (0\le x\le\alpha)$ を持つ母集団からの大きさ６の標本（標本変量）とする。このとき、母数αの推定量として、$\hat{\alpha}=C(X_1+X_2+\cdots+X_6)$（$C$は定数）を考えると、$\hat{\alpha}$が$\alpha$の不偏推定量となるのは、$C=$ $\boxed{}$ の場合である。

(2) ある工場で製造されている化学製品１個あたりの不純物の含有量（グラム）は正規分布$N(\mu,2.5^2)$に従うとする。今、母平均μを 0.5 グラム以内の誤差を許して推定したい。そのために無作為抽出して調査すべき最低限必要な標本の個数は $\boxed{}$ 個である。ただし、信頼係数は99%とする。

(3) 品種Aの種子50個と、品種Bの種子75個をまき、同一条件下で発芽実験を行ったところ、品種Aは25個が発芽し、品種Bは30個が発芽した。このとき、両品種の発芽率の差（品種Aの発芽率－品種Bの発芽率）を信頼係数95%で区間推定すると、信頼区間は（ $\boxed{}$, $\boxed{}$ ）（単位：%）である。（%表示で、小数点以下第2位を四捨五入して、小数点以下第1位まで求めよ。）

(4) ある工場で製造された電池の中から無作為に抽出した20個の標本の寿命の平均は325時間であった。電池の寿命が指数分布に従うとして、この指数分布の母平均（時間）を信頼係数95%で区間推定すると、信頼区間は（ $\boxed{}$, $\boxed{}$ ）（単位：時間）である。（小数点以下第3位を四捨五入して、小数点以下第2位まで求めよ。）

(5) 赤玉と白玉が入っている箱があり、その中身は次のいずれかであることがわかっているものとする。

a) 赤玉が10個で白玉が5個　　b) 赤玉が5個で白玉が10個

今、帰無仮説を「H_0 : a) が正しい」として、復元抽出法によって玉を1個ずつ取り出す試行を3回行ない、取り出した玉が3回のうち1回でも白玉であった時にH_0を棄却する。このとき、この検定の検出力（第2種の誤りをおかさない確率）は $\boxed{}$ である。（小数点以下第3位を四捨五入して、小数点以下第2位まで求めよ。）

(6) 正規母集団（母平均、母分散は未知）から次の10個の標本を得た。

0.40, −0.40, −0.37, −1.92, −1.13, 1.33, −2.21, −0.76, −1.29, 2.45

今、この10個の標本から、$\int_A^\infty f(x)dx = 0.05$ を満たすAの最尤推定値を求めると、

$\boxed{}$ である。ここで、$f(x)$はこの母集団分布の確率密度関数とする。（小数点以下第3位を四捨五入して、小数点以下第2位まで求めよ。）

(7) n個の確率変数$X_1, X_2, \cdots, X_n$は互いに独立で、それぞれ同一の分布に従う。この分布の分布関数および確率密度関数をそれぞれ$F(x), f(x)$とする。このとき、$X_{(1)} = min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$に対して、$Z = nF(X_{(1)})$で定義される確率変数$Z$の確率密度関数$g(z)$は、

$$g(z) = \begin{cases} \boxed{} & (z > 0) \\ 0 & (z \leq 0) \end{cases}$$ である。

(8) ８人の学生について、身長(x)（センチメートル）とひじから手首までの長さ(y)（センチメートル）を測定して下記のデータを得た。このデータから、yのxに対する回帰直線を求めると、$y = \boxed{}\ x + \boxed{}$ となる。（小数点以下第３位を四捨五入して、小数点以下第２位まで求めよ。）

項目	学生１	学生２	学生３	学生４	学生５	学生６	学生７	学生８	合計
x	172	175	184	173	185	168	169	166	1392
y	25	26	28	26	28	23	23	21	200
x^2	29584	30625	33856	29929	34225	28224	28561	27556	242560
y^2	625	676	784	676	784	529	529	441	5044
$x+y$	197	201	212	199	213	191	192	187	1592
xy	4300	4550	5152	4498	5180	3864	3887	3486	34917

