数 学 2（問題）

1．次の各問の$\boxed{}$に入る答のみを、所定の解答用紙に記入せよ。なお、必要であれば、付表の数値を用いよ。（35点）

（1）平均、分散の不明な2次元正規分布の母集団から抽出された大きさnの標本の標本相関係数は0.6であった。このとき、母相関係数についての仮説「$\rho=0$」が有意水準0.05の両側検定で棄却されたとすれば、標本の大きさnは$\boxed{}$以上である。

（2）母平均がともにμ、母分散はそれぞれ、σ_1^2, σ_2^2の2つの母集団をA, Bとする。A, Bからそれぞれ大きさn_1, n_2の標本、$(X_1, X_2, \cdots, X_{n_1})$、$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2})$を抽出し、標本平均$\overline{X}$, $\overline{Y}$を用いてZを、$Z=\dfrac{w_1\overline{X}+w_2\overline{Y}}{w_1+w_2}$と定義する。このとき、V(Z)を最小にする$w_1$, w_2の比は$w_1:w_2=\boxed{}:\boxed{}$である。

（3）ある金属線に関し、A社の製品4本とB社の製品6本について破断強度を測定したところ、次の結果を得た。

A社：41.7, 40.3, 35.8, 37.8（kg）

B社：45.6, 40.7, 43.6, 40.5, 43.2, 39.6（kg）

A社の製品とB社の製品の母集団は、分散の等しい正規分布に従うものとして、A、Bの2社の製品の破断強度の平均値の差の95％信頼区間は$\boxed{}$である（小数点以下第3位を四捨五入せよ）。

（4）世帯数70,000の都市で、n世帯の世帯人数を調べて総人口を推定するのに、その変動係数（平均μと標準偏差σの比$\dfrac{\sigma}{\mu}$）を5％以下にするには、標本の大きさnを$\boxed{}$以上にすればよい。ただし、母集団の変動係数は1以下であることがわかっているものとする。

（5）半径μの円の半径を測定し、その値をXとする。Xは正規分布$N(\mu, \sigma^2)$に従うものとし、半径をn回測定したときの平均を$\overline{X}$とする。円の面積$\pi\mu^2$を推定するのに、推定量として$\pi\overline{X}^2$を用いるとき、$E(\pi\overline{X}^2)=\boxed{}$である。

（付表）t分布表：$t_\phi(\varepsilon)$（自由度ϕ、上側確率ε）

ϕ＼ε	0.05	0.025	ϕ＼ε	0.05	0.025
1	6.314	12.706	11	1.796	2.201
2	2.920	4.303	12	1.782	2.179
3	2.353	3.182	13	1.771	2.160
4	2.132	2.776	14	1.761	2.145
5	2.015	2.571	15	1.753	2.131
6	1.943	2.447	16	1.746	2.120
7	1.895	2.365	17	1.740	2.110
8	1.860	2.306	18	1.734	2.101
9	1.833	2.262	19	1.729	2.093
10	1.812	2.228	20	1.725	2.086

2．指数分布（確率密度関数$f(x, \theta)=\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}$　$(0\leq x<\infty,\ 0<\theta)$）を持つ母集団から大きさ1の標本xを抽出し、帰無仮説　H：$\theta=\theta_0$を対立仮説　A：$\theta<\theta_0$に対して検定する（$\theta_0>0$）。

このとき、有意水準0.05に対する一様最強力（一様最有力）検定の棄却域Cを求めよ。（15点）

3．（X_1，X_2，…X_n）を母数θの母集団からの標本変量とし、$\hat{\theta}$（X_1，X_2，…X_n），T（X_1，X_2，…X_n）を、それぞれ、標本変量（X_1，X_2，…X_n）からつくられる母数θの不偏推定量および十分統計量とする。

（1）$\hat{\theta}^* = E(\hat{\theta} | T)$ はθの不偏推定量であることを示せ。ただし、$\hat{\theta}$とTの結合確率分布および$\hat{\theta}$，Tの周辺確率分布は連続型であるとする（以下の問についても同様)。

