数学１（問題）

問題１．次の各問の $\boxed{}$ に入る答のみを、所定の解答用紙に記入せよ。（４５点）

(1) 確率変数 X が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとし、その確率密度関数を $f(x)$ とする。

このとき、$-log_e f(X)$ の期待値は $E(-log_e f(X))=\frac{1}{2}log_e(\boxed{})$ である。

(2) 確率変数 X_1,X_2,X_3 の同時密度関数が、

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases} e^{-(x_1+x_2+x_3)} & (x_1>0,x_2>0,x_3>0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$ で与えられるとき、

$U=X_1+X_2+X_3$ の確率密度関数は $f(u)=\begin{cases} \boxed{} & (u>0) \\ 0 & (u\leq 0) \end{cases}$ である。

(3) 次の関数 $f(x,y)$ がある確率変数 X,Y の同時密度関数であるという。

$$f(x,y)=\begin{cases} K\cdot cos(x+y) & \left(-\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\leq y\leq\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

このとき、定数 $K=\boxed{}$ である。

(4) 数直線上の点1, 2, 3, 4, 5のいずれかの位置を時間の経過とともに移動してゆく粒子がある。点 $i\ (i=2,3,4)$ に粒子があるという条件のもとで（それ以前の経過には無関係に）、次の1秒後に点 $i-1,\ i,\ i+1$ にある確率はそれぞれ $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}$ であり、点１または点５に達するとそこで運動を停止する。このとき、はじめ点４にあった粒子が４秒後に点１にある確率は $\boxed{}$ 、点５にある確率は $\boxed{}$ である。

(5) n 個の玉を $m\ (>n)$ 個の箱に無作為に入れていく。n 個の玉には区別がなく、箱には複数の玉を入れることができるものとした場合、あらかじめ指定した n 個の箱に玉が１つずつ入る確率は $\boxed{}$ である。

(6) １家族に子供が n 人いる確率は $(1-p)p^n\ \ (n\geq 0, 0<p<1)$ であるとする。子供が男である確率および女である確率はともに $\frac{1}{2}$ であるとしたとき、ある家族に男の子供が k 人いる確率は

$(1-p)\dfrac{(\boxed{})^k}{(\boxed{})^{k+1}}$ となる $(k\geq 0)$。

(7) ある２人の友人ＡとＢが同じレストランに時点０と１の間の任意の時点にそれぞれ独立に入店する。２人とも食事に要する時間（入店してから食べ終えて店を出るまでの時間）は t_0 $(0<t_0<1)$ であるとする。このとき、２人がレストラン店内で出会う（同時点にレストラン店内にいる）確率は $\boxed{}$ である。なお、２人ともレストランを出た後に再度入店することはないものとする。

(8) 確率変数 X,Y に対して、それぞれの平均を μ_X,μ_Y、標準偏差を σ_X,σ_Y、相関係数を $\rho(X,Y)$ とする。

今、$\rho(X,Y)=1$ であるとすると、X,Y の間には次の関係 $X+c_1Y+c_2=0$ が成り立つ。

ここで、c_1 および c_2 は $\mu_X,\mu_Y,\sigma_X,\sigma_Y$ の中で必要な記号を用いた算式で表され、

$c_1=\boxed{}$, $c_2=\boxed{}$ である。

(9) ある校庭に南北の方向に１本のまっすぐの白線が引いてある。ある人が、この白線上にある点Ａから西へ５メートルの点に立ち、コインを投げて、表が出たときは東へ１メートル、裏が出たときは北へ１メートル移動し、白線に達するまでこれを続ける。

この人が点Ａから n メートル北にある白線上の点に到達する確率を p_n で表す場合、p_n の最大値は $\boxed{}$ である。なお、この校庭は十分広く、また、表が出る確率および裏が出る確率はともに $\frac{1}{2}$ とする。

問題２．次の文中の①から⑩の空欄に当てはまる最も適当な数値あるいは算式を所定の解答用紙に記入せよ。（２０点）

(1) 多項分布$\left\{\dfrac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}p_1{}^{k_1}p_2{}^{k_2}\cdots p_r{}^{k_r}\right\}$に従う$r$次元確率変数$(X_1,X_2,\cdots,X_r)$の積率母関数を求め、これより$X_i$の平均値、分散および$X_i$と$X_j$の相関係数$(i\neq j)$を計算する。

