保険数学1（問題）

1．次の（1）から（10）までについて、それぞれ五つの選択肢の中から正しい答を一つ選んで、所定の解答用紙にその記号〔(A）から（E）のうちいずれか一つ。〕を記入せよ。（50点）

（1）一契約に帰属するファンド（金額S）があり、保険会社は以下の4通りの異なった方法（①～④）でこれを契約者に支払うことができるものとする。このとき、Sに最も近いのは次のうちどれか。但し、予定利率は同じとし死亡率は考えないこととする。

① 現時点で即時に永久年金の支払を開始する。年金は毎月末払で年金月額は180。

② 現時点からn年間にわたり年金を支払う。年金は毎月末払で年金月額は274.82。

③ 現時点からn年後に17,389.67を支払う。

④ 現時点で即時にSを支払う。

（A）5,000　（B）5,500　（C）6,000　（D）6,500　（E）7,000

（2）あるnについて$\bar{a}_{\overline{n}|}=n-2$が成り立ち、$\delta=0.05$とするとき、$\int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}dt$は次のうちどれか。

（A）10　（B）20　（C）30　（D）40　（E）50

（3）$\ell_x=\frac{\ell_0}{100}(100-x)\ (0\leqq x<100)$であるとき、次のうち最大の値となるものはどれか。

（A）${}_2q_{50}$　（B）$2\cdot\mu_{50}$　（C）$2\cdot m_{50}$　（D）${}_{4|2}q_{50}$　（E）$1/\mathring{e}_{50}$

（4）ある団体を組織し、毎年10,000人が年間を通して一様に入ってくるようにした。加入者はすべて45歳で加入し、下記のℓ_x表にしたがって生存、もしくは死亡し55歳になればすべて退会するものとする。この団体は10年経過すれば定常状態に到達するが、そのときの人数に最も近いのは次のうちどれか。

（A）93,226　（B）93,438　（C）95,879　（D）98,226　（E）98,438

ℓ_x表

x	ℓ_x
44	96,107
45	95,879
46	95,632
47	95,360
48	95,060
49	94,726

x	ℓ_x
50	94,353
51	93,936
52	93,472
53	92,969
54	92,423
55	91,829

（5）x歳加入の終身保険（保険金額1で年末支払）の終身払込年払純保険料をPxとするとき、同じ終身保険のm年払込年払純保険料は4Pxに等しいという。

いま、契約後m年間は1.5Px、その後は終身にわたって0.5Pxを年払純保険料として払込む終身保険（保険金年末支払）を考えるものとすると、この終身保険の保険金額に最も近いものは次のうちどれか。

（A）0.60　（B）0.65　（C）0.70　（D）0.75　（E）0.80

（6）保険期間30年の保険において死亡保険金は$\frac{t}{30}$（tは保険年度）、満期保険金は既払込純保険料とする。いま加入年齢を30歳としたとき、この保険の全期払込年払純保険料に最も近いのは次のうちどれか。

但し、$i=0.05$, $\ddot{a}_{30:\overline{30}|}=15.831$, $(I\ddot{a})_{30:\overline{30}|}=186.729$, $A_{30:\overset{1}{\overline{30}|}}=0.208$とする。

(A) 0.00241 (B) 0.00243 (C) 0.00245 (D) 0.00247 (E) 0.00249

(7) $A_{x:\overline{n}|}=0.45588$, $a_{x:\overline{n}|}=19.7591$のとき、$A^{1}_{x:\overline{n}|}$の値に最も近いのは次のうちどれか。

但し、$i=0.0275$とする。

(A) 0.021 (B) 0.023 (C) 0.025 (D) 0.027 (E) 0.029

(8) $\ddot{a}^{(12)}_{x:\overline{n}|}=7.831$, $q_x=0.0011$, $i=0.05$のとき

$\ddot{a}^{(12)}_{x+1:\overline{n-1}|}$の値に最も近いのは次のうちどれか。

(A) 7.0 (B) 7.1 (C) 7.2 (D) 7.3 (E) 7.4

(9) x歳加入、保険期間10年の保険で、10年後に生存すれば保険金10を支払い、第t保険年度（t = 1, 2, ……10）に死亡すればその保険年度末に責任準備金とtを加えた金額を支払うものとする。このとき、年払純保険料に最も近いのは次のうちどれか。