（2）$E((\hat{\theta} - \hat{\theta}^*)(\hat{\theta}^* - \theta)) = 0$であることを示せ。

（3）$V(\hat{\theta}^*) \leq V(\hat{\theta})$ となることを示せ。 (25点)

4．平均mのポアソン分布に従う母集団について、母平均mの信頼区間を求めるため、以下の考察を行う。

（1）$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^k}{k!} + \frac{1}{k!}\int_0^a e^x (a-x)^k dx$を示せ。

（2）$f_{2(k+1)}(x)$を自由度2（k＋1）のχ^2分布の確率密度関数としたとき、パラメーターλのポアソン分布 $p(j;\lambda) = \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$ $(j = 0, 1, 2, \cdots)$ に対して、

$\sum_{j=0}^{k} p(j;\lambda) = \int_{2\lambda}^{\infty} f_{2(k+1)}(x)dx$, $\sum_{j=k+1}^{\infty} p(j;\lambda) = \int_0^{2\lambda} f_{2(k+1)}(x)dx$ となることを（1）の結果を用いて示せ。

（3）（2）を利用して、母平均mに対する信頼係数αの信頼区間を求めよ。

(25点)

以 上

数学２　　解答

１．

（１）仮説「ρ＝０」が棄却されるのは、$\dfrac{|r|}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2} > t_{n-2}\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ が満たされる場合

である。

ここで、r＝0.6 を代入して、ｎをいろいろ変えて不等式の成立を調べると、

$n=9$:　$0.75\times\sqrt{7} < 2.365$

$n=10$:　$0.75\times\sqrt{8} < 2.306$

$n=11$:　$0.75\times\sqrt{9} < 2.262$

$n=12$:　$0.75\times\sqrt{10} > 2.228$

よって、ｎは$\boxed{12}$個以上必要である。

（２）

$$E(Z)=E\left(\frac{w_1\overline{X}+w_2\overline{Y}}{w_1+w_2}\right)=\frac{1}{w_1+w_2}\left(w_1E\left(\overline{X}\right)+w_2E\left(\overline{Y}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{w_1+w_2}\left(w_1\mu+w_2\mu\right)=\mu$$

$$V(Z)=V\left(\frac{w_1\overline{X}+w_2\overline{Y}}{w_1+w_2}\right)=\frac{1}{\left(w_1+w_2\right)^2}\left(w_1{}^2V\left(\overline{X}\right)+w_2{}^2V\left(\overline{Y}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\left(w_1+w_2\right)^2}\left(w_1\ \frac{\sigma_1{}^2}{n_1}+w_2\frac{\sigma_2{}^2}{n_2}\right)$$

$$=\left(\frac{w_1}{w_1+w_2}\right)^2\frac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\left(\frac{w_2}{w_1+w_2}\right)^2\frac{\sigma_2{}^2}{n_2}$$

V(Z)を最小にする w_1, w_2 を求めるために、$\nu_1=\dfrac{w_1}{w_1+w_2}$，$\nu_2=\dfrac{w_2}{w_1+w_2}$ とおけば、

$\nu_1+\nu_2=1$であり、

$$V(Z)=\nu_1{}^2\frac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\nu_2{}^2\frac{\sigma_2{}^2}{n_2}=\nu_1{}^2\frac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\left(1-\nu_1\right)^2\frac{\sigma_2{}^2}{n_2}=\left(\frac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\frac{\sigma_2{}^2}{n_2}\right)\nu_1{}^2-2\frac{\sigma_2{}^2}{n_2}\nu_1+\frac{\sigma_2{}^2}{n_2}$$

ここで、$\dfrac{\partial V(Z)}{\partial \nu_1} = 2\left(\dfrac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2{}^2}{n_2}\right)\nu_1 - 2\dfrac{\sigma_2{}^2}{n_2}$ より、V(Z)は、$\nu_1 = \dfrac{\dfrac{\sigma_2{}^2}{n_2}}{\dfrac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2{}^2}{n_2}}$ のとき最小に