$P\{X_1=k_1,X_2=k_2,\cdots,X_r=k_r\}=\dfrac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$（ここに、$k_1,k_2,\cdots,k_r$は正または０の整数で$k_1+k_2+\cdots+k_r=n$）であるから、$(X_1,X_2,\cdots,X_r)$の積率母関数は

$\phi(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_r)=\sum\limits_{\substack{k_1+\cdots+k_r=n\\k_1\geq 0,\cdots,k_r\geq 0}}e^{\theta_1k_1+\cdots+\theta_rk_r}\dfrac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$　となる。

多項定理を用いて変形すると、$\phi(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_r)=(\boxed{①})^n$ である。

よって、X_iの積率母関数は$\phi_i(\theta_i)=(\boxed{②})^n$ となり、これからX_iの平均値および分散はそれぞれ、$E(X_i)=\boxed{③}$，$V(X_i)=\boxed{④}$ となる。

次に$i\neq j$のときのX_iとX_jの相関係数を求める。

$\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\theta_i\partial\theta_j}=n(n-1)\cdot(\boxed{①})^{n-2}\cdot\boxed{⑤}$　より、

$E(X_i\cdot X_j)=n(n-1)\cdot\boxed{⑥}$　が求まる。

さらに、X_iとX_jの共分散は$C(X_i,X_j)=E(X_i\cdot X_j)-E(X_i)E(X_j)$であるので、$X_i$と$X_j$の相関係数は$\rho(X_i,X_j)=\boxed{⑦}$　となる。

(2)　次に、$np_1 = \lambda_1, np_2 = \lambda_2, \cdots, np_{r-1} = \lambda_{r-1}$　($\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{r-1}$ は正の整数) なる関係を保ちながら、$n \to \infty$ とするとき、$(r-1)$次元確率変数$(X_1, X_2, \cdots, X_{r-1})$の積率母関数の極限を求める。

(1)より、$(X_1, X_2, \cdots, X_r)$の積率母関数は$\phi(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r) = (\boxed{①})^n$　である。

よって、$(X_1, X_2, \cdots, X_{r-1})$の積率母関数は$\psi(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{r-1}) = (\boxed{⑧})^n$　となる。

今、$p_r = 1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{r-1}, p_1 = \dfrac{\lambda_1}{n}, p_2 = \dfrac{\lambda_2}{n}, \cdots, p_{r-1} = \dfrac{\lambda_{r-1}}{n}$ であるから、

$\psi(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{r-1}) = \left(1 + \dfrac{1}{n} \times K\right)^n$　の形に変形できる。ここに、$K = \boxed{⑨}$ である。

ここで、$\dfrac{1}{n} \times K = x$ とおけば、$\psi(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{r-1}) = \left[(1+x)^{1/x}\right]^K$ となる。

$n \to \infty$ のとき $x \to 0$ であるから、$\lim_{n \to \infty} \psi(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{r-1}) = \boxed{⑩}$ である。

問題３．X, Y は互いに独立な確率変数で、それぞれ次の確率密度関数 $f_X(x), f_Y(y)$ を持つものとする。

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x|<1), \qquad f_Y(y) = \frac{y}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \quad (y>0)$$

今、確率変数 U を $U = XY$ と定義するとき、U の確率密度関数を求めることにより、U がどのような分布に従うかを答えよ。（１５点）

問題４．$X_1, X_2, \cdots$ は同じ確率分布を持つ独立な確率変数列であり、各 X_k $(k=1,2,\cdots)$ は $\{0,1,2,\cdots,9\}$ という値をそれぞれ確率 $\frac{1}{10}$ でとるものとする。

今、$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{10^k}$ とおくとき、次の問に答えよ。（２０点）

(1) $n \to \infty$ のとき、$\{Y_n\}$ はある確率変数 Y に法則収束する。Y はどのような分布に従うか答えよ。（理由・証明等は不要。結果のみ答えよ。）

(2) Y_n の特性関数は $n \to \infty$ のとき、Y の特性関数に収束することを示せ。

なお、一般に確率変数 X の特性関数 $\varphi(t)$ は $\varphi(t) = E\left(e^{itX}\right)$（ここに、$i = \sqrt{-1}$）で定義される。