問題３．Ａさんは毎朝自分の家で産まれる鶏の卵を隣の島に住むＢさんのところに届けることにしている。Ａさんは6時から6時30分の間に家を出発し、Ｂさんの住む島へ行く連絡船に乗るために港に向かうが、家から港までの所要時間は20分以上40分以下であるとする。ここで、Ａさんが家を出発する時刻と、家から港までの所要時間は互いに独立であり、ともに一様分布に従っているとする。

今、連絡船は6時45分発、所要時間55分の普通便と、7時5分発、所要時間50分の快速便の２便だけがあり、このどちらにも乗船できない場合は、その日はＡさんはＢさんの住む島には行かないものとする。なお、連絡船の発着時刻は必ず時間どおりであるものとする。

このとき、次の問に答えよ。(14点)

(1) Ａさんが普通便に乗船する確率を求めよ。なお、6時45分より前に港に着けば、Ａさんは必ず普通便に乗船するものとする。

(2) Ａさんが快速便に乗船する確率を求めよ。なお、6時45分以降で7時5分より前に港に着けば、Ａさんは必ず快速便に乗船するものとする。

(3) ＡさんがＢさんの住む島に到着する場合の到着時刻は平均して何時何分であるか。(1分未満を切り上げて、分単位で答えよ。)

問題４．A、B２つの農園で収穫されたトマトの重さに差があるかどうかを調査するため、それぞれの農園から同時期に収穫されたトマトから無作為に抽出した標本の重さを測定したところ、次のとおりであった。

A 農園：210, 198, 189, 204, 210, 199, 212, 197, 215, 186

B 農園：188, 175, 206, 194, 203, 197, 187, 182　　　　（単位：グラム）

A 農園、B 農園で収穫されたトマトの重さはそれぞれ正規分布に従うとして、次の問に答えよ。（14 点）

(1) A 農園、B 農園それぞれのトマトの重さの母分散は等しいと言えるか、有意水準 1%で検定せよ。

(2) 上記(1)の結果にかかわらず、A 農園、B 農園それぞれのトマトの重さの母分散は等しいと仮定したとき、A 農園、B 農園それぞれのトマトの重さの母平均は等しいと言えるか、有意水準 5%で検定せよ。

以　上

（付表）

I．標準正規分布の上側ε点：$u(\varepsilon)$

ε	0.159	0.050	0.025	0.023	0.010	0.005
$u(\varepsilon)$	1.000	1.645	1.960	2.000	2.326	2.576

II．自由度ϕのt分布の上側ε点：$t_{\phi}(\varepsilon)$

$\phi \diagdown \varepsilon$	0.100	0.050	0.025
15	1.341	1.753	2.131
16	1.337	1.746	2.120
17	1.333	1.740	2.110
18	1.330	1.734	2.101
19	1.328	1.729	2.093
20	1.325	1.725	2.086
21	1.323	1.721	2.080
22	1.321	1.717	2.074
23	1.319	1.714	2.069
24	1.318	1.711	2.064
25	1.316	1.708	2.060

III．自由度ϕのχ^2分布の上側ε点：$\chi^2_{\phi}(\varepsilon)$

$\phi \diagdown \varepsilon$	0.975	0.950	0.100	0.050	0.025
1	0.001	0.004	2.706	3.841	5.024
2	0.051	0.103	4.605	5.991	7.378
3	0.216	0.352	6.251	7.815	9.348
4	0.484	0.711	7.779	9.488	11.143
5	0.831	1.145	9.236	11.070	12.832
6	1.237	1.635	10.645	12.592	14.449
7	1.690	2.167	12.017	14.067	16.013
8	2.180	2.733	13.362	15.507	17.535
9	2.700	3.325	14.684	16.919	19.023
10	3.247	3.940	15.987	18.307	20.483
11	3.816	4.575	17.275	19.675	21.920
12	4.404	5.226	18.549	21.026	23.337
13	5.009	5.892	19.812	22.362	24.736
14	5.629	6.571	21.064	23.685	26.119
15	6.262	7.261	22.307	24.996	27.488
16	6.908	7.962	23.542	26.296	28.845
17	7.564	8.672	24.769	27.587	30.191
18	8.231	9.390	25.989	28.869	31.526
19	8.907	10.117	27.204	30.144	32.852
20	9.591	10.851	28.412	31.410	34.170