なる。このとき、$\nu_2 = \dfrac{\dfrac{\sigma_1{}^2}{n_1}}{\dfrac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2{}^2}{n_2}}$

よって、$w_1 : w_2 = \nu_1 : \nu_2 = \boxed{\dfrac{\sigma_2{}^2}{n_2}} : \boxed{\dfrac{\sigma_1{}^2}{n_1}}$ または$\boxed{n_1\sigma_2{}^2} : \boxed{n_2\sigma_1{}^2}$

（3） A社製品について、

$n_A = 4$, $\bar{x}_A = \dfrac{1}{4}(41.7+40.3+35.8+37.8) = 38.9$,

$3s_A{}^2 = (41.7-38.9)^2+(40.3-38.9)^2+(35.8-38.9)^2+(37.8-38.9)^2 = 20.62$

B社製品について、

$n_B = 6$, $\bar{x}_B = \dfrac{1}{6}(45.6+40.7+43.6+40.5+43.2+39.6) = 42.2$

$$5s_B{}^2 = (45.6-42.2)^2+(40.7-42.2)^2+(43.6-42.2)^2+$$
$$(40.5-42.2)^2+(43.2-42.2)^2+(39.6-42.2)^2$$
$$=26.42$$

であるから、

$x_A - x_B = -3.3$, $s^2 = \dfrac{3\,s_A{}^2+5\,s_B{}^2}{n_A+n_B-2} = \dfrac{20.62+26.42}{8} = 5.88$, $s = 2.425$,

$\sqrt{\dfrac{1}{n_A}+\dfrac{1}{n_B}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}} = \sqrt{\dfrac{5}{12}} = 0.6455$

自由度 $n_A + n_B - 2 = 4+6-2 = 8$ のとき、t分布表より $t_8(0.025) = 2.306$ である。

正規母集団の平均値の差の区間推定は、

$\left(\left(\bar{x}_A - \bar{x}_B\right) - t_\phi\left(\varepsilon/2\right)\, s\sqrt{\dfrac{1}{n_A}+\dfrac{1}{n_B}}\ ,\ \left(\bar{x}_A - \bar{x}_B\right) + t_\phi\left(\varepsilon/2\right)\, s\sqrt{\dfrac{1}{n_A}+\dfrac{1}{n_B}}\right)$ で与えられるか

ら、これに各数値を代入して、求める信頼区間は、

$(-3.3-2.306\times2.425\times0.6455\ ,\ -3.3+2.306\times2.425\times0.6455) = \boxed{(-6.91\ ,\ 0.31)}$

（4）母平均をμ、母分散をσ^2とすると、題意より、$\dfrac{\sigma}{\mu} \le 1$

総人口をτ、総世帯数をN、標本の大きさをnとし、総人口の推定量をTとすると、

$E(T)=\tau$, $V(T)=N^2\dfrac{N-n}{N-1}\cdot\dfrac{\sigma^2}{n}$, $\mu=\dfrac{\tau}{N}$であるから、Tの変動係数は、

$$\frac{\sqrt{V(T)}}{E(T)}=\frac{N\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\tau}=\frac{\sigma}{\mu}\cdot\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\le\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$

したがって、$\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}\le 0.05$

これを解いて、N=70,000を代入すれば、$n\ge\dfrac{N}{0.05^2(N-1)+1}=397.7\cdots$

よって、標本の大きさは$\boxed{398}$以上とすればよい。

（5）$E\left(\overline{X}\right)=E\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i\right)=\dfrac{1}{n}\cdot n\cdot\mu=\mu$より、

$$E\left(\pi\overline{X}^2\right)=\pi E\left(\overline{X}^2\right)=\pi\left(E\left(\overline{X}\right)^2+V\left(\overline{X}\right)\right)=\pi\left(\mu^2+V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right)=\pi\left(\mu^2+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V\left(X_i\right)\right)$$

$$=\pi\left(\mu^2+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2\right)=\pi\left(\mu^2+\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2\right)=\boxed{\pi\left(\mu^2+\frac{\sigma^2}{n^2}\right)}$$

2.

