# 年金数理（問題）

問題１．次の(1)〜(10)について、それぞれ 5 つの選択肢から正しいものを選んでその記号を、(11)、(12)については算式を解答用紙の所定欄に記入せよ。（36 点）

(1)A、B、Cを脱退の事由とする３重脱退残存表がある。それぞれの原因による脱退は独立に発生し、かつそれぞれの脱退は１年を通じて一様に発生するとする。３重脱退残存表の数値から得られるそれぞれの原因による$x$歳の脱退率を$q_x^A, q_x^B, q_x^C$ とする。脱退の原因がA、B、Cそれぞれ単独の場合のそれぞれの場合の脱退残存表における$x$歳の脱退率をそれぞれ $q_x^{A*}, q_x^{B*}, q_x^{C*}$ とするとき、$q_x^A$を $q_x^{A*}, q_x^{B*}, q_x^{C*}$を用いて表したときの算式で正しいのはどれか。

(A)$q_x^A = q_x^{A*} \times \left\{1-(1/2)\cdot(q_x^{B*}+q_x^{C*})+(1/2)\cdot q_x^{B*}\cdot q_x^{C*}\right\}$
(B)$q_x^A = q_x^{A*} \times \left\{1-(1/2)\cdot(q_x^{B*}+q_x^{C*})+(1/3)\cdot q_x^{B*}\cdot q_x^{C*}\right\}$
(C)$q_x^A = q_x^{A*} \times \left\{1-(1/2)\cdot(q_x^{B*}+q_x^{C*})+(1/4)\cdot q_x^{B*}\cdot q_x^{C*}\right\}$
(D)$q_x^A = q_x^{A*} \times \left\{1-(1/3)\cdot(q_x^{B*}+q_x^{C*})+(1/3)\cdot q_x^{B*}\cdot q_x^{C*}\right\}$
(E)$q_x^A = q_x^{A*} \times \left\{1-(1/3)\cdot(q_x^{B*}+q_x^{C*})+(1/4)\cdot q_x^{B*}\cdot q_x^{C*}\right\}$

(2)ある年金制度を新たに発足させ、加入資格のある者の過去勤務期間を通算する取扱としたので発足時過去勤務債務は 100 であった。設立初年度の年度末に一律 20%の給付改善を行った。この制度変更を反映した上で、この年金制度の初年度財政決算を行った場合の、過去勤務債務額は次のどの値に最も近いか。ただし、この年金制度の財政運営および初年度実績は以下のとおりであり、下記説明された以外の要因による後発債務の発生および制度変更による後発債務の発生以外の後発債務は生じなかったものとする。

・予定利率３％、・実際運用利回り２％、・支払給付（年度初支払）１０、
・期末年金受給権者：無し、・標準保険料収入(年度初収納)１５、
・特別保険料収入(年度初収納)２５、・財政方式：加入年齢方式、
・設立時以外の新規加入者は無く、保険料と給付は年 1 回年度初に発生する。
・制度変更後の標準保険料率は従前の 1.2 倍とする。

(A)97.40　(B)98.15　(C)98.18　(D)98.43　(E)99.18

(3)次の算式のうち誤っているものの記号を選べ。

(A)$\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy}$　(B)$\ddot{a}_{xy} = \ddot{a}_{\overline{xy}} - \ddot{a}_{\underset{xy}{[1]}}$　(C)$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$　(D)$\ddot{a}_{\underset{xy}{[1]}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - 2\cdot\ddot{a}_{xy}$

(E)$\ddot{a}_{\frac{1}{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$

(4)ある年金制度の設立時過去勤務債務額$U_0$をAとBの方法で償却することを考えた。次の前提で制度が推移したとき、設立後の第 5 回目の過去勤務債務償却保険料を拠出した直後の方法Aに拠った場合の過去勤務債務残高の、方法Bに拠った場合の同時点の過去勤務債務残高に対する倍率として最も近いのはどれか。

・被保険者数は設立時が$L_0$人で、毎期初人員数は前期初人員数から 4.0%ずつ減少する。

・後発債務の発生はなく、未償却過去勤務債務額は予定利率の年 5.0%で増加する。

・方法A：$U_0 \times 0.20 \div L_0$の定額を年 1 回期初に一人あたり特別保険料とし、保険料拠出時の在籍被保険者$L_t$人が負担する。(ここに$t$は $t>0$の整数である。)

・方法B：毎年初現在の未償却過去勤務債務額(当該年度の償却前)の 35%相当額を年 1 回期初に拠出する。

(A) 0.90 倍　(B) 1.05 倍　(C) 1.20 倍　(D) 1.35 倍　(E) 1.50 倍

(5)定年退職者のみに対し、定年年齢$x_r$歳時より単位年金額の終身年金を支払う年金制度(以下、年金数理の問題において「Trowbridge モデルの年金制度」という。)において、財政方式を加入時積立方式によるものとすれば、定常状態における積立金${}^{In}F$を表す算式は次のうちどれか。ただし$\omega$は生命表の最終年齢、$x_e$は新規加入年齢、$l_x$は生命表における人数、$l_x^{(T)}$は脱退残存表における人数である。

(A) ${}^{In}F = \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x + \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot (\frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x})$

(B) ${}^{In}F = \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x + \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot (\frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x})$

(C) ${}^{In}F = \sum_{x=x_r+1}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x + \sum_{x=x_e}^{x_r} l_x^{(T)} \cdot (\frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x})$

(D) ${}^{In}F = \sum_{x=x_r+1}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x + \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot (\frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x})$

(E) ${}^{In}F = \sum_{x=x_r+1}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x + \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot (\frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x})$