Ⅲ．自由度ϕのχ^2分布の上側ε点：$\chi^2_\phi(\varepsilon)$（続き）

$\phi \diagdown \varepsilon$	0.975	0.950	0.100	0.050	0.025
21	10.283	11.591	29.615	32.671	35.479
22	10.982	12.338	30.813	33.924	36.781
23	11.689	13.091	32.007	35.172	38.076
24	12.401	13.848	33.196	36.415	39.364
25	13.120	14.611	34.382	37.652	40.646
26	13.844	15.379	35.563	38.885	41.923
27	14.573	16.151	36.741	40.113	43.195
28	15.308	16.928	37.916	41.337	44.461
29	16.047	17.708	39.088	42.557	45.722
30	16.791	18.493	40.256	43.773	46.979
31	17.539	19.281	41.422	44.985	48.232
32	18.291	20.072	42.585	46.194	49.480
33	19.047	20.867	43.745	47.400	50.725
34	19.806	21.664	44.903	48.602	51.966
35	20.569	22.465	46.059	49.802	53.203
36	21.336	23.269	47.212	50.999	54.437
37	22.106	24.075	48.363	52.192	55.668
38	22.879	24.884	49.513	53.384	56.896
39	23.654	25.695	50.660	54.572	58.120
40	24.433	26.509	51.805	55.759	59.342
50	32.357	34.764	63.167	67.505	71.420
60	40.482	43.188	74.397	79.082	83.298
70	48.758	51.739	85.527	90.531	95.023
80	57.153	60.392	96.578	101.879	106.629
90	65.647	69.126	107.565	113.145	118.136
100	74.222	77.930	118.498	124.342	129.561

Ⅳ．分母の自由度m、分子の自由度nのF分布の上側ε点：$F^n_m(\varepsilon)$

$\varepsilon = 0.100$

$m \diagdown n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920
5	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323

Ⅳ．分母の自由度m、分子の自由度nのF分布の上側ε点：$F_m^n(\varepsilon)$（続き）

$\varepsilon = 0.050$

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.329	19.353	19.371	19.385	19.396
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.785
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.688	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978

$\varepsilon = 0.025$

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.506	39.000	39.166	39.248	39.298	39.331	39.356	39.373	39.387	39.398
3	17.443	16.044	15.439	15.101	14.885	14.735	14.624	14.540	14.473	14.419
4	12.218	10.649	9.979	9.604	9.364	9.197	9.074	8.980	8.905	8.844
5	10.007	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.619
6	8.813	7.260	6.599	6.227	5.988	5.820	5.695	5.600	5.523	5.461
7	8.073	6.542	5.890	5.523	5.285	5.119	4.995	4.899	4.823	4.761
8	7.571	6.059	5.416	5.053	4.817	4.652	4.529	4.433	4.357	4.295
9	7.209	5.715	5.078	4.718	4.484	4.320	4.197	4.102	4.026	3.964
10	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.950	3.855	3.779	3.717

$\varepsilon = 0.01$

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388	99.399
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814
9	10.561	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257
10	10.044	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849

$\varepsilon = 0.005$

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.501	199.000	199.166	199.250	199.300	199.333	199.357	199.375	199.388	199.400
3	55.552	49.799	47.467	46.195	45.392	44.838	44.434	44.126	43.882	43.686
4	31.333	26.284	24.259	23.155	22.456	21.975	21.622	21.352	21.139	20.967
5	22.785	18.314	16.530	15.556	14.940	14.513	14.200	13.961	13.772	13.618
6	18.635	14.544	12.917	12.028	11.464	11.073	10.786	10.566	10.391	10.250
7	16.236	12.404	10.882	10.050	9.522	9.155	8.885	8.678	8.514	8.380
8	14.688	11.042	9.596	8.805	8.302	7.952	7.694	7.496	7.339	7.211
9	13.614	10.107	8.717	7.956	7.471	7.134	6.885	6.693	6.541	6.417
10	12.826	9.427	8.081	7.343	6.872	6.545	6.302	6.116	5.968	5.847