$\theta_1<\theta_0$なる任意のθ_1をとり、与えられた帰無仮説に対して対立仮説を$A':\theta=\theta_1$とした有意水準0.05の検定を考える。このとき、最強力検定法の棄却域は、ネイマン・ピアソンの補題により、不等式$\dfrac{f(x,\theta_1)}{f(x,\theta_0)}\ge k$（kは正の定数）を満たすxの集合$C_k$で与えられる。

$$\frac{f(x,\theta_1)}{f(x,\theta_0)}\ge k\Rightarrow\frac{\dfrac{1}{\theta_1}\exp\left(-\dfrac{x}{\theta_1}\right)}{\dfrac{1}{\theta_0}\exp\left(-\dfrac{x}{\theta_0}\right)}\ge k\Rightarrow\frac{\theta_0}{\theta_1}\exp\left(-\left(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{\theta_0}\right)x\right)\ge k\Rightarrow x\le k'\quad\left(k'=-\frac{\log\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_0}k\right)}{\dfrac{1}{\theta_1}-\dfrac{1}{\theta_0}}\right)$$

よって、C_kは　$\{x\,;\,0 \le x \le k'\}$の形の区間で与えられる。

さらに、有意水準0.05とするためには、$\int_{W_k} f(x,\theta_0)=0.05$　とすればよい。

$$\int_{W_k} f\left(x,\theta_0\right)=\int_0^{k'}\frac{1}{\theta_0}\exp\left(-\frac{x}{\theta_0}\right)dx=\left[-\exp\left(-\frac{x}{\theta_0}\right)\right]_0^{k'}=1-\exp\left(-\frac{k'}{\theta_0}\right)=0.05$$

$\therefore\quad k'=-\theta_0\log(0.95)$

よって、C_kはθ_1には依存せず、すべての$\theta<\theta_0$に対して、C_kは同一である。

従って、求める棄却域Cは、$\underline{C=\{x\,;\,0\le x\le -\theta_0\log(0.95)\}}$　である。

3.

$\hat\theta$とTの結合確率密度関数を$f_{\hat\theta,T}(x,t;\theta)$、$\hat\theta$とTの確率密度関数をそれぞれ、

$f_{\hat\theta}(x;\theta)$, $f_T(t;\theta)$とし、T＝tが与えられたときの$\hat\theta$の条件付確率密度関数を$f_{\hat\theta|T}(x,t)$

とすると、$f_{\hat\theta}(x;\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{\hat\theta,T}(x,t;\theta)dt$, $f_{\hat\theta|T}(x,t)=\dfrac{f_{\hat\theta,T}(x,t;\theta)}{f_T(t;\theta)}$　である。ところで、

Tの十分性により、$f_{\hat\theta|T}(x,t)$はθに関係しない。

（1）

$$\hat\theta^*(t)=E(\hat\theta|T)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f_{\hat\theta|T}(x,t)\,dx=\frac{1}{f_T(t;\theta)}\int_{-\infty}^{\infty}x\,f_{\hat\theta,T}(x,t;\theta)dx$$　であるから、

$$E(\hat\theta^*)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{f_T(t;\theta)}\int_{-\infty}^{\infty}xf_{\hat\theta,T}(x,t;\theta)\,dx\right\}f_T(t;\theta)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}xf_{\hat\theta,T}(x,t;\theta)\,dx\right\}dt$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f_{\hat\theta,T}(x,t;\theta)\,dt\right\}dx=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{\hat\theta}(x;\theta)\,dx=\theta$$