［参考］（法則収束の定義）

確率変数列 $U_1, U_2, \cdots, U_n, \cdots$ が $n \to \infty$ のときに確率変数 U に法則収束するとは、U_n と U の分布関数をそれぞれ $F_n(u), F(u)$ としたとき、$F(u)$ のすべての連続点 u において $\lim_{n\to\infty} F_n(u) = F(u)$ が成り立つことをいう。

以　上

数学１ 解答

問題１． *数学１の範囲全般について、基礎的と思われる問題を出題とした。計算量が多かったかもしれないが、全体に解法の道筋はつけやすい問題ばかりであるので、計算ミスなどをせずに、できる問題を着実に解答することが望まれる。*

番号	解答	
(1)	$2\pi e\sigma^2$	
(2)	$\frac{1}{2}u^2e^{-u}$	
(3)	$\frac{1}{2}$	
(4)	点１：$\frac{1}{4}$	点５：$\frac{89}{324}$
(5)	$\frac{(m-1)!n!}{(n+m-1)!}$	
(6)	$(1-p)\frac{\left(\frac{p}{2}\right)^k}{\left(1-\frac{p}{2}\right)^{k+1}}$	
(7)	$t_0(2-t_0)$	
(8)	$c_1=-\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$	$c_2=-\mu_X+\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\mu_Y$
(9)	$\frac{35}{256}$	

（１）X の確率密度関数は $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ であるから、

$$-log_e f(x)=-log_e\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)=log_e\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)+\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}。$$

よって、

$$E(-log_e f(x))=log_e\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)+\frac{1}{2\sigma^2}E\left((X-\mu)^2\right)=\frac{1}{2}log_e\left(2\pi\sigma^2\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}log_e\left(2\pi e\sigma^2\right)$$

（2） $u=x_1+x_2+x_3, v=x_2, w=x_3$ とおいて、これを x_1,x_2,x_3 について解けば、

$x_1=u-v-w, x_2=v, x_3=w$ 。また、 $\dfrac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1$ 。

これより、確率変数 $U=X_1+X_2+X_3, V=X_2, W=X_3$ の同時密度関数は

$$f_{U,V,W}(u,v,w)=f_{X_1,X_2,X_3}(u-v-w,v,w)\cdot\left|\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(u,v,w)}\right|=\begin{cases}e^{-u} & (u-v-w>0, v>0, w>0)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

となる。

よって、U の確率密度関数 $f(u)$ は $u>0$ に対して、

$$f(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_{U,V,W}(u,v,w)dvdw=\int_0^u dv\int_0^{u-v}e^{-u}dw=\int_0^u(u-v)e^{-u}dv=\left(uv-\frac{1}{2}v^2\right)e^{-u}\Big]_0^u=\frac{1}{2}u^2e^{-u}$$

$u\leq 0$ の場合は $f(u)=0$

（3） $f(x,y)$ が同時密度関数であるので、 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$ となる。

ここで、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=K\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}cos(x+y)dxdy=K\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[sin(x+y)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}dx=K\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left\{sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}dx$$

$$=K\left[-cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2K$$

よって、$2K=1$ より、 $K=\dfrac{1}{2}$ 。

（4） n 秒後における位置を表す確率変数を X_n とすれば、 $X_0,X_1,X_2,\cdots$ は Markov 連鎖を

作り、その推移確率行列Pは、$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$である。

また、$p_0=[0,0,0,1,0]$であるから、

$$p_1=p_0P=\left[0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right]$$
$$p_2=p_1P=\left[0,\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{7}{36},\frac{2}{9}\right]$$
$$p_3=p_2P=\left[\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{13}{108},\frac{55}{216}\right]$$
$$p_4=p_3P=\left[\frac{1}{4},\frac{5}{24},\frac{5}{27},\frac{53}{648},\frac{89}{324}\right]$$

粒子が4秒後に点1にある確率はベクトルp_4の第1成分であるので$\frac{1}{4}$。

点5にある確率はベクトルp_4の第5成分であるので$\frac{89}{324}$。

【別解】

4秒後に点1にあるのは粒子が次のように移動する場合である。

	スタート		1秒後		2秒後		3秒後		4秒後
①	4	→	3	→	2	→	1（運動停止）		
②	4	→	3	→	2	→	2	→	1
③	4	→	3	→	3	→	2	→	1
④	4	→	4	→	3	→	2	→	1