(6)予定利率$i$および$j$ (ここに $i>j$)に基づく 10 年確定年金現価率、15 年確定年金現価率、60 歳、70 歳および 75 歳の基数$D$および$N$が右表のとおり与えられている。

| 予定利率 | $i$ | $j$ |
|---|---|---|
| $\ddot{a}_{\overline{10}\rvert}$ | 7.74214 | 8.46089 |
| $\ddot{a}_{\overline{15}\rvert}$ | 10.30992 | 11.71723 |
| $D_{60}$ | 4,937.9643477 | 13,033.1907355 |
| $N_{60}$ | 67,131.7023685 | 208,261.1269570 |
| $D_{70}$ | 1,836.8047267 | 7,013.1072548 |
| $N_{70}$ | 17,678.1035934 | 77,110.1411764 |
| $D_{75}$ | 1,215.9929223 | 5,109.0374633 |
| $N_{75}$ | 9,791.1394833 | 45,906.7353643 |

ある会社が 60 歳退職者の退職一時金に替えて予定利率$i$を前提とした 10 年確定年金現価率で退職一時金を除した年金額を 10 年保証終身年金として支払うこととしていた。この会社が、年金額の決定は退職一時金を予定利率$j$を前提とした 15 年確定年金現価率で除した額とし、給付は 15 年保証終身年金に変更した。この会社の変更後の 60 歳時の予定利率$j$による 15 年保証終身年金現価額は、変更前の予定利率$i$による 10 年保証終身年金現価額の何倍になるか。値の最も近いものの記号を選べ。

(A)0.66 倍　(B)0.74 倍　(C)0.89 倍　(D)0.92 倍　(E)0.95 倍

(7)極限方程式 $C+\dfrac{i}{1+i}\cdot F=B$ が成立している年金制度がある。(ここに、$i$ は予定利率、$F$ は積立金である。)給付 $B$ および保険料 $C$ は年 1 回期初払いであり、ある年度の実績利回りが $j$ (ここに $0<j<i$)であったためその年度末の積立金残高は $F$ より少なくなった。制度の運営者は $F$ を回復させようと、その翌年度の給付額を $B$ より $\Delta$ だけ少なく給付することにした。この結果、期末には $F$ を回復できた。この年度の利回りは予定どおりの $i$ であったとして、この年度に給付を削減した $\Delta$ を表す算式の記号を選べ。

(A) $\Delta=(B-C)\cdot(1+j)-F\cdot(j-\dfrac{i}{1+i})$　(B) $\Delta=(B-C)\cdot(1+j)-F\cdot(j+\dfrac{i}{1+i})$

(C) $\Delta=(B-C)\cdot(2+j)-F\cdot(j-\dfrac{i}{1+i})$　(D) $\Delta=(B-C)\cdot(2+j)-F\cdot(j+\dfrac{i}{1+i})$

(E) $\Delta=(B-C)\cdot(1+j)-F\cdot(i+\dfrac{j}{1+i})$

(8)ある年金制度では、各年齢の被保険者数 $l_x$ および給与総額 $B$ が定常状態にあるものと仮定し、計算基準日以降の脱退および昇給が予定基礎率どおりに推移するとした場合に、その被保険者数および給与総額が計算基準日時点と同じになるように毎年の新規被保険者数およびその給与を見込んでいる。このとき、新規被保険者一人あたりの給与を表す算式として正しいものの記号を選べ。ただし、この年金制度の被保険者総数を $L$ とし、給与指数を $b_x$、新規被保険者の加入年齢を $x_e$、定年年齢を $x_r$ とする。

(A) $\dfrac{B}{L}\times\dfrac{b_{x_e}\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\ell_x}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}(b_x\cdot\ell_x)}$　(B) $\dfrac{B}{L}\times\dfrac{\ell_{x_e}\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}b_x}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}(b_x\cdot\ell_x)}$　(C) $\dfrac{B}{L}\times\dfrac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}(b_x\cdot\ell_x)}{(\sum_{x=x_e}^{x_r-1}b_x)\cdot(\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\ell_x)}$　(D) $\dfrac{B}{L}\times\dfrac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}(b_x\cdot\ell_x)}{b_{x_e}\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\ell_x}$

(E) $\dfrac{B}{L}\times\dfrac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}(b_x\cdot\ell_x)}{\ell_{x_e}\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}b_x}$

(9)ある企業の人員構成が定常状態であるとき、その企業の平均残存勤務年数を表す算式として正しいものの記号を選べ。ただし、算式中の記号の意味は以下のとおりである。

$\ell_x$:残存表における $x$ 歳の残存数、$x_e$:入社年齢、$L_x=\int_0^1\ell_{x+t}dt$:年齢が満 $x$ 歳の者の総数、

$T_x=\int_0^{x_r-x}\ell_{x+t}dt$:年齢が満 $x$ 歳以上の者の総数。　ここに $x_r$ : 定年年齢。

(A) $\sum_{k=0}^{x_r-x_e-1}T_{x_e+k}\Big/\sum_{k=0}^{x_r-x_e-1}L_{x_e+k}$　(B) $\sum_{k=0}^{x_r-x_e-1}\dfrac{T_{x_e+k}}{L_{x_e+k}}$　(C) $\sum_{k=0}^{x_r-x_e-1}(l_{x_e+k}\cdot T_{x_e+k}/L_{x_e+k})\Big/\sum_{k=0}^{x_r-x_e-1}L_{x_e+k}$