（$\because\hat\theta$はθの不偏推定量）

よって、$\hat\theta^*$はθの不偏推定量である。

（2）

$$E\left((\hat\theta-\hat\theta^*)(\hat\theta^*-\theta)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(x-\hat\theta^*(t))(\hat\theta^*(t)-\theta)\,f_{\hat\theta,T}(x,t;\theta)dx\right\}dt$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(x-\hat\theta^*(t))\,f_{\hat\theta|T}(x,t)dx\right\}(\hat\theta^*(t)-\theta)\,f_T(t;\theta)\,dt$$

ここで、

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-\hat{\theta}^*(t))f_{\hat{\theta}|T}(x,t)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{\hat{\theta}|T}(x,t)\,dx-\hat{\theta}^*(t)\int_{-\infty}^{\infty}f_{\hat{\theta}|T}(x,t)\,dx$$
$$=E(\hat{\theta}|T)-\hat{\theta}^*(t)\bullet 1=\hat{\theta}^*(t)-\hat{\theta}^*(t)=0$$

であるから、 $E\left((\hat{\theta}-\hat{\theta}^*)(\hat{\theta}^*-\theta)\right)=0$

（3）

$$V(\hat{\theta})=E\left((\hat{\theta}-\theta)^2\right)=E\left(\{(\hat{\theta}-\hat{\theta}^*)+(\hat{\theta}^*-\theta)\}^2\right)$$
$$=E\left((\hat{\theta}-\hat{\theta}^*)^2\right)+2E\left((\hat{\theta}-\hat{\theta}^*)(\hat{\theta}^*-\hat{\theta})\right)+E\left((\hat{\theta}^*-\theta)^2\right)$$
$$=E\left((\hat{\theta}-\hat{\theta}^*)^2\right)+2E\left((\hat{\theta}-\hat{\theta}^*)(\hat{\theta}^*-\theta)\right)+V(\hat{\theta}^*)$$

ここで、 $E\left((\hat{\theta}-\hat{\theta}^*)^2\right)\geq 0$ と（2）の結果より、 $V(\hat{\theta})\geq V(\hat{\theta}^*)$

4．

（1） $I_k=\frac{1}{k!}\int_0^a e^x(a-x)^k dx$ とする。部分積分により、

$$I_k=\frac{1}{k!}\int_0^a e^x(a-x)^k dx=\frac{1}{k!}\left\{\left[e^x(a-x)^k\right]_0^a-\int_0^a e^x k(a-x)^{k-1}(-1)dx\right\}$$
$$=\frac{1}{k!}\left(-a^k+k\int_0^a e^x\,(a-x)^{k-1}dx\right)=-\frac{a^k}{k!}+\frac{1}{(k-1)!}\int_0^a e^x\,(a-x)^{k-1}\,dx=-\frac{a^k}{k!}+I_{k-1}$$

これより、 $I_k=-\frac{a^k}{k!}-\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}-\cdots-\frac{a^2}{2!}-\frac{a^1}{1!}+I_0$ となる。

ここで、 $I_0=\int_0^a e^x dx=e^a-1$ であるから、

$$I_k=\frac{1}{k!}\int_0^a e^x(a-x)^k dx=-\frac{a^k}{k!}-\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}-\cdots\cdots-\frac{a^2}{2!}-\frac{a^1}{1!}+e^a-1$$

よって、 $e^a=1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^k}{k!}+\frac{1}{k!}\int_0^a e^x(a-x)^k dx$

（2）（1）の結果を用いて、

$$\sum_{j=0}^{k}p(j;\lambda)=e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{\lambda^k}{k!}\right)=e^{-\lambda}\left\{e^{\lambda}-\frac{1}{k!}\int_0^{\lambda}e^x(\lambda-x)^k dx\right\}$$
$$=1-\frac{1}{k!}\int_0^{\lambda}e^{-(\lambda-x)}(\lambda-x)^k dx$$