それぞれの確率は、

① $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$、② $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$、③ $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$、

④ $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$

よって、求める確率は$\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\frac{1}{4}$

同様に、4秒後に点5にあるのは次のように移動する場合である。

	スタート		1秒後		2秒後		3秒後		4秒後
①	4	→	5（運動停止）						
②	4	→	4	→	5（運動停止）				
③	4	→	4	→	4	→	5（運動停止）		
④	4	→	3	→	4	→	5（運動停止）		
⑤	4	→	4	→	4	→	4	→	5
⑥	4	→	4	→	3	→	4	→	5
⑦	4	→	3	→	3	→	4	→	5
⑧	4	→	3	→	4	→	4	→	5

それぞれの確率は、

① $\frac{1}{6}$、② $\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$、③ $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{54}$、④ $\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{72}$、

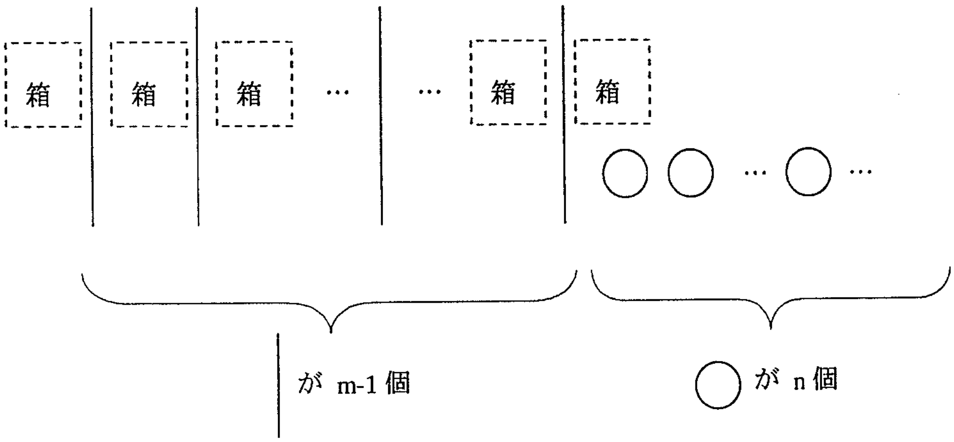
⑤ $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{162}$、⑥ $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$、⑦ $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$、

⑧ $\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$

よって、求める確率は$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{54}+\frac{1}{72}+\frac{1}{162}+\frac{1}{216}+\frac{1}{216}+\frac{1}{216}=\frac{89}{324}$

（5）箱を仕切る m-1 個の壁と n 個の玉との並べ方を考える。

下図のように、最初に、箱を仕切っている m-1 個の壁を 1 列に並べ、その後に n 個の玉を並べたものは、全ての玉が最後の箱に入っている状態に対応する。



したがって、玉の入れ方は、壁を表す m-1 個の記号と、玉を表す n 個の記号とを合わせた、n+m-1 個の記号の順列によって表すことができる。

よって、無作為に入れる入れ方は$\dfrac{(n+m-1)!}{(m-1)!n!}$通り。

一方、あらかじめ指定した n 個の箱に 1 つずつ玉が入る入れ方は 1 通りであるから、求める確率は$\dfrac{(m-1)!n!}{(n+m-1)!}$　。

（6）子供の数がn人であったときに、そのうちk人が男の子供である確率は、${}_nC_k\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ である。したがって、求める確率は$\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty}{}_nC_k\left(\frac{1}{2}\right)^n(1-p)p^n=(1-p)\sum_{n=k}^{\infty}{}_nC_k\left(\frac{p}{2}\right)^n$ である。

ここで、$\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty}{}_nC_k\left(\frac{p}{2}\right)^n$ を計算するために、恒等式$\displaystyle\frac{1}{1-x}=\sum_{j=0}^{\infty}x^j\ (|x|<1)$を考える。