(D) $\sum_{k=0}^{x_r-x_e-1}L_{x_e+k}\Big/L_{x_e}$　(E) $\sum_{k=0}^{x_r-x_e-1}(T_{x_e+k}\cdot L_{x_e+k}/l_{x_e+k})\Big/\sum_{k=0}^{x_r-x_e-1}L_{x_e+k}$

(10)ある年金制度は、年度初に保険料$C$が払込まれ、年度末に給付$B$が支払われ、年度末給付支払後の積立金が$F$で定常状態にある。この制度における積立金$F$の水準を下げるため、ある年度以降の保険料を$0.8\cdot C$とした場合、年度末の積立金が$0.9\cdot F$を下回る年度はいつか、正しいものの記号を選べ。ただし、割引率を$\upsilon$、$\log\upsilon=\delta$とし、記号[G]はGを超えない最大の整数を表すものとする。

(A) $\left[\dfrac{1}{\delta}\cdot\log\dfrac{8\cdot C}{\upsilon\cdot B+7\cdot C}\right]+1$　(B) $\left[\dfrac{1}{\delta}\cdot\log\dfrac{2\cdot C}{9\cdot\upsilon\cdot B-7\cdot C}\right]+1$　(C) $\left[\dfrac{1}{\delta}\cdot\log\dfrac{8\cdot C}{9\cdot\upsilon\cdot B-7\cdot C}\right]+1$

(D) $\left[\dfrac{1}{\delta}\cdot\log\dfrac{2\cdot C}{\upsilon\cdot B+C}\right]+1$　(E) $\left[\dfrac{1}{\delta}\cdot\log\dfrac{2\cdot C}{9\cdot\upsilon\cdot B-C}\right]+1$

(11)加入年齢方式の財政方式を採用している給与比例制の年金制度において、標準保険料率は変更せず基準給与を$(1+k)$倍とする制度変更を行った。この年金制度から支払われる給付は、脱退時の基準給与に加入年数に応じた支給倍率を乗じた額の年金給付である。この場合の、制度変更直後の過去勤務債務額を以下の記号および$k$を用いて表し、所定の解答欄に記入せよ。

U：制度変更直前の未償却過去勤務債務額、F：制度変更時の年金資産額

(12)ある企業の年金制度は、制度設立後の加入期間に基づきある乗率を用いて年金額を決める部分および設立前の期間を通算した勤続期間に基づき別の乗率を用いて年金額を決める部分の合計から成り立っている。

この企業において、制度設立後の加入期間に基づき乗率(A)＋乗率(B)を用いて年金額が決定される制度について計算を行ったところ、加入年齢方式の財政方式における標準保険料率は$P$、責任準備金額は$V_0$となった。

同様に、設立前の期間を通算した勤続期間に基づき乗率(A)＋乗率(B)を用いて年金額が決定される制度において、標準保険料率は$P$を用いた場合の責任準備金額は$V_1$となった。

また、標準保険料率は$P$を用いるが、設立前の期間を通算した勤続期間に基づき乗率(A)を用いて金額を決定する給付と、設立後の加入期間に基づき乗率(B)を用いて年金額が決定される給付を合計した退職年金制度の責任準備金額は$V_2$となった。

制度設立後の加入期間に基づき乗率(A)を用いて金額が決定される給付および設立前の期間を通算した勤続期間に基づき乗率(B)を用いて年金額が決定される給付を合計した退職年金制度の責任準備金額を算出したい。算出したい制度について標準保険料率として$P$を用いる場合の責任準備金額の算式を、$V_0$、$V_1$、$V_2$を用いて表し、所定の解答欄に記入せよ。

問題２．次の(1)～(3)について、説明文中に規定された記号(必要があればｻﾌｨｯｸｽ等は適正に変更すること)を用いて空欄に当てはまる算式を解答用紙の所定欄に記入せよ(24 点)

(1)Trowbridge モデル(定義および記号の意味はとくに断らない限り、問題１(5)と同じとする。)において、割引率$\upsilon = 1/(1+i)$、$x$歳年金現価率$\ddot{a}_x$の記号を用いるものとする。

単位積立方式における$x$歳の保険料は、その時点における 1 年分の年金額の現価相当額となるので、

$$ {}^{U}P_x = \left(\frac{1}{\boxed{\text{①}}}\right)\cdot\left(\frac{\boxed{\text{②}}}{D_x}\right) $$

、また制度全体の保険料は

$$ {}^{U}C = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)}\cdot {}^{U}P_x = \left(\frac{1}{\boxed{\text{①}}}\right)\cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)}\cdot\left(\frac{\boxed{\text{②}}}{D_x}\right) $$

$$ = \boxed{\text{③}} \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \upsilon^{x_r-x} = \boxed{\text{③}} \frac{\upsilon\cdot\left(1-\upsilon^{x_r-x_e}\right)}{1-\upsilon} $$

したがって、積立金は

$$ {}^{U}F = \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} \boxed{\text{④}} + \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x\cdot\ddot{a}_x = S_{PS}^{a} + S^{p} $$

である。

この${}^{U}F$、${}^{U}C$が極限方程式$C + d\cdot F = B$ を満たすかについて確認する。

まず、$S^{p} = {}^{T}C + {}^{T}F$（ここに${}^{T}C$、${}^{T}F$は退職時年金現価積立方式における保険料総額、積立金額である。）であるから、$A \equiv S_{PS}^{a} + S^{p} = S_{PS}^{a} + {}^{T}C + {}^{T}F$ とおくと、

$$ {}^{U}C + d\cdot A - ({}^{T}C + d\cdot {}^{T}F) = {}^{U}C + d\cdot\left(\boxed{\text{⑤}}\right) - {}^{T}C $$