但し、予定利率は0.02、死亡率は年齢に関係なく0.002とする。必要ならば$v^{10}=0.820348$, $v^{11}=0.804263$を用いよ。

(A) 0.896 (B) 0.901 (C) 0.906 (D) 0.911 (E) 0.916

(10) $i=0.03$, $q_x=0.00251$, ${}_1V_{x:\overline{n}|}=0.063$とするとき、$P_{x+1:\overline{n-1}|}$の値に最も近いのは次のうちどれか。

(A) 0.0695 (B) 0.0697 (C) 0.0699 (D) 0.0701 (E) 0.0703

2. 次の文中の空欄に適当な算式を記入せよ。 (30点)

ある保険会社が毎年、加入年齢x歳の終身保険（保険金額1、保険料終身連続払、保険金即時払）のみをN件引き受け、保険契約高が定常状態であるとする。但し、死亡以外による契約の消滅はないものとする。この定常状態で会社が積み立てている責任準備金の総額を求める。

$\frac{d}{dt}{}_tp_x=\boxed{①}\cdot{}_tp_x$、$\frac{d}{dt}\mathring{e}_{x+t}=\boxed{②}$であるから、

$\frac{d}{dt}({}_tp_x\cdot\mathring{e}_{x+t})=\boxed{③}$……………………………………(A) となる。

また、不定積分$\int v^t dt$は利力δとv^tを用いて、

$\int v^t dt=\boxed{④}+C$（定数）……………………………(B) となる。

次に経過tのある契約の責任準備金${}_tV^{(\infty)}_x$は、純保険料$P^{(\infty)}_x$と利力δを用いて、

${}_tV^{(\infty)}_x=1-(\boxed{⑤})\bar{a}_{x+t}$ ……………………………(C) と表わせる。

したがって、この定常状態の総責任準備金Vは、経過tで残存する契約数が$\boxed{⑥}$と表わせることから、

$V=\int_0^\infty\boxed{⑥}\,{}_tV^{(\infty)}_x dt$

$=N\left\{\boxed{⑦}-(\boxed{⑤})\cdot\int_0^\infty{}_tp_x\cdot\bar{a}_{x+t}\,dt\right\}$となる。

ここで、$\int_0^\infty{}_tp_x\cdot\bar{a}_{x+t}\,dt=\int_0^\infty\boxed{⑧}\cdot{}_tp_x\cdot\mathring{e}_{x+t}dt$となることから、(A)、(B) を用いて

$\int_0^\infty{}_tp_x\cdot\bar{a}_{x+t}\,dt=\boxed{⑨}$ となる。

また、(C) において、t = 0とすると

$(\boxed{⑤})\cdot\bar{a}_x = 1$であるから、

結局、 $V = N\cdot\dfrac{1-\boxed{⑩}}{\delta}$ となる。

3．次の不等式が成り立つことを示せ。 (10点)

$q_x < q_{x+t}$ (t = 1, 2, 3, ……) であるとき

$$(I\ddot{a})_x < \left(\frac{1+i}{q_x+i}\right)^2$$

4．加入年齢x、保険金即時払、純保険料$\bar{P}_x^{(\infty)}$が連続払込の終身保険について次の問に答えよ。 (10点)

死力μ_{x+t} (t ≧ 0) がtの単調増加関数で、上限値μ $(=\sup_{t\geq 0}\mu_{x+t})$ をもつとき、$\mu_{x+T} = \bar{P}_x^{(\infty)}$となるT (≧ 0) がただ1つ存在することを証明せよ。

以上

保 険 数 学 1（解答例）

1

設 問 番 号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
解 答 欄	(C)	(D)	(C)	(D)	(D)	(B)	(D)	(C)	(C)	(B)