この恒等式の両辺をℓ回微分すると、左辺は、

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\ \left(\frac{1}{1-x}\right)''=\frac{2(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{2}{(1-x)^3},\ \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(3)}=\frac{2\cdot3(1-x)^2}{(1-x)^6}=\frac{2\cdot3}{(1-x)^4},\ \cdots,$$
$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(\ell)}=\frac{\ell!}{(1-x)^{\ell+1}}$$

次に右辺は、

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty}x^j\right)'=\sum_{j=1}^{\infty}j\cdot x^{j-1}=\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)x^j,\ \left(\sum_{j=0}^{\infty}x^j\right)''=\sum_{j=1}^{\infty}j(j+1)x^{j-1}=\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)(j+2)x^j,\ \cdots,$$
$$\left(\sum_{j=0}^{\infty}x^j\right)^{(\ell)}=\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)(j+2)\cdots(j+\ell)x^j$$

よって、$\displaystyle\frac{\ell!}{(1-x)^{\ell+1}}=\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)(j+2)\cdots(j+\ell)x^j$

この両辺を$\ell!$で割り、$\displaystyle\frac{(j+1)(j+2)\cdots(j+\ell)}{\ell!}=\frac{(j+\ell)!}{\ell!\,j!}={}_{j+\ell}C_\ell$より、

$\displaystyle\frac{1}{(1-x)^{\ell+1}}=\sum_{j=0}^{\infty}{}_{j+\ell}C_\ell\cdot x^j$が得られる。

ここで、$n=j+\ell,k=\ell,x=\dfrac{p}{2}$と置くと、$\displaystyle\frac{1}{\left(1-\frac{p}{2}\right)^{k+1}}=\sum_{n=k}^{\infty}{}_nC_k\cdot\left(\frac{p}{2}\right)^{n-k}$

よって、$\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} {}_nC_k \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^n = \frac{\left(\frac{p}{2}\right)^k}{\left(1-\frac{p}{2}\right)^{k+1}}$

したがって、求める確率は$\displaystyle(1-p)\sum_{n=k}^{\infty} {}_nC_k \left(\frac{p}{2}\right)^n = (1-p)\frac{\left(\frac{p}{2}\right)^k}{\left(1-\frac{p}{2}\right)^{k+1}}$。

（7）A, B がレストランに入店する時点を表す確率変数をそれぞれX,Yとすると、X,Yは互いに独立であり、ともに区間 (0,1) 上の一様分布に従う。X,Yの確率密度関数をそれぞれ$f_X(x), f_Y(y)$で表すと、

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & (0<x<1)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}1 & (0<y<1)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

である。

A, B がレストラン内にいる時間はともにt_0であるので、A, B がレストランで出会う確率は$P(|X-Y|<t_0)$である。

ここで、確率変数$Z=X-Y$の確率密度関数を$f_Z(z)$で表すと、

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z+y)f_Y(y)dy=\int_0^1 f_X(z+y)dy=\int_z^{1+z} f_X(y)dy$$

したがって、$f_Z(z)=\begin{cases}\displaystyle\int_z^1 dy=1-z & (0<z\leq 1)\\ \displaystyle\int_0^{1+z} dy=1+z & (-1<z\leq 0)\\ 0 & (z<-1, 1<z)\end{cases}$

よって、求める確率は、

$$P(|X-Y|<t_0)=P(-t_0<X-Y<t_0)=\int_{-t_0}^{0}(1+z)dz+\int_0^{t_0}(1-z)dz$$

$$=\left[z+\frac{1}{2}z^2\right]_{-t_0}^{0}+\left[z-\frac{1}{2}z^2\right]_0^{t_0}=t_0(2-t_0)$$

（8）$X+c_1Y+c_2=0$から、$X=-c_1Y-c_2$ ……(A)

一方、$\displaystyle\rho(X,Y)=\frac{E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y))}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{E(XY-\mu_XY-\mu_YX+\mu_X\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{E(XY)-\mu_X\mu_Y}{\sigma_X\sigma_Y}$

であり、これに(A)を代入すると、

$$\rho(X,Y)=\frac{E((-c_1Y-c_2)Y)-\mu_X\mu_Y}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{E((-c_1Y-c_2)Y)-\mu_X\mu_Y}{\sigma_X\sigma_Y}$$

$$=\frac{-c_1E(Y^2)-c_2E(Y)-\mu_X\mu_Y}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{-c_1(\sigma_Y^2+\mu_Y^2)-c_2\mu_Y-\mu_X\mu_Y}{\sigma_X\sigma_Y}$$