ここで、$d$に掛かる括弧内は

$$ \boxed{\text{⑤}} = \sum_{x=x_e}^{x_r} l_x^{(T)}\cdot\left(\frac{\boxed{\text{⑥}}}{x_r - x_e}\right)\cdot\left(\boxed{\text{⑦}}\right) = \boxed{\text{③}}\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r}\boxed{\text{⑧}} \quad\cdots\cdots(\mathrm{I}) $$

上式内の$\sum$ ⑧をＫとし、$K - \upsilon\cdot K$を計算してみると

$$ K - \upsilon\cdot K = \boxed{\text{⑨}} - \boxed{\text{⑩}} $$

となるから

$$ K = \frac{1}{d}\cdot\left\{\boxed{\text{⑨}} - \frac{\upsilon\cdot(1-\upsilon^{x_r-x_e})}{1-\upsilon}\right\} $$

したがって、(Ｉ)式は

$$ {}^{U}C + \boxed{\text{③}}\cdot\left\{\boxed{\text{⑨}} - \frac{\upsilon\cdot(1-\upsilon^{x_r-x_e})}{1-\upsilon}\right\} - {}^{T}C $$

$$ = \boxed{\text{③}}\left\{\frac{\upsilon\cdot(1-\upsilon^{x_r-x_e})}{1-\upsilon} + \boxed{\text{⑨}} - \frac{\upsilon\cdot(1-\upsilon^{x_r-x_e})}{1-\upsilon} - \boxed{\text{⑨}}\right\} = 0 $$

このことから、${}^{U}C + d\cdot A - ({}^{T}C + d\cdot {}^{T}F) = 0$が示せたので ${}^{U}C + d\cdot A = {}^{T}C + d\cdot {}^{T}C$となり、退職時年金現価積立方式においては、極限方程式が成立しているので、

${}^{T}C + d\cdot {}^{T}C = B$であり、これから${}^{U}C + d\cdot A = B$となる。したがって、$A$は単位積立方式における極限方程式を満たす積立金額の額を与える式であることが確認でき、$A \equiv S_{PS}^{a} + S^{p}$から${}^{U}F$で置き換えた極限方程式は成立する。

(2)定常状態の企業において Trowbridge モデル(保険料給与比例制度である他の定義は問題 1(5)と同じとする。)の年金制度の諸計数が以下の記号で与えられている。

| 説　　明 | 記号 |
|---|---|
| 年金者・受給待期者等の給付現価 | $S^P$ |
| 在職中の被保険者の将来加入員期間対応の給付現価 | $S^a_{FS}$ |
| 在職中の被保険者の全加入員期間対応の給付現価 | $S^a$ |
| 将来の被保険者の給付現価 | $S^f$ |
| 在職中の被保険者の給与現価 | $G^a$ |
| 将来の被保険者の給与現価 | $G^f$ |
| 積立金残高 | $F$ |
| n 年確定年金現価率 | $a_{\overline{n}\rvert}$ |
| 在職中の被保険者の給与総額 | $\sum LB$ |

(A) 加入年齢方式の場合の標準保険料率は ① となり、過去勤務債務額は ② であるため、n年で償却するとした場合の在職者の給与に比例して徴収する特別保険料率は ③ となる。

(B) 開放基金方式の財政方式を採用する場合、標準保険料率は ④ となり、特別保険料率は ⑤ となる。

(3)Trowbridge モデルの年金制度で、定常状態に到達しており、制度発足時の未積立債務の償却が終了している場合を想定して、1 年間に予定どおりの財政運営が行われた場合の責任準備金と積立金の推移を被保険者および受給権者の年齢別に示した下表を後述の説明にしたがった記号を用いて埋めよ。ただし、財政方式は標準保険料を適用した平準保険料方式を想定し、また 1 年間の推移とは、新規加入者が加入し、保険料収入、給付の発生する直前の時点からつぎのそれらが起こる直前までとする。

| 被保険者等の区分 | | 責任準備金変動 | 積立金変動 | 損益 |
|---|---|---|---|---|
| 被保険者 | 現在の被保険者 $x_e \leq x \leq x_r - 1$ | ① | ② | ③ |
| | 将来の被保険者 | ④ | ⑤ | ⑥ |
| 受給権者 | $x_r \leq x \leq \omega - 1$ | ⑦ | ⑧ | ⑨ |
| 年初の積立金から生じる利息収入 | | − | $i \cdot F$ | $i \cdot F$ |
| 合計 | | 0 | 0 | 0 |

$l_x$：$x$ 歳の者の人数

$S_x$：$x$ 歳の者の給付現価合計

$P$：標準保険料率

$G_x$：$x$ 歳の者の人数現価合計

$i$：予定利率

$x_e$：将来加入員の加入年齢

①現在 $x$ 歳の被保険者$(x_e \leq x \leq x_r - 1)$の責任準備金合計は、$S_x - P \cdot G_x$ で、1 年間の時間が経過すると、給付がなかったので給付現価は 1 年間の利息分だけ増加し、収入現価は拠出期間が 1 年経過したことと割引年数の減少による変動が生じ、これらの差額が責任準備金の変動となる。

②積立金は保険料相当の元利合計分が増加する。

③損益は積立金変動と責任準備金変動の差である。

④翌年初以降に $x_e$ 歳で加入する被保険者の責任準備金は一年あたりの $x_e$ 歳の責任準備金 $S_{x_e} - P \cdot G_{x_e}$ の予定利率 $i$ での無限級数となる。この責任準備金の 1 年間の変動は題意より 1 年間の利息相当分となる。