数学 解答

問題１と問題２は、確率と統計の出題範囲全般について基礎的な知識を有するかどうかを、穴埋形式で問う問題である。

問題１．

（１）テレビが不良品であるという事象をN、工場A, B, Cで作られたという事象をA, B, Cで表すと、ベイズの定理から、

$$
\begin{aligned}
P(A|N) &= \frac{P(A)\times P(N|A)}{P(A)\times P(N|A)+P(B)\times P(N|B)+P(C)\times P(N|C)} \\
&= \frac{20\%\times 1\%}{20\%\times 1\% + 30\%\times 0.8\% + 50\%\times 0.12\%} \\
&= \boxed{\frac{2}{5}}
\end{aligned}
$$

（２）

$$
\begin{aligned}
cov(Y,Z) &= E[(Y-E(Y))(Z-E(Z))] = E[(a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3)(b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3)] \\
&= E\Big[a_1b_1X_1{}^2 + a_2b_1X_1X_2 + a_3b_1X_1X_3 + a_1b_2X_1X_2 + a_2b_2X_2{}^2 + a_3b_2X_2X_3 \\
&\quad a_1b_3X_1X_3 + a_2b_3X_2X_3 + a_3b_3X_3{}^2\Big] \\
&= E\Big[a_1b_1X_1{}^2 + a_2b_2X_2{}^2 + a_3b_3X_3{}^2 \\
&\quad + (a_2b_1+a_1b_2)X_1X_2 + (a_3b_1+a_1b_3)X_1X_3 + (a_3b_2+a_2b_3)X_2X_3\Big]
\end{aligned}
$$

ここで、$E[X_1]=E[X_2]=E[X_3]=0$で、X_1, X_2, X_3は互いに独立であるから、

$E[X_1X_2]=E[X_2X_3]=E[X_3X_1]=0$。

また、$E[X_1^2]=V[X_1]-E[X_1]^2=V[X_1]$ より、$\mathrm{cov}(Y,Z)=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\sigma^2$ となる。

したがって、$k=\boxed{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$

（３）$m(\theta)=\int_0^\infty e^{\theta x}\cdot\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-(\lambda-\theta)x}dx$

$\theta<\lambda$に対して、$(\lambda-\theta)x=s$ $(s>0)$と置換して、

$$
m(\theta)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\left(\frac{s}{\lambda-\theta}\right)^{\alpha-1}e^{-s}\frac{1}{\lambda-\theta}ds=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\lambda-\theta)^\alpha}\int_0^\infty s^{\alpha-1}e^{-s}ds=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\lambda-\theta)^\alpha}\Gamma(\alpha)
$$

$$
=\frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-\theta)^\alpha}=\boxed{\left(1-\frac{\theta}{\lambda}\right)^{-\alpha}}\quad(\theta<\lambda)
$$

（4） $y>0$の場合、

$$P\left(\sqrt{|X|}\le y\right)=P\left(|X|\le y^2\right)=\int_{-y^2}^{y^2}\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}dx$$

$$=\int_0^{y^2}\frac{2}{\pi\left(1+x^2\right)}dx\quad\left(\because\ \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}\text{は偶関数}\right)$$

よって、$g(y)=\dfrac{d}{dy}P\left(\sqrt{|X|}\le y\right)=\dfrac{2}{\pi\left(1+y^4\right)}\times 2y=\boxed{\dfrac{4y}{\pi\left(1+y^4\right)}}$

（5） $Z=X-Y,W=Y$ とすると、$X=Z-Y,Y=W,\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(z,w)}\right|=1,0<x<1,0<y<1$