$u = 2(\lambda - x)$ とすれば、 $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} p(j;\lambda) = 1 - \frac{1}{k!}\int_{2\lambda}^{0} e^{-\frac{u}{2}}\left(\frac{u}{2}\right)^{k}\left(-\frac{1}{2}\right)du$

ここで、 $k! = \Gamma(k+1) = \Gamma\left(\dfrac{2(k+1)}{2}\right)$ より、

$$\sum_{j=0}^{k} p(j;\lambda) = 1 - \int_{0}^{2\lambda} \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{2(k+1)}{2}\right)} e^{-\frac{u}{2}}\left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{2(k+1)}{2}-1} du$$ となる。

自由度 2(k+1)の χ^2 分布の確率密度関数は、

$$f_{2(k+1)}(x) = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{2(k+1)}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2(k+1)}{2}-1}$$

であるから、 $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} p(j;\lambda) = 1 - \int_{0}^{2\lambda} f_{2(k+1)}(x)\,dx = \int_{2\lambda}^{\infty} f_{2(k+1)}(x)\,dx$ である。

また、 $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{\infty} p(j;\lambda) = 1 - \sum_{j=0}^{k} p(j;\lambda) = 1 - \int_{2\lambda}^{\infty} f_{2(k+1)}(x)dx = \int_{0}^{2\lambda} f_{2(k+1)}(x)dx$ となる。

（3） 母集団からの大きさ n の標本を $(X_1, X_2, \cdots\cdots X_n)$ とすれば、

$T = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ は平均 n m のポアソン分布に従う。

信頼係数 α に対して、 $\varepsilon = \dfrac{1-\alpha}{2}$ とし、それぞれ、

$$\sum_{j=0}^{k_1} p(j;nm) \le \varepsilon, \quad \sum_{j=k_2}^{\infty} p(j;nm) \le \varepsilon \quad \left(p(j;m) = e^{-m}\frac{m^j}{j!} \right)$$

を満たす最大の $k_1 = k_1(m)$ と最小の $k_2 = k_2(m)$ を求めれば、

$P(k_1(m) < T < k_2(m)) \ge 1 - 2\varepsilon = \alpha$

T の実現値を t とするとき、 $k_1(m), k_2(m)$ の定義と（2）の結果より、

$k_1(m) < t < k_2(m)$

$$\Leftrightarrow \varepsilon < \sum_{j=0}^{t} p(j;nm) = \int_{2nm}^{\infty} f_{2(t+1)}(x)\,dx, \quad \varepsilon < \sum_{j=t}^{\infty} p(j;nm) = \int_{0}^{2nm} f_{2t}(x)\,dx$$

である。

自由度 2 （t+ 1） の χ^2 分布の上側 ε 点を $\chi_{\varepsilon}^2 = \chi_{2(t+1)}^2(\varepsilon)$ とすれば、

$\int_{\chi_\varepsilon^2}^{\infty} f_{2(t+1)}(x)dx = \varepsilon$ であるから、 $k_1(m) < t \Leftrightarrow 2nm \leq \chi_\varepsilon^2 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{\chi_\varepsilon^2}{2n}$

同様に、自由度２ｔのχ^2分布の上側$(1-\varepsilon)$点を$\chi_\varepsilon'^2 = \chi_{2t}^2(1-\varepsilon)$とすれば、

$\int_0^{\chi_\varepsilon'^2} f_{2t}(x)\,dx = \varepsilon$ であるから、 $k_2(m) > t \Leftrightarrow 2nm \geq \chi_\varepsilon'^2 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{\chi_\varepsilon'^2}{2n}$

よって、 $k_1(m) < t < k_2(m) \Leftrightarrow \dfrac{\chi_\varepsilon'^2}{2n} \leq m \leq \dfrac{\chi_\varepsilon^2}{2n}$

以上より求める信頼区間は、 $\underline{\left(\dfrac{\chi_{2t}^2(1-\frac{1-\alpha}{2})}{2n} , \dfrac{\chi_{2(t+1)}^2(\frac{1-\alpha}{2})}{2n} \right)}$