⑤積立金は形成していないので変動を与えない。

⑥損益は積立金変動と責任準備金変動の差である。

⑦$x_r \leq x \leq \omega - 1$ の年齢の受給権者の責任準備金は給付現価のみであり、給付による減少と割引率による変動が生じる。

⑧積立金は給付の元利合計分が減少する。

⑨損益は積立金変動と責任準備金変動の差である。

問題3 毎年 12 月 22 日にそのときの満年齢が$x$歳である者のみを新規被保険者とし、一定人数$N$人が一人当たり一定額の給与$B$円で恒常的に加入してくる保険集団を考える。被保険者は$x+10$歳の誕生日まで制度に加入していた場合、その翌日に加入期間満了で脱退し、年金受給資格を得る。死亡脱退を含めて各年度に年金受給資格を得ずに脱退する者の数は加入してからの期間$t$を用いて $l_{x+[t]} \cdot q_{[t]} = l_{x+[t]} \cdot 1/[11-t]$ （$0<t\le 9$）、 $l_t \cdot q_t = 0$ （$9<t$）である。(ここに、記号$[G]$はGを超えない最大の整数を表すものとする。)

上述の脱退状況に基づくと、加入時から 9 年経過後の 12 月 22 日を迎えた被保険者全員が$x+10$歳の誕生日の翌日に脱退し年金受給資格を得るものとなる。予定利率は $i$%とし、昇給は年 1 回 12 月 22 日に従前給与の $b$%が上昇する。($i$、$b$は共に正の定数であり、新規に加入した年の 12 月 22 日は加入時の給与のままで昇給はしない。) 保険料は 12 月 22 日の昇給後の給与に比例して同日に年 1 回払い込むものとする。なお、被保険者の誕生日は 1 年を通じて一様に分布しており、給付額の評価にあたっては 10 年目を迎えた被保険者全員が翌年 6 月 22 日に年金受給資格を得て脱退するものとして計算できるものとする。

年金受給資格を得た者は定額の年金Aを毎誕生日に終身に亘って受け取るものとし、この制度を 1999 年 12 月 22 日に発足させ、その後の運営は全て基礎率どおりであったとして、以下の問に答えよ。(20 点)

(1)2004 年 12 月 22 日の新規被保険者が加入した直後のこの制度の総被保険者数、給与総額を表す算式を示せ。(出題文中の記号を用い、給与総額については$\Sigma$を用いて記述してよい。)

(2)2008 年 12 月 22 日から 2009 年 12 月 21 日までに年金受給資格を得る者の年金給付現価を 2008 年 12 月 22 日現在の被保険者全員の 2008 年 12 月 22 日払込みの 1 回の保険料で賄うとしたときの賦課方式の保険料率$P$(給与に乗じる率)を表す算式を示せ。ただし、年金受給資格を得る者の脱退時点の終身年金現価率は $a_{x+10}$である。(出題中の記号を用い、$\Sigma$を用いて記述してよい。)

(3)この年金制度の年齢$x$歳の加入年齢方式での保険料率$P_{x:\overline{10|}}$を表す算式を示せ。(出題中の記号を用い、$\Sigma$を用いて記述してよい。)

(4)設立当初から保険料率$P_{x:\overline{10|}}$で制度運営してきた場合、2009 年 12 月 22 日の保険料払込み直後のこの年金制度の積立金を表す算式を示せ。($P_{x:\overline{10|}}$、$\Sigma$を用いて記述してよい。)

問題4 Trowbridge モデルの給付を行う年金制度において、被保険者集団は既に定常人口状態になっているものとする。期初の被保険者の総数を$L$、脱退残存表による$x$歳の被保険者数を$l_x$、および$x$歳の者の平均脱退率を$1/\varepsilon_x = l_x / (\sum_{y=x}^{r-1} l_y)$ とする。(ここに$r$は定年年齢)

この前提において以下の問に答えよ。(20 点)

(1)毎年期初に$x_1$歳と$x_2$歳で2:1の割合で新規加入があるとした場合、それぞれの年齢の新規加入者数を求めよ。

(2)上記(1)の場合に、財政方式を加入年齢方式で運営するものとし、標準保険料率は年齢$x_1$歳の保険料率を用いるとした場合、毎年発生する後発過去勤務債務の額を示せ。ただし、$x_1 < x_2$とする。

(3)上記(1)の場合に財政方式を総合保険料方式で運営するものとし、成熟状態に達した場合の総合保険料方式保険料率の極限値を示せ。(結果の保険料率のみを答えることでよい。)

(4)上記(1)の場合に、(2)の後発過去勤務債務を、その年の新規加入員全員に共通の特別保険料率として、被保険者である期間に亘って均等に償却する料率を算式で示し、これに年齢$x_1$歳の加入年齢方式の標準保険料率を加えたものが(3)の総合保険料方式の保険料率に一致することを示せ。

以上

(注)出題した問題文の一部（問題２．(1)）において不適切な記載表現があったため、それを訂正して問題を掲載した。なお、この不適切な記載表現の結果、正解が求まらない事態に配慮し、採点にあたっては、すべての受験者に該当設問に関し配点をした。

# 年金数理 解答例

問題1.

| 番号 | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 記号 | (B) | (E) | (A) | (D) | (B) | (C) | (D) | (A) | (A) | (D) |

| 番号 | (11) | (12) |
|---|---|---|
| 算式 | $(1+k)\cdot U+k\cdot F$ | $V_0+V_1-V_2$ |