よって、$-1<z<1,0<w<1$で、$f(z)=\int_0^1 f(z+w)f(w)dw$

ここで、$f(z+w)=1$ となるのは、$0<z+w<1,\ -z<w<1-z$であるから、

$0<z<1$のとき、$f(z)=\int_0^1 f(z+w)f(w)dw=\int_0^{1-z}dw=1-z$

$-1<z<0$のとき、$f(z)=\int_0^1 f(z+w)f(w)dw=\int_{-z}^1 dw=1+z$

よって、$-1<z<1$のとき、$f(z)=\boxed{1-|z|}$

（6） 平均npの二項分布に従う確率変数Xの積率母関数$m_n(\theta)$は、

$$m_n(\theta)=E\left(e^{\theta X}\right)=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k p^k(1-p)^{n-k}e^{\theta k}=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\left(pe^\theta\right)^k(1-p)^{n-k}=\left(pe^\theta+1-p\right)^n$$

$$=\left(1+p\left(e^\theta-1\right)\right)^n$$

ここで、$p=\dfrac{\lambda}{n}$より、$m_n(\theta)=\left(1+\dfrac{\lambda}{n}\left(e^\theta-1\right)\right)^n$

$\dfrac{\lambda}{n}\left(e^\theta-1\right)=t$とすれば、$\lim\limits_{n\to\infty}m_n(\theta)=\left(1+\dfrac{\lambda}{n}\left(e^\theta-1\right)\right)^n=\lim\limits_{t\to 0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{\lambda\left(e^\theta-1\right)}=\boxed{e^{\lambda\left(e^\theta-1\right)}}$

（7） 確率変数$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$は互いに独立で、すべて平均１のポアソン分布に従うから、
$E(X_i)=1,V(X_i)=1\,(i=1,2,\cdots,n)$。

このとき、ポアソン分布の再生性より$X_1+X_2+\cdots+X_n$は平均nのポアソン分布に従う

から、$P\left(\boxed{X_1+X_2+\cdots+X_n}\leq n\right)=e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$

ここで、中心極限定理より、

$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=P(X_1+X_2+\cdots+X_n\leq n)=P\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-n}{\sqrt{n}}\leq 0\right)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\boxed{\frac{1}{2}}$$

（8）３個のさいころを投げたとき、３個中少なくとも２個の目が１である確率は、

$\left(\frac{1}{6}\right)^3+{}_3C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{216}+\frac{5}{216}=\frac{16}{216}=\frac{2}{27}$ である。p_n は n 回のうち、奇数回前述の事象の起こる確率であるから、次の漸化式が成り立つ：

$$p_n=p_{n-1}\cdot\left(1-\frac{2}{27}\right)+(1-p_{n-1})\cdot\frac{2}{27}=\frac{23}{27}p_{n-1}+\frac{2}{27}$$

これより、

$$p_n-\frac{1}{2}=\frac{23}{27}\left(p_{n-1}-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{23}{27}\right)^2\left(p_{n-2}-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{23}{27}\right)^3\left(p_{n-3}-\frac{1}{2}\right)=\cdots$$

$$=\left(\frac{23}{27}\right)^n\left(p_0-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{23}{27}\right)^n\quad(\because p_0=0)$$

よって、$p_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{23}{27}\right)^n=\boxed{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{23}{27}\right)^n\right\}}$

問題２.

（1）$E(X_1)=\cdots=E(X_6)=\int_0^{\alpha}\frac{2x^2}{\alpha^2}dx=\left[\frac{2x^3}{3\alpha^2}\right]_0^{\alpha}=\frac{2\alpha}{3}$

よって、$E(\hat{\alpha})=E\{C(X_1+\cdots X_6)\}=C\times 6\times\frac{2\alpha}{3}=4\alpha C$

従って、$E(\hat{\alpha})=\alpha$ となるのは、$C=\boxed{\frac{1}{4}}$ のときである。

（2）$\overline{X}$を標本平均、nを標本数とすると、$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{2.5^2}{n}}}$は正規分布$N(0,1)$に従うから、

$P\left\{\overline{X}-u\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\cdot\dfrac{2.5}{\sqrt{n}}\leq\mu\leq\overline{X}+u\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\cdot\dfrac{2.5}{\sqrt{n}}\right\}=1-\varepsilon$である。

ここで、$\varepsilon=1\%$のとき、$u\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)=2.576$なので、題意を満たすには、$2.576\times\dfrac{2.5}{\sqrt{n}}\leq 0.5$となればよい。