正解は上表のとおりであるが、以下に各設問の解答方法を略記する。

(1) ……C

①、②より、$12 \cdot 180 \cdot a_{\overline{\infty}|}^{(12)} = 12 \cdot 274.82 \cdot a_{\overline{n}|}^{(12)}$

$$\therefore 12 \cdot 180 \cdot \frac{1}{i^{(12)}} = 12 \cdot 274.82 \cdot \frac{1-v^n}{i^{(12)}}$$

$$\therefore v^n = 1 - \frac{180}{274.82} \cdots\cdots \text{(A)}$$

③、④より、$S = 17{,}389.67 \times v^n$

$$= 17{,}389.67 \times \left(1 - \frac{180}{274.82}\right) \qquad (\because \text{(A)})$$

$$= 5{,}999.885\cdots\cdots$$

$$\fallingdotseq 6{,}000$$

(2) ……D

定義より、$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t dt = \dfrac{1-v^n}{\delta}$

いま、$\int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|} dt = \int_0^n \dfrac{1-v^t}{\delta} dt = \dfrac{n}{\delta} - \dfrac{1}{\delta}\int_0^n v^t dt$

条件より、$\int_0^n v^t dt = \bar{a}_{\overline{n}|} = n-2$ であるから、

$$\int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|} dt = \frac{n}{\delta} - \frac{1}{\delta}(n-2) = \frac{2}{\delta} = 40$$

(3) ……C

・${}_2q_x = 1 - \dfrac{\ell_{x+2}}{\ell_x} = \dfrac{2}{100-x}$ より ${}_2q_{50} = \dfrac{2}{50}$

・$\mu_x = -\dfrac{1}{\ell_x}\dfrac{d\ell_x}{d_x} = \dfrac{1}{100-x}$ より $2\mu_{50} = \dfrac{2}{50}$

・$m_x = \dfrac{d_x}{L_x} = \dfrac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\int_0^1 \ell_{x+t} dt} = \dfrac{1}{100-x-\dfrac{1}{2}}$ より $2m_{50} = \dfrac{2}{(50-\dfrac{1}{2})}$

・ ${}_{4|2}q_x = \dfrac{\ell_{x+4} - \ell_{x+6}}{\ell_x} = \dfrac{2}{100-x}$ より ${}_{4|2}q_{50} = \dfrac{2}{50}$

・ $\mathring{e}_x = \dfrac{1}{\ell_x}\int_0^{100-x} \ell_{x+t}\,dt = \dfrac{100-x}{2}$ より $\dfrac{1}{\mathring{e}_{50}} = \dfrac{2}{50}$

$\therefore$ $2m_{50}$ が最も大きい。

(4) ……D

毎年の加入者が $\ell_{45}(=95{,}879)$ であれば、この団体の人数は

$$T_{45} - T_{55} = \frac{1}{2}\ell_{45} + (\ell_{46} + \cdots\cdots + \ell_{54}) + \frac{1}{2}\ell_{55} = 941{,}785$$

従って毎年の加入者が 10,000 の場合は 98,226

(5) ……D

求める終身保険の保険金額をSとすると

$$1.5P_x \ddot{a}_{x:\overline{m}|} + 0.5P_x v^m {}_m p_x \ \ddot{a}_{x:m} = SA_x = SP_x \ddot{a}_x \quad \cdots\cdots \text{(A)}$$

また題意より $4P_x \ddot{a}_{x:\overline{m}|} = P_x \ddot{a}_x$ $\qquad \therefore \ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \dfrac{1}{4}\ddot{a}_x$ $\quad \cdots\cdots$ (B)

一方、$v^m {}_m p_x \ \ddot{a}_{x:m} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \ddot{a}_x - \dfrac{1}{4}\ddot{a}_x = \dfrac{3}{4}\ddot{a}_x$ $\cdots\cdots$ (C)

(B)、(C) を (A) に代入し、整理すると、

$$1.5 \cdot \frac{1}{4}\ddot{a}_x + 0.5 \cdot \frac{3}{4}\ddot{a}_x = S\ddot{a}_x \qquad \therefore S = \frac{3}{4} = 0.75$$