問題1. の正答は上記であるが、以下に略解を付す。

(1) 3重脱退残存表のA事由による$x$歳の脱退者数は$l_x\cdot q_x^A$であるが、これは$l_x\cdot q_x^{A*}$に比べ、A事由脱退、C事由脱退に先立ってB事由脱退した者、A事由脱退、B事由脱退に先立ってC事由脱退した者に係る分だけ少ないこととなる。このカウントされなかったA事由脱退者数は問題文の仮定から

$$\int_0^1 t\cdot q_x^{B*}\cdot l_x\cdot q_x^{A*}dt+\int_0^1 t\cdot q_x^{C*}\cdot l_x\cdot q_x^{A*}dt=\frac{1}{2}\cdot l_x\cdot q_x^{A*}\cdot(q_x^{B*}+q_x^{C*})$$ である。

ただし、$\frac{1}{2}\cdot l_x\cdot q_x^{A*}\cdot q_x^{B*}$にはB事由脱退の前にC事由脱退が生じている分が含まれるから除く必要があり、同様にC事由脱退の前のB事由脱退も含め確率を計算すると

$$\int_0^t s\cdot q_x^{C*}\cdot q_x^{B*}ds+\int_0^t s\cdot q_x^{B*}\cdot q_x^{C*}=2\cdot\left[\frac{t^2}{2}\cdot q_x^{B*}\cdot q_x^{C*}\right]_0^t=t^2\cdot q_x^{B*}\cdot q_x^{C*}$$

であるから人数は$\int_0^1 t^2\cdot q_x^{B*}\cdot q_x^{C*}\cdot l_x\cdot q_x^{A*}dt=\frac{1}{3}q_x^{B*}\cdot q_x^{C*}\cdot l_x\cdot q_x^{A*}$

となる。したがって$q_x^A$は$q_x^A=q_x^{A*}\left\{1-\frac{1}{2}\cdot(q_x^{B*}+q_x^{C*})+\frac{1}{3}\cdot q_x^{B*}\cdot q_x^{C*}\right\}$と表わされるので(B)が正解である。

(2)初期過去勤務債務の未償却分の年度末額は$(100-25)\times 1.03=77.25$。この年度の利差損は$(25+15-10)\times(0.03-0.02)=0.3$である。また、

年度末の制度変更前の責任準備金は$(100+15-10)\times 1.03=108.15$であるから、制度変更による後発債務は$108.15\times 0.2=21.63$となる。これらの合計が決算時の過去勤務債務であるので

$77.25+0.3+21.63=99.18$となり、(E)が正解である。

(3)(B)および(D)は教科書理論編(2-46)式から正しい算式である。(C)式は教科書理論編(2-44)式から正しい算式である。(E)式は少なくとも一人が生存している場合の年金で 2 名の連生年金の場合は(C)式と内容は同じとなり正しい。(A)は誤り。$\ddot{a}_{x|y}=\ddot{a}_y-\ddot{a}_{xy}$である。したがって、正解は(A)である。

(4)方法Aの場合の過去勤務債務残高は当初過去勤務債務の約 0.191 倍になっている。一方、方法Bの場合の過去勤務債務残高は約 0.141 倍となっている。したがって、(0.191/0.141＝1.3546…)だから(D)が正解である。

(5)教科書理論編(3-39)式$S^p+\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)}\cdot(\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x})$および年金者の給付現価理論編(3-8)式$S^p=\sum_{x=x_r}^{\omega} l_x\cdot\ddot{a}_x$から(B)が正解である。

(6)利率$i$の 60 歳支給開始 10 年保証付終身年金現価率は

$\bar{a}_{\overline{10|}}+(N_{70}/D_{60})$であるから、表より

7.74214＋(17,678.1035934/4,937.9643477)=11.32218 となる。

利率$j$の 60 歳支給開始 15 年保証付終身年金現価率は表より

$\bar{a}_{\overline{15|}}+(N_{75}/D_{60})$であるから

11.71723+(45,906.7353643/13,033.1907355)=15.23952 となる。

変更後の年金額は退職一時金資金をSとすると(S/11.71723)となるから、変更後の年金現価は(S/11.71723)×15.23952 であり、これは変更前の年金原資(S/7.74214)×11.32218 に対して 0.889 倍となっている。したがって(C)が正解である。

(7)減少した積立金額をΓとすると、この年金制度のある年度の推移は$(F+C-B)\times(1+j)=F-\Gamma$と表わすことができる。翌年度の推移

は$\{F-\Gamma+C-(B-\Delta)\}\times(1+i)=F$であり、$\Gamma$を消去すると

$(F+C-B)\times(1+j)+C-(B-\Delta)=\dfrac{F}{1+i}$より

$\Delta=(B-C)\cdot(2+j)-F\cdot(j+\dfrac{i}{1+i})$だから(D)が正解である。

(8)教科書実務編(2-49)式(加入者の平均給与)$\times\dfrac{b_{x_e}\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}l_x}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}(b_x\cdot l_x)}$に加入者の

平均給与として$\dfrac{B}{L}$を代入したものとなるから(A)が正解である。

(9)平均残存勤務年数は、年齢別の残存勤務年数に年齢別加入員数を乗じて、総加入員数で除したものである。満$x$歳の社員の残存勤務年数は$T_x/L_x$であるため、全社員の年齢別残存勤務年数に年齢別加入員数を乗じた値は$\sum_{k=0}^{x_r-x_e-1}(L_{x_e+k}\cdot T_{x_e+k}/L_{x_e+k})=\sum_{k=0}^{x_r-x_e-1}T_{x_e+k}$であり、平均残存勤務年数は$\sum_{k=0}^{x_r-x_e-1}T_{x_e+k}\Big/\sum_{k=0}^{x_r-x_e-1}L_{x_e+k}$となるので(A)が正解である。