$\rho(X,Y)=1$であるから、$-c_1(\sigma_Y^2+\mu_Y^2)-c_2\mu_Y-\mu_X\mu_Y=\sigma_X\sigma_Y$である。また、(A)より$c_2=-\mu_X-c_1\mu_Y$であり、これを上式に代入すると、

$-c_1(\sigma_Y^2+\mu_Y^2)-(-\mu_X-c_1\mu_Y)\mu_Y-\mu_X\mu_Y=\sigma_X\sigma_Y$が得られる。

整理してc_1を求めると、$c_1=-\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}$、また、$c_2=-\mu_X+\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}\mu_Y$となる。

（9）nメートル先の白線上の点に到達するのは、$n+5$回投げて、裏がn回、表が5回出るが、ただし、最後の$n+5$回目は表が出る場合。

したがって、その確率P_nは、$P_n={}_{n+4}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\left(\frac{1}{2}\right)={}_{n+4}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+5}$となる。

ここでP_nが最大値を取るのは、nが$\dfrac{P_n}{P_{n-1}}\geq 1$を満たす最大の$n$であるときである。

ここで、$\dfrac{P_n}{P_{n-1}}=\dfrac{{}_{n+4}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+5}}{{}_{n+3}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+4}}=\dfrac{(n+4)!}{n!\cdot 4!}\cdot\dfrac{(n-1)!\cdot 4!}{(n+3)!}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{n+4}{2n}$より、$\dfrac{P_n}{P_{n-1}}\geq 1$を満たす$n$は$n\leq 4$（等号は$n=4$のとき成立）。

よって、P_nは$n=3,4$のとき最大になる。

したがって、求める最大値は$P_3={}_7C_4\left(\frac{1}{2}\right)^8=\dfrac{7!}{3!4!}\left(\frac{1}{2}\right)^8=\dfrac{35}{2^8}=\dfrac{35}{256}$。

$\left(\text{あるいは、}P_4={}_8C_4\left(\frac{1}{2}\right)^9=\dfrac{8!}{4!4!}\left(\frac{1}{2}\right)^9=\dfrac{70}{2^9}=\dfrac{35}{256}\right)$

問題2．多項分布の積率母関数を求め、それにより平均、分散、相関係数および積率母関数の極限を求めさせる誘導式穴埋め問題である。空欄の前後の式の意味をよく理解し、全体としてどういう道筋で解答を導き出そうとしているのかを理解することが重要である。

	番号	解答
(1)	①	$p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}+\cdots+p_re^{\theta_r}$
	②	$p_ie^{\theta_i}+(1-p_i)$
	③	np_i
	④	$np_i(1-p_i)$
	⑤	$p_ie^{\theta_i}p_je^{\theta_j}$
	⑥	p_ip_j
	⑦	$-\sqrt{\dfrac{p_ip_j}{(1-p_i)(1-p_j)}}$
(2)	⑧	$p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}+\cdots+p_{r-1}e^{\theta_{r-1}}+p_r$
	⑨	$\lambda_1(e^{\theta_1}-1)+\lambda_2(e^{\theta_2}-1)+\cdots+\lambda_{r-1}(e^{\theta_{r-1}}-1)$
	⑩	$e^{\lambda_1(e^{\theta_1}-1)+\lambda_2(e^{\theta_2}-1)+\cdots+\lambda_{r-1}(e^{\theta_{r-1}}-1)}$

（1）

①多項定理より、

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=n\\ k_1\geq 0,\cdots,k_r\geq 0}} e^{\theta_1k_1+\cdots+\theta_rk_r}\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}=\left(p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}+\cdots+p_re^{\theta_r}\right)^n$$

②$\phi_i(\theta_i)=\phi(0,\cdots,0,\theta_i,\cdots,0)=\left(p_ie^{\theta_i}+(1-p_i)\right)^n$

③$\phi_i'(\theta_i)=n\left(p_ie^{\theta_i}+(1-p_i)\right)^{n-1}\cdot p_ie^{\theta_i}$ より、$E(X_i)=\phi_i'(0)=np_i$