よって、$n\geq 165.8944$。従って、最低限必要な標本の個数は$\boxed{166}$個。

（3）品種A, Bの母集団発芽率をp_1, p_2、標本数をn_1, n_2、標本発芽率を$\hat{p}_1, \hat{p}_2$とすると、p_1-p_2の信頼係数95%の信頼区間は$\left(\hat{\delta}_L, \hat{\delta}_U\right)$、ここで、

$$\hat{\delta}_L=\hat{p}_1-\hat{p}_2-u\left(\frac{0.05}{2}\right)\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

$$\hat{\delta}_U=\hat{p}_1-\hat{p}_2+u\left(\frac{0.05}{2}\right)\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

となる。

$n_1=50, n_2=75, \hat{p}_1=\dfrac{25}{50}=0.5, \hat{p}_2=\dfrac{30}{75}=0.4, u\left(\dfrac{0.05}{2}\right)=1.960$より、

$$\hat{\delta}_L=0.5-0.4-1.960\times\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{50}+\frac{0.4(1-0.4)}{75}}=-0.0774855\cdots$$

$$\hat{\delta}_U=0.5-0.4+1.960\times\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{50}+\frac{0.4(1-0.4)}{75}}=0.2774855\cdots$$

従って、求める信頼区間は（$\boxed{-7.7}$, $\boxed{27.7}$）

※2019年10月 一部誤植を訂正。

（4）母平均をμ、標本平均を$\overline{X}$、標本数を$n(=20)$とすると、$\dfrac{2n\overline{X}}{\mu}$は自由度$2n$の$\chi^2$分布に従うことから、$P\left(\chi^2_{40}(0.975)\leq\dfrac{2n\overline{X}}{\mu}\leq\chi^2_{40}(0.025)\right)=0.05$となる。

従って、μの信頼係数95%の信頼区間は$\dfrac{2n\bar{x}}{\chi^2_{40}(0.025)}\leq\mu\leq\dfrac{2n\bar{x}}{\chi^2_{40}(0.975)}$である。

ここで、$n=20, \bar{x}=325, \chi^2_{40}(0.975)=24.433, \chi^2_{40}(0.025)=59.342$を代入すると、求める信頼区間は、（$\boxed{219.07}$, $\boxed{532.07}$）となる。

（5）(第2種の誤りの起こる確率)

$=P(H_0$ が正しくないときに H_0 を採択する$)=P(H_1$ が正しいときに H_1 を採択する$)$

$=P$(3個の玉の中に白玉が1つも入らない｜赤玉が5個、白玉が10個)

$=\left(\frac{5}{15}\right)^3=0.037\cdots$ であるから、

検出力＝1−(第2種の誤りの起こる確率)＝1−0.037…＝0.963…

従って、求める検出力は $\boxed{0.96}$

（6）題意より、$\int_A^\infty f(x)dx=\int_{\frac{A-\mu}{\sigma}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0.05$ である。

$\frac{A-\mu}{\sigma}=u(0.05)=1.645$ であり、これを C と置くと、$\sigma=\frac{A-\mu}{C}$ となる。

ここで、尤度関数 $L(x)=\prod_{i=1}^n f(x_i)$ を μ と A の関数として、

$log\, L(\mu,A)=n\, log\left(\frac{C}{\sqrt{2\pi}(A-\mu)}\right)-\frac{C^2}{2(A-\mu)^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2$ を考え、これを A と μ でそれぞれ偏微分して、

$$\frac{\partial}{\partial A}log\, L=-\frac{n}{A-\mu}+\frac{C^2}{(A-\mu)^3}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2=0 \quad (①)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu}log\, L=\frac{n}{A-\mu}+\frac{C^2}{(A-\mu)^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)-\frac{C^2}{(A-\mu)^3}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2=0 \quad (②)$$

ここで、①、②の両辺をそれぞれ足すと、$\frac{C^2}{(A-\mu)^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)=0$