(10)極限方程式$C+d\cdot F=\upsilon\cdot B$が成立していた。保険料が$0.8\cdot C$となった後から第$t$年度末の積立金を$F_t$とすると$0.8\cdot C+d\cdot F_{t-1}=\upsilon\cdot B$より1〜$t$までを辺々を加え、$0.8\cdot C\cdot \ddot{a}_{\overline{t}|}+F_0=\upsilon\cdot B\cdot \ddot{a}_{\overline{t}|}+\upsilon^t\cdot F_t$となる。また、$F_0=F$であるから$C\cdot \ddot{a}_{\overline{t}|}+F_0=\upsilon\cdot B\cdot \ddot{a}_{\overline{t}|}+\upsilon^t\cdot F_0$となり、式の差$0.2\cdot C\cdot \ddot{a}_{\overline{t}|}=\upsilon^t\cdot(F_0-F_t)$が成立し、かつ$F_t<0.9\cdot F_0$を満足する$t$を求めると$0.2\cdot C\cdot \ddot{a}_{\overline{t}|}>0.1\cdot\upsilon^t\cdot F$であり、$\upsilon^t>\dfrac{2\cdot C}{(1-\upsilon)\cdot F+2\cdot C}=\dfrac{2\cdot C}{\upsilon\cdot B+C}$

より$t>\dfrac{1}{\delta}\cdot\log\dfrac{2\cdot C}{\upsilon\cdot B+C}$となり(D)が正解である。

(11)制度変更直前の責任準備金額$V$は$V=F+U$と書ける。制度変更後の責任準備金額は$(1+k)\cdot V=(1+k)\cdot(F+U)$と書けるから制度変更後の過去勤務債務は、責任準備金額から年金資産額を控除した

$(1+k)\cdot V-F=(1+k)\cdot(F+U)-F=(1+k)\cdot U+k\cdot F$である。

(12)問題中の全ての制度に関して、標準保険料収入現価 $P\cdot G$ は等しい。

期間通算される場合の給付現価を $\alpha$ 、期間通算しない場合の給付現価を $\beta$ で適用乗率を添え字とすると、題意の 3 種類の制度の責任準備金額は以下のとおり表わされる。

$V_0 = \beta_A + \beta_B - P\cdot G$ ……(1)

$V_1 = \alpha_A + \alpha_B - P\cdot G$ ……(2)

$V_2 = \alpha_A + \beta_B - P\cdot G$ ……(3)

求める制度の責任準備金額の算式は $\beta_A + \alpha_B - P\cdot G$ であるから、

(1)+(2)－(3)で表わせるので $V_0 + V_1 - V_2$ となる。

問題２．(1)教科書 P61 から 63 参照

| 番号 | 算式 |
|---|---|
| ① | $x_r - x_e$ |
| ② | $D_{x_r}\cdot \ddot{a}_{x_r}$ |
| ③ | $(l_{x_r}\cdot \ddot{a}_{x_r})/(x_r - x_e)$ |
| ④ | $l_x^{(T)}\cdot\{(x-x_e)/(x_r-x_e)\}\cdot(D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}/D_x)$ |
| ⑤ | $S_{PS}^a + {}^TC$ |
| ⑥ | $x - x_e$ |
| ⑦ | $D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}/D_x$ |
| ⑧ | $v^{x_r - x}\cdot(x - x_e)$ |
| ⑨ | $x_r - x_e$ |
| ⑩ | $\sum_{k=1}^{x_r - x_e} v^k$ |

問題２．(2)教科書 P163 から 174 参照

| 番号 | 算式 |
|---|---|
| ① | $S^f/G^f$ |
| ② | $S^p + S^a - (S^f/G^f) \cdot G^a - F$ |
| ③ | $\left\{S^p + S^a - (S^f / G^f) \cdot G^a - F\right\} / (\sum LB \cdot \ddot{a}_{\overline{n}\rvert})$ |
| ④ | $(S^a_{FS} + S^f)/(G^a + G^f)$ |
| ⑤ | $\left\{S^p + (S^a - S^a_{FS}) - F\right\} / (\sum LB \cdot \ddot{a}_{\overline{n}\rvert})$ |

問題２．(3)教科書 P102 から 107 参照

| 番号 | 算式 |
|---|---|
| ① | $i \cdot S_x - i \cdot P \cdot G_x + (1+i) \cdot P \cdot l_x$ |
| ② | $(1+i) \cdot P \cdot l_x$ |
| ③ | $i \cdot P \cdot G_x - i \cdot S_x$ |
| ④ | $S_{x_e} - P \cdot G_{x_e}$ |
| ⑤ | 0 |
| ⑥ | $P \cdot G_{x_e} - S_{x_e}$ |
| ⑦ | $i \cdot S_x - (1+i) \cdot l_x$ |
| ⑧ | $-(1+i) \cdot l_x$ |
| ⑨ | $-i \cdot S_x$ |

問題３.