(6) ……B

求める保険料をPとすると

$$P\ddot{a}_{30:\overline{30}|} = \frac{1}{30}(IA)^{\ 1}_{30:\overline{30}|} + 30PA_{30:\overline{30}|}^{\ \ \ \ 1}$$

$$\therefore P = \frac{\frac{1}{30}(IA)^{\ 1}_{30:\overline{30}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{30}|} - 30A_{30:\overline{30}|}^{\ \ \ \ 1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{30}\{\ddot{a}_{30:\overline{30}|} - d(I\ddot{a})_{30:\overline{30}|} - 30A_{30:\overline{30}|}^{\ \ \ \ 1}\}}{\ddot{a}_{30:\overline{30}|} - 30A_{30:\overline{30}|}^{\ \ \ \ 1}} \quad (\because (IA)^{\ 1}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - d(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} - nA_{x:\overline{n}|}^{\ \ \ 1})$$

$= 0.002429\cdots\cdots\cdots$

(7) ……D

$$A^{\;1}_{x:\overline{n}|}=v\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-a_{x:\overline{n}|}=\frac{1}{i}(1-A_{x:\overline{n}|})-a_{x:\overline{n}|} \qquad (\because A_{x:\overline{n}|}=1-d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\text{ より})$$

$$\fallingdotseq 0.027$$

(8) ……C

$$\begin{aligned}
\ddot{a}^{(12)}_{x:\overline{n}|}&=\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-\frac{11}{24}\left(1-\frac{D_{x+n}}{D_x}\right)\\
&=1+v(1-q_x)\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}-\frac{11}{24}\left(1-\frac{D_{x+n}}{D_x}\right)\\
&=1+v(1-q_x)\left\{\ddot{a}^{(12)}_{x+1:\overline{n-1}|}+\frac{11}{24}\left(1-\frac{D_{x+n}}{D_{x+1}}\right)\right\}-\frac{11}{24}\left(1-\frac{D_{x+n}}{D_x}\right)\\
&=1-v(1-q_x)\cdot\frac{11}{24}\cdot\frac{D_{x+n}}{D_{x+1}}-\frac{11}{24}\left(1-\frac{D_{x+n}}{D_x}\right)+v(1-q_x)\left(\frac{11}{24}+\ddot{a}^{(12)}_{x+1:\overline{n-1}|}\right)\\
&=1-\frac{11}{24}\frac{D_{x+n}}{D_x}-\frac{11}{24}\left(1-\frac{D_{x+n}}{D_x}\right)+v(1-q_x)\left(\frac{11}{24}+\ddot{a}^{(12)}_{x+1:\overline{n-1}|}\right)\\
&=\frac{13}{24}+\frac{1}{1+i}(1-q_x)\left(\frac{11}{24}+\ddot{a}^{(12)}_{x+1:\overline{n-1}|}\right)
\end{aligned}$$

与えられた値を代入すると、$\ddot{a}^{(12)}_{x+1:\overline{n-1}|}=7.2039$

(9) ……C

求める保険料をPとすると

$${}_{t-1}V+P-vq_{x+t-1}({}_tV+t)=vp_{x+t-1}\;{}_tV$$

$$\therefore\ {}_{t-1}V+P-vq_{x+t-1}t=v\,{}_tV \qquad (\because p_{x+t-1}+q_{x+t-1}=1)$$

両辺に v^{t-1} を乗じ、$t=1$～10まで加え、$q_{x+t-1}=0.002$,

${}_0V=0$, ${}_{10}V=10$ を代入すると

$$P\sum_{t=1}^{10}v^{t-1}-0.002\sum_{t=1}^{10}v^t t=10v^{10}$$

$$\therefore P=\frac{10v^{10}+0.002\sum_{t=1}^{10}v^t t}{\ddot{a}_{\overline{10}|}}$$

$$\fallingdotseq 0.906 \qquad (v^{10}=0.820348,\ v^{11}=0.804263\text{ を使う})$$

(10) ……B

$${}_1V_{x:\overline{n}|}=1-\frac{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}{\ddot{a}_{x:n}}$$