④$\phi_i''(\theta_i)=n(n-1)\left(p_ie^{\theta_i}+(1-p_i)\right)^{n-2}\cdot\left(p_ie^{\theta_i}\right)^2+n\left(p_ie^{\theta_i}+(1-p_i)\right)^{n-1}\cdot p_ie^{\theta_i}$ より、

$$V(X_i)=\phi_i''(0)-\left(\phi_i'(0)\right)^2=n(n-1)p_i^2+np_i-(np_i)^2=np_i(1-p_i)$$

⑤$\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\theta_i\partial\theta_j}=n(n-1)\cdot\left(p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}+\cdots+p_re^{\theta_r}\right)^{n-2}\cdot p_ie^{\theta_i}p_je^{\theta_j}$

⑥ $E\left(X_i \cdot X_j\right)=\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial\theta_i \partial\theta_j}(0,\cdots,0)=n(n-1)p_i p_j$

⑦ $C\left(X_i, X_j\right)=E\left(X_i \cdot X_j\right)-E\left(X_i\right)E\left(X_j\right)=n(n-1)p_i p_j - np_i \cdot np_j = -np_i p_j$ より、

$$\rho\left(X_i, X_j\right)=\frac{-np_i p_j}{\sqrt{np_i(1-p_i)}\sqrt{np_j(1-p_j)}}=-\sqrt{\frac{p_i p_j}{(1-p_i)(1-p_j)}}$$

（2）

⑧ $\psi(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{r-1})=\phi(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{r-1},0)=\left(p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}+\cdots+p_{r-1}e^{\theta_{r-1}}+p_r\right)^n$

⑨ $p_r=1-p_1-p_2-\cdots-p_{r-1},\ p_1=\dfrac{\lambda_1}{n},\ p_2=\dfrac{\lambda_2}{n},\cdots,p_{r-1}=\dfrac{\lambda_{r-1}}{n}$ より、

$$\psi(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{r-1})=\left[1+\frac{1}{n}\left\{\lambda_1\left(e^{\theta_1}-1\right)+\lambda_2\left(e^{\theta_2}-1\right)+\cdots+\lambda_{r-1}\left(e^{\theta_{r-1}}-1\right)\right\}\right]^n$$

⑩ $\lim\limits_{n\to\infty}\psi(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{r-1})=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+x)^{1/x}\right]^K=e^K=e^{\lambda_1\left(e^{\theta_1}-1\right)+\lambda_2\left(e^{\theta_2}-1\right)+\cdots+\lambda_{r-1}\left(e^{\theta_{r-1}}-1\right)}$

問題３．*２次元の確率変数の変数変換という非常に典型的な問題である。また記述式問題であるからには、解答にあたっては単なる計算式の羅列ではなく、的確な説明が行なわれていることが必要である。*

$u=xy,\ v=y$ とおけば $x=\dfrac{u}{v},\ y=v$。よって、$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2}\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\dfrac{1}{v}$

X,Y は独立であるので、その結合確率密度関数 $h(x,y)$ は $y>0$ のとき $h(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$。

ゆえに、$U=XY, V=Y$ の結合確率密度関数 $h_1(u,v)$ は、

$$h_1(u,v)=f_X(x)f_Y(y)\cdot\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{1}{|v|}\cdot f_X\left(\frac{u}{v}\right)f_Y(v)=\frac{1}{v}\cdot f_X\left(\frac{u}{v}\right)f_Y(v)\ (v>0)$$

ここで、$f_X(x)$ の定義域より、$\left|\dfrac{u}{v}\right|<1$。よって、$h_1(u,v)$ の定義域は $|u|<v, v>0$。

したがって、U の確率密度関数は、$f_U(u)=\displaystyle\int_{|u|}^{\infty}\frac{1}{v}\cdot f_X\left(\frac{u}{v}\right)f_Y(v)dv$。

$f_X(x), f_Y(y)$ の定義より、

$$f_U(u)=\int_{|u|}^{\infty}\frac{1}{v}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-u^2/v^2}}\frac{v}{\sigma^2}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}dv=\frac{1}{\pi\sigma^2}\int_{|u|}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{v^2-u^2}}ve^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}dv$$