(1)与えられた脱退率から、新規被保険者の毎年 12 月 22 日の残存者数は、N･(10－t)/10 となる（t は t<10 の正の整数）。したがって2004 年 12 月 22 日における被保険者総数は $\sum_{t=0}^{5} N\cdot(10-t)/10 = 4.5\cdot N$、給与総額は $\sum_{t=0}^{5} N\cdot(10-t)/10\cdot B\cdot(1+b/100)^{t}$ となる。

(2)当該年金受給資格を得る者は 0.1･N 人であり、これらの者の 2008 年 12 月 22 日における年金現価額は $0.1\cdot N\cdot A\cdot(1+i/100)^{-1/2}\cdot a_{x+10}$ となる。2008 年 12 月 22 日現在の被保険者(保険料負担者)の給与総額は $\sum_{t=0}^{9} N\cdot(10-t)/10\cdot B\cdot(1+b/100)^{t}$ となるから、賦課方式の保険料率は $P = A\cdot(1+i/100)^{-1/2}\cdot a_{x+10}\Big/\sum_{t=0}^{9}(10-t)\cdot B\cdot(1+b/100)^{t}$ となる。

(3)新規被保険者一人当たりの加入時点での年金現価額は $0.1\cdot A\cdot(1+i/100)^{-19/2}\cdot a_{x+10}$ となり、同じく新規被保険者一人当たりの加入時点での給与現価は $\sum_{t=0}^{9}(10-t)/10\cdot B\cdot(1+b/100)^{t}\cdot(1+i/100)^{-t}$ であるから、加入年齢方式での保険料率は

$$P_{x:\overline{10|}} = \frac{A\cdot a_{x+10}}{\sum_{t=0}^{9}(10-t)\cdot B\cdot(1+b/100)^{t}\cdot(1+i/100)^{9\frac{1}{2}-t}}$$

(4)2009 年 12 月 22 日までのこの制度からの支払は 2008 年 12 月 22 日から 2009 年 12 月 21 日までの 1 年間の年金給付 0.1･A･N の支払だけである。したがって、積立金は当該時点までの保険料の終価から支払年金の終価を控除したものとなる。保険料の終価は

$$B\cdot N\cdot P_{x:\overline{10|}}\cdot\sum_{t=0}^{9-\tau}\sum_{\tau=0}^{9}(10-t)/10\cdot(1+b/100)^{t}\cdot(1+i/100)^{9-\tau-t}$$ だから、

$$B\cdot N\cdot P_{x:\overline{10|}}\cdot\sum_{t=0}^{9-\tau}\sum_{\tau=0}^{9}(10-t)/10\cdot(1+b/100)^{t}\cdot(1+i/100)^{9-\tau-t} -$$

$$0.1\cdot A\cdot N\cdot(1+i/100)^{1\,2}$$

である。

問題４.

(1) $x_1, x_2$ 歳それぞれの年齢において求める新規加入者数を $A_1, A_2$ とすると $A_1 : A_2 = 2:1$ と $A_1 \cdot \varepsilon_{x_1} + A_2 \cdot \varepsilon_{x_2} = L$ の連立方程式を解くと

$A_1 = 2 \cdot L / (2 \cdot \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2})$、 $A_2 = L / (2 \cdot \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_1})$ となる。

(2) 定常人口を仮定しているから、毎年発生する後発過去勤務債務は $x_2$ 歳で加入する新規加入者の加入時責任準備金相当額である。

$x_2$ 歳の一人当たり責任準備金は $\dfrac{N_r}{D_{x_2}} \cdot \dfrac{N_{x_1} - N_{x_2}}{N_{x_1} - N_r}$ となるから、(1) で求めた人数分の $\dfrac{L}{2 \cdot \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2}} \cdot \dfrac{N_r}{D_{x_2}} \cdot \dfrac{N_{x_1} - N_{x_2}}{N_{x_1} - N_r}$ が求める過去勤務債務となる。

(3) $${}^{C}P = \frac{N_r \cdot (2 \cdot D_{x_2} + D_{x_1})}{2 \cdot D_{x_2} \cdot (N_{x_r} - N_r) + D_{x_1} \cdot (N_{x_2} - N_r)}$$

(4) 年齢 $x_1$ の加入年齢方式の標準保険料率は ${}^{E}P = N_r / (N_{x_1} - N_r)$ である。特別保険料率は、(2) の後発過去勤務債務を給与現価で除して求まる。給与現価は

$\dfrac{(N_{x_1} - N_r)}{D_{x_1}} \cdot \dfrac{2 \cdot L}{2 \cdot \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2}} + \dfrac{(N_{x_2} - N_r)}{D_{x_2}} \cdot \dfrac{L}{2 \cdot \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2}}$ となるので、

特別保険料率を算式で表わし ${}^{E}P$ との合計を求めると、

$${}^{E}P + P^{PSL} = \frac{N_r}{N_{x_1} - N_r} + \frac{\dfrac{L}{2 \cdot \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2}} \cdot \dfrac{N_r}{D_{x_2}} \cdot \dfrac{N_{x_1} - N_{x_2}}{N_{x_1} - N_r}}{\dfrac{N_{x_1} - N_r}{D_{x_1}} \cdot \dfrac{2 \cdot L}{2 \cdot \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2}} + \dfrac{N_{x_2} - N_r}{D_{x_2}} \cdot \dfrac{L}{2 \cdot \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2}}}$$

$$= \frac{N_r}{N_{x_1} - N_r} + \frac{\dfrac{N_r}{D_{x_2}} \cdot \dfrac{N_{x_1} - N_{x_2}}{N_{x_1} - N_r}}{\dfrac{N_{x_1} - N_r}{D_{x_1}} \cdot 2 + \dfrac{N_{x_2} - N_r}{D_{x_2}}} = \frac{N_r}{N_{x_1} - N_r} \left\{ 1 + \frac{D_{x_1} \cdot (N_{x_1} - N_{x_2})}{2 \cdot D_{x_2} (N_{x_1} - N_r) + D_{x_1} \cdot (N_{x_2} - N_r)} \right\}$$

$$= \frac{N_r \cdot (2 \cdot D_{x_2} + D_{x_1})}{2 \cdot D_{x_2} \cdot (N_{x_1} - N_r) + D_{x_1} \cdot (N_{x_2} - N_r)}$$ であり、(3) に一致する。