いま、$\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}=P_{x:\overline{n}|}+d$, $\dfrac{1}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}=P_{x+1:\overline{n-1}|}+d$ より

$$ {}_1V_{x:\overline{n}|} = \frac{P_{x+1:\overline{n-1}|} - P_{x:\overline{n}|}}{P_{x+1:\overline{n-1}|} + d} \quad \cdots\cdots \text{(A)} $$

一方、ファクラーの公式より $P_{x:\overline{n}|} = vq_x(1 - {}_1V_{x:\overline{n}|}) + v\,{}_1V_{x:\overline{n}|} \quad \cdots\cdots$ (B)

(A)、(B) より、$P_{x:\overline{n}|}$ を消去して整理すると

$$ P_{x+1:\overline{n-1}|} = vq_x + \frac{{}_1V_{x:\overline{n}|}}{1 - {}_1V_{x:\overline{n}|}} $$

$$ \fallingdotseq 0.06967 $$

2. $\dfrac{d}{dt}{}_t p_x=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\ell_{x+t}}{\ell_x}\right)=\dfrac{1}{\ell_x}(-\ell_{x+t}\mu_{x+t})=\boxed{①-\mu_{x+t}}\cdot{}_t p_x$

$\dfrac{d}{dt}\mathring{e}_{x+t}=\dfrac{d}{dt}\int_0^\infty {}_\tau p_{x+\tau}dt=\int_0^\infty \dfrac{d}{dt}({}_\tau p_{x+t})d\tau=\int_0^\infty \dfrac{d}{dt}\dfrac{\ell_{x+t+\tau}}{\ell_{x+t}}d\tau$

$=\int_0^\infty \dfrac{\left(\dfrac{d}{dt}\ell_{x+t+\tau}\right)\ell_{x+t}-\ell_{x+t+\tau}\left(\dfrac{d}{dt}\ell_{x+t}\right)}{\ell_{x+t}^2}d\tau=\int_0^\infty {}_\tau p_{x+t}(\mu_{x+t}-\mu_{x+t+\tau})d\tau$

$=\boxed{②\mu_{x+t}\mathring{e}_{x+t}-1}$

$\dfrac{d}{dt}({}_t p_x\mathring{e}_{x+t})=\dfrac{d}{dt}({}_t p_x)\mathring{e}_{x+t}+{}_t p_x\left(\dfrac{d}{dt}\mathring{e}_{x+t}\right)=-{}_t p_x\mu_{x+t}\mathring{e}_{x+t}+{}_t p_x(\mu_{x+t}\mathring{e}_{x+t}-1)$

$=\boxed{③-{}_t p_x}$

また、$\int v^t dt=\int e^{-\delta t}dt=-\dfrac{1}{\delta}e^{-\delta t}+C=\boxed{④-\dfrac{v^t}{\delta}}+C$

${}_tV_x^{(\infty)}=\bar{A}_{x+t}-P_x^{(\infty)}\bar{a}_{x+t}=1-\delta\bar{a}_{x+t}-P_x^{(\infty)}\bar{a}_{x+t}=1-(\boxed{⑤\delta+P_x^{(\infty)}})\bar{a}_{x+t}$

$V=\int_0^\infty \boxed{⑥N{}_t p_x}{}_tV_x^{(\infty)}dt=\int_0^\infty N{}_t p_x\{1-(\delta+P_x^{(\infty)})\bar{a}_{x+t}\}dt$

$=N\{\boxed{⑦\mathring{e}_x}-(\boxed{⑤\delta+P_x^{(\infty)}})\int_0^\infty {}_t p_x\bar{a}_{x+t}dt$

ここで $\int_0^\infty {}_t p_x\bar{a}_{x+t}dt=\int_0^\infty \dfrac{\ell_{x+t}}{\ell_x}\left(\int_0^\infty v^r\dfrac{\ell_{x+t+r}}{\ell_{x+t}}dr\right)dt=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty v^r\dfrac{\ell_{x+t+r}}{\ell_x}dr\right)dt$