ここで、$v^2 = u^2 + \sigma^2 t^2$ と置いて積分の変数を変換すると、

$$f_U(u) = \frac{1}{\pi\sigma^2}\int_0^\infty \sigma e^{-\frac{u^2+\sigma^2 t^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\pi\sigma} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{\pi\sigma} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} \quad \left(\because \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$$

これは平均 0、分散 σ^2 の正規分布の確率密度関数である。したがって、U は平均 0、分散 σ^2 の正規分布に従う。

問題４．*（１）の解答にはある程度の直感が必要とされるかもしれないが、仮に答が浮かばなかったとしても、（２）でY_n の特性関数の極限を求めることができれば、戻って（１）も解答できるはずである。なお、定義が示されているのでY_n の特性関数を求めるのはさほど困難ではないであろうし、極限も容易に求められよう。*

（１）区間 (0,1) 上の一様分布。

（注）解答には理由は不要としたが、次のようにY_n を区間 (0,1) の中にある実数の小数表現による近似値を表わしたものと考えれば、直感的に理解できるであろう。

[例]	$X_1=1$	$Y_1=0.1$
	$X_2=2$	$Y_2=0.12$
	$X_3=5$	$Y_3=0.125$
	$X_4=4$	$Y_4=0.1254$ ・・・

（２）各 X_k の特性関数 $\varphi_k(t)\,(k=1,2,\cdots)$ は、

$$\varphi_k(t) = E\left(e^{itX_k}\right) = \frac{1}{10}\left(1 + e^{it} + e^{i\cdot 2t} + \cdots + e^{i\cdot 9t}\right) = \frac{1}{10}\frac{1-e^{i\cdot 10t}}{1-e^{it}} \quad \left(i = \sqrt{-1}\right)$$

よって、$\tilde{X}_k = \dfrac{X_k}{10^k}$ の特性関数 $\tilde{\varphi}_k(t)\,(k=1,2,\cdots)$ は、

$$\tilde{\varphi}_k(t) = E\left(e^{it\tilde{X}_k}\right) = E\left(e^{it\cdot 10^{-k}X_k}\right) = \varphi_k\left(t\cdot 10^{-k}\right) = \frac{1}{10}\cdot\frac{1-e^{i\cdot 10^{-(k-1)}t}}{1-e^{i\cdot 10^{-k}t}}$$

したがって、$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立であるので、Y_n の特性関数 $\psi_n(t)\,(n=1,2,\cdots)$ は、

$$\psi_n(t) = \tilde{\varphi}_1(t)\cdot\tilde{\varphi}_2(t)\cdot\cdots\cdot\tilde{\varphi}_n(t) = \left(\frac{1}{10}\cdot\frac{1-e^{i\cdot 10^{0}t}}{1-e^{i\cdot 10^{-1}t}}\right)\cdot\left(\frac{1}{10}\cdot\frac{1-e^{i\cdot 10^{-1}t}}{1-e^{i\cdot 10^{-2}t}}\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{1}{10}\cdot\frac{1-e^{i\cdot 10^{-(n-1)}t}}{1-e^{i\cdot 10^{-n}t}}\right)$$

$$= \frac{1}{10^n}\cdot\frac{1-e^{it}}{1-e^{i\cdot 10^{-n}t}}$$

ここで、

$$10^n\left(1-e^{i\cdot 10^{-n}t}\right) = 10^n\left\{1-\left(1+\frac{i\cdot 10^{-n}t}{1!}+\frac{\left(i\cdot 10^{-n}t\right)^2}{2!}+\frac{\left(i\cdot 10^{-n}t\right)^3}{3!}+\cdots\right)\right\}$$

$$= -\left(\frac{it}{1!}+\frac{(it)^2\cdot 10^{-n}}{2!}+\frac{(it)^3\cdot\left(10^{-n}\right)^2}{3!}+\cdots\right)$$

よって、$n\to\infty$ のとき、$\psi(t)\to\dfrac{1-e^{it}}{-it}=\dfrac{e^{it}-1}{it}$

一方、区間 (0,1) 上の一様分布の特性関数は $\displaystyle\int_0^1 e^{itx}dx = \left[\frac{1}{it}e^{itx}\right]_0^1 = \frac{e^{it}-1}{it} = \psi(t)$

したがって、題意が証明された。