従って、$\mu=\bar{x}$（$\bar{x}$ は標本平均）である。

これを①に代入して、A について解くと、$A=\bar{x}+C\sqrt{S^2}$（S^2 は標本分散）となる。

与えられた10個の標本値より、$\bar{x}=-0.39, S^2=1.87964$ となるので、A の最尤推定値は、

$-0.39+1.645\times\sqrt{1.87964}=\boxed{1.87}$ となる。

（7） $X_{(1)}$ の確率密度関数を $h(x)$ とすると、

$$h(x)=\frac{n!}{(n-1)!}(1-F(x))^{n-1}f(x)=n(1-F(x))^{n-1}f(x)$$

今、$Z\equiv nF(X_{(1)})$ と変換する。

$z\geq 0$ のとき、$z=nF(x)\left(\Leftrightarrow F(x)=\frac{z}{n}\right)$ と変換すると、

$$\frac{dz}{dx}=n\cdot F'(x)\Rightarrow dz=n\cdot f(x)dx\Rightarrow dx=\frac{1}{n\cdot f(x)}dz$$

従って、Z の確率密度関数 $g(z)$ は、$g(z)=n\left(1-\frac{z}{n}\right)^{n-1}f(x)\cdot\frac{1}{nf(x)}=\left(1-\frac{z}{n}\right)^{n-1}$

また、$z<0$ のときは、明らかに、$g(z)=0$。

以上により、$g(z)=\begin{cases}\boxed{\left(1-\frac{z}{n}\right)^{n-1}} & (z\geq 0)\\ 0 & (z<0)\end{cases}$

（8） 求める回帰直線を $y-\bar{y}=\beta(x-\bar{x})$ とすると、$\bar{x}=\frac{1392}{8}=174, \bar{y}=\frac{200}{8}=25$ であり、

$$\beta=\frac{\sum_{i=1}^{8}x_iy_i-8\bar{x}\times\bar{y}}{\sum_{i=1}^{8}x_i^2-8\bar{x}^2}=\frac{34917-8\times174\times25}{242560-8\times174^2}=\frac{117}{352}\text{ となる。}$$

従って、求める回帰直線は、$y-25=\frac{117}{352}(x-174)$ より、

$y=\boxed{0.33}\times x\ \boxed{-32.84}$

問題3. *問題3は確率分野の記述問題であるが、題意を落ち着いて把握すれば容易な問題である。容易なだけに、ほとんど結果だけを書いて、途中の説明が貧弱な答案が散見されたのは残念であった。*

（1） Aさんが家を出発する時刻を6時 X 分、家から港までの所要時間を Y 分とすると、X,Y は独立な確率変数で、それぞれ区間 $(0,30)$、$(20,40)$ 上の一様分布に従い、それぞれの確率密度関数は、$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{30} & (0<x<30)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{20} & (20<y<40)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$ となる。

ここで、Ａさんが６時４５分発の普通便に乗船する確率p_1は、$p_1=\iint_{D_1}\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{20}dxdy$、積分の範囲は$D_1=\{(x,y)|0<x<30, 20<y<40, x+y<45\}$である。

よって、

$$p_1=\frac{1}{600}\int_{20}^{40}dy\int_{0}^{45-y}dx=\frac{1}{600}\int_{20}^{40}(45-y)dy=\frac{1}{600}\left[45y-\frac{1}{2}y^2\right]_{20}^{40}$$
$$=\frac{1}{600}\left\{\left(45\times40-\frac{40^2}{2}\right)-\left(45\times20-\frac{20^2}{2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}$$

（２）Ａさんが７時５分発の快速便に乗船する確率p_2は、$p_2=\iint_{D_2}\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{20}dxdy$。

ここで、積分の範囲は$D_2=\{(x,y)|0<x<30, 20<y<40, 45<x+y<65\}$である。

よって、

$$p_2=\frac{1}{600}\int_{20}^{35}dy\int_{45-y}^{30}dx+\frac{1}{600}\int_{35}^{40}dy\int_{45-y}^{65-y}dx=\frac{1}{600}\int_{20}^{35}(y-15)dy+\frac{1}{600}\int_{35}^{40}20dy$$
$$=\frac{1}{600}\left[\frac{1}{2}y^2-15y\right]_{20}^{35}+\frac{1}{600}\times20\times5$$
$$=\frac{1}{600}\left\{\left(\frac{35^2}{2}-15\times35\right)-\left(\frac{20^2}{2}-15\times20\right)\right\}+\frac{1}{600}\times20\times5$$
$$=\frac{23}{48}$$