$=\int_0^\infty v^r\dfrac{\ell_{x+r}}{\ell_x}\left(\int_0^\infty \dfrac{\ell_{x+r+t}}{\ell_{x+r}}dt\right)dr=\int_0^\infty v^r{}_r p_x\mathring{e}_{x+t}dr$

$=\int_0^\infty \boxed{⑧v^t}{}_t p_x\mathring{e}_{x+t}dt$

$=\int_0^\infty\left(-\dfrac{v^t}{\delta}\right)'{}_t p_x\mathring{e}_{x+t}dt$

$=\left[-\dfrac{v^t}{\delta}{}_t p_x\mathring{e}_{x+t}\right]_0^\infty+\int_0^\infty \dfrac{v^t}{\delta}\dfrac{d}{dt}({}_t p_x\mathring{e}_{x+t})dt$

$=\dfrac{1}{\delta}\mathring{e}_x-\dfrac{1}{\delta}\int_0^\infty v^t{}_t p_x dt=\boxed{⑨\dfrac{1}{\delta}(\mathring{e}_x-\bar{a}_x)}$

$\therefore\ V=N\{\mathring{e}_x-(\delta+P_x^{(\infty)})\dfrac{1}{\delta}(\mathring{e}_x-\bar{a}_x)\}$

$=N\dfrac{(\delta+P_x^{(\infty)})\bar{a}_x-P_x^{(\infty)}\mathring{e}_x}{\delta}$

ここで、${}_0V_x^{(\infty)}=1-(\delta+P_x^{(\infty)})\bar{a}_x=0$ より $(\boxed{⑤\delta+P_x^{(\infty)}})\bar{a}_x=1$

$\therefore\ V=N\boxed{⑩\dfrac{1-P_x^{(\infty)}\mathring{e}_x}{\delta}}$ となる。

3．$(I\ddot{a})_x = 1 + 2v p_x + 3v^2 {}_2p_x + \cdots\cdots$

$= 1 + 2v p_x + 3v p_x (v p_{x+1}) + \cdots\cdots$

$< 1 + 2v p_x + 3(v p_x)^2 + \cdots\cdots$　　　　（$\because$ $q_x < q_{x+t}$ より $p_{x+t} < p_x$）

いま、$X = 1 + 2v p_x + 3(v p_x)^2 + \cdots\cdots$とおくと

$v p_x X = v p_x + 2(v p_x)^2 + 3(v p_x)^3 + \cdots\cdots$

$\therefore (1 - v p_x) X = 1 + v p_x + (v p_x)^2 + \cdots\cdots$

$$\therefore X = \frac{1}{1 - v p_x} \cdot \frac{1}{1 - v p_x}$$

$$= \left\{ \frac{1+i}{(1+i) - (1 - q_x)} \right\}^2$$

$$= \left(\frac{1+i}{q_x + i} \right)^2$$

よって、$(I\ddot{a})_x < \left(\dfrac{1+i}{q_x + i} \right)^2$ が証明出来た。

4．μ_{x+t} は $t \geqq 0$ において単調増加かつ上限 $\mu = \sup\limits_{t \geqq 0} \mu_{x+t}$ をもつことから、

$\mu_x \leqq \mu_{x+t} \leqq \mu$

$\therefore v^t {}_tp_x \mu_x \leqq v^t {}_tp_x \mu_{x+t} \leqq v^t {}_tp_x \mu$

従って

$\int_0^\infty {}_1v^t {}_tp_x \cdot \mu_x \, dt \leqq \int_0^\infty v^t {}_tp_x \mu_{x+t} \, dt \leqq \int_0^\infty v^t {}_tp_x \mu \, dt$

$$\therefore \mu_x \leqq \frac{\int_0^\infty v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt}{\int_0^\infty v^t {}_tp_x dt} = p_x^{(\infty)} \leqq \mu$$

故に、中間値の定理より $\mu_{x+T} = P_x^{(\infty)}$ となる $t = T$ が存在する。

また、μ_{x+t} の単調性から、ただ1つであることは明らか。