（３）（１）と（２）より、Ａさんが普通便に乗る確率（到着時刻７時４０分）、快速便に乗る確率（到着時刻７時５５分）に島に着く確率、連絡船に乗れない確率はそれぞれ、

$p_1=\frac{1}{2}, p_2=\frac{23}{48}, p_3=1-p_1-p_2=\frac{1}{48}$である。

よって、ＡさんがＢさんの島に到着するという条件の下での平均到着時刻は、

$\dfrac{40\times\frac{1}{2}+55\times\frac{23}{48}}{\frac{1}{2}+\frac{23}{48}}=\dfrac{2225}{47}=47.34\cdots\to48$より、７時４８分となる。

問題４．*問題４は統計分野の記述問題である。統計的検定の典型的な問題であり、データの処理、計算を正確にやれば、容易に解答できたものと思われる。*

A農園、B農園それぞれの標本値を

$x_i, y_j \left(i = 1,2,\cdots,10; j = 1,2,\cdots,8\right)$ とし、

$$u_i = x_i - 200$$

$$v_j = y_j - 190$$

とすると、右表より、

$$\bar{u} = \frac{20}{10} = 2.0$$

$$\bar{v} = \frac{12}{8} = 1.5$$

$$s_u{}^2 = \frac{916}{10} - \bar{u}^2 = 87.60$$

$$s_v{}^2 = \frac{792}{8} - \bar{v}^2 = 96.75$$

x_i	u_i	$u_i{}^2$
210	10	100
198	−2	4
189	−11	121
204	4	16
210	10	100
199	−1	1
212	12	144
197	−3	9
215	15	225
186	−14	196
計	20	916

y_j	v_j	$v_j{}^2$
188	−2	4
175	−15	225
206	16	256
194	4	16
203	13	169
197	7	49
187	−3	9
182	−8	64
計	12	792

であるから、

$$\bar{x} = 200 + \bar{u} = 202.0, \quad \bar{y} = 190 + \bar{v} = 191.5$$

$$s_x{}^2 = s_u{}^2 = 87.60, \quad s_y{}^2 = s_v{}^2 = 96.75$$

（１）等分散性の検定を行う。

不偏分散比をF_0（1より大にするように気をつけて）とすると、$n_x = 10$, $n_y = 8$であるから、

$$F_0 = \frac{n_y s_y{}^2 / \left(n_y - 1\right)}{n_x s_x{}^2 / \left(n_x - 1\right)} = \frac{8 \times 96.75 / (8-1)}{10 \times 87.60 / (10-1)} = 1.136 < 6.885 = F_9{}^7(0.005)$$

従って、等分散性が認められ、A農園、B農園のトマトの重さの母分散は等しいと言える。

（２）A農園、B農園それぞれの母集団分布の母平均をμ_x, μ_yとおき、

帰無仮説　H_0： $\mu_x = \mu_y$　　対立仮説　H_1： $\mu_x \neq \mu_y$

として検定（ｔ－検定）を行う。（題意より等分散性は仮定されている）

$$|\bar{x}-\bar{y}|=10.5>10.212=t_{n_x+n_y-2}(0.025)\sqrt{\frac{n_x s_x{}^2+n_y s_y{}^2}{n_x+n_y-2}\left(\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}\right)}$$

$$=2.120\times\sqrt{\frac{10\cdot 87.60+8\cdot 96.75}{10+8-2}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{8}\right)}$$

$$\left[\,|t|=\frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{\frac{n_x s_x{}^2+n_y s_y{}^2}{n_x+n_y-2}\left(\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}\right)}}=2.180>2.120=t_{16}(0.025)\,\right]$$

従って、H_0は棄却され、

A農園、B農園のトマトの重さの平均は等しいとは言えない。

以　上