年金数理（問題）

１．次の(1)～(4)までについて、それぞれ５つの選択肢の中から正しいものを選んで所定の解答用紙にその記号を記入せよ。（１問４点、合計１６点）

(1) 加入年齢方式を採用している、ある年金制度が給付を一律（$1+\alpha$）倍とする制度変更を行った。変更の効果は過去勤務期間に遡及するものとし、標準保険料率も（$1+\alpha$）倍とするとした場合の変更後の未償却過去勤務債務は次のうちどれか。

ただし、U：制度変更前の未償却過去勤務債務残高、F：制度変更時の年金資産、とする。

（A）$(1+\alpha)\cdot U+F$　（B）$(1+\alpha)\cdot U-F$　（C）$(1+\alpha)\cdot U+(1-\alpha)F$

（D）$(1+\alpha)\cdot U+\alpha\cdot F$　（E）$(1+\alpha)\cdot(U+F)$

(2) ある年金制度のある年度に関して次のことがわかっている。この制度のこの年度における利差損益以外の差損益は次のうちどれか。

- 年初の責任準備金　1,000
- 年初の年金資産　1,000
- 年間保険料（期初払い）　200
- 年間給付（期末払い）100
- 年末の責任準備金　1,200
- 年末の年金資産　1,154
- 実際利回り　年 4.5%
- 予定利回り　年 5.5%

（A）３４の差損　（B）５８の差損　（C）３４の差益　（D）５８の差益　（E）４６の差損

(3) 年金給付が年４回期末払いで、かつ死亡した場合には、死亡した日の属する月まで給付が支払われる場合の年金現価率の近似式を計算基数を用いて表すと次のうちどれか。

（A）$(1/D_x)\cdot[N_x-(7/12)\cdot D_x+(1/8)\cdot\overline{M}_x]$　（B）$(1/D_x)\cdot[N_x-(7/12)\cdot D_x+(1/6)\cdot\overline{M}_x]$

（C）$(1/D_x)\cdot[N_x-(7/12)\cdot D_x+(1/4)\cdot\overline{M}_x]$　（D）$(1/D_x)\cdot[N_x-(5/8)\cdot D_x+(1/8)\cdot\overline{M}_x]$

（E）$(1/D_x)\cdot[N_x-(5/8)\cdot D_x+(1/6)\cdot\overline{M}_x]$

(4) ある年金制度の初期過去勤務債務額U_0を、初期被保険者数がL_0人、予定利率が年５．０％の前提で、以下の４とおりの方法で償却する。償却が早く完了するものから順番に並べたとき、正しいものはどれか。

ただし、被保険者数は前年比４％づつ増加し、後発債務の発生はなく、年１回期初に償却を行い、未償却過去勤務債務は予定利率により増加する。また、ことわりのない限り、期初の未償却過去勤務債務額（当年度分の償却前）が、その年度の償却予定額を下回った場合は、期初の未償却過去勤務債務額を償却して、償却が完了するものとする。

Ⅰ　毎年U_0の２０％相当額

Ⅱ　毎期初現在未償却過去勤務債務額（当年度分の償却前）の３０％相当額。ただし、期初現在未償却過去勤務債務額（当年度分の償却前）がU_0の(1/10)を下回った場合は、その額を償却し、償却完了とする。

Ⅲ（$U_0\times0.14$）÷L_0を一人あたり年間償却額とし、毎期初の被保険者人数分の償却を行う。

Ⅳ　毎年$U_0\times(1/\ddot{a}_{\overline{7}|})$相当額。

（A）Ⅰ→Ⅳ→Ⅱ→Ⅲ　（B）Ⅰ→Ⅳ→Ⅲ→Ⅱ　（C）Ⅱ→Ⅰ→Ⅳ→Ⅲ　（D）Ⅱ→Ⅳ→Ⅰ→Ⅲ　（E）Ⅰ→Ⅱ→Ⅳ→Ⅲ

２．次の空欄に当てはまる適当な算式を所定の解答用紙に記入せよ。（１欄３点、合計２４点）

(1) 生存脱退と死亡脱退との多重脱退残存表を考える。

$l_x^{(T)}$：残存数、　$p_x^{(T)}$：残存率、　$d_x^{(W)}$、$d_x^{(d)}$：生存および死亡脱退数、　$q_x^{(W)}$、$q_x^{(d)}$：生存および死亡脱退率

l_x　：死亡生残表による生存数、　q_x　：死亡率

このとき、定義より　$d_x^{(W)}=l_x^{(T)}\cdot q_x^{(W)}$、　$d_x^{(d)}=l_x^{(T)}\cdot q_x^{(d)}$

ｘ歳の生存脱退者のうち（ｘ＋１）歳までに死亡する人数を $d_x^{(d)'}$ とすると

$d_x^{(d)'}=\int_0^1 \boxed{\text{①}}\, dt$　である。

ここで、死亡が１年を通じて一様に分布すると仮定すると

$d_x^{(d)'}=\boxed{\text{②}}$ が得られる。

$q_x=\boxed{\text{③}}\,/\,l_x^{(T)}$ であるから、多重脱退残存表より死亡率を求める方法は、

$q_x=\boxed{\text{④}}$。

(2) Trowbridgeのモデル（定年退職者に年１回期初払い即時支給開始終身年金を支給。以下、この試験の３．以降において同様の制度内容とする）の年金制度において、個人平準保険料方式の財政運営を考える。制度発足時の被保険者（退職者を含む）については、給付に要する費用には制度発足以前の期間を含め、被保険者期間は、制度発足時から退職時までの期間をいう。

この場合、制度発足時にｘ歳（$x_e \leqq x < x_r$）の被保険者の保険料率は

$${}^{I}P_x=\boxed{\text{⑤}}\Big/\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y$$

であり、　第１年度の保険料総額を ${}^{I}C_1$ とすると

$${}^{I}C_1=\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x\cdot {}^{I}P_x+({}^{T}F+{}^{T}C)$$

である。また、第ｎ年度の保険料総額を ${}^{I}C_n$ とすると

$${}^{I}C_n=\boxed{\text{⑥}}+{}^{E}P\cdot\boxed{\text{⑦}}$$

$$=\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x\cdot {}^{E}P+\boxed{\text{⑧}}$$

である。

ここに ${}^{E}P$ は、加入年齢方式の場合の標準保険料率であり、ｎの増加に伴い ${}^{I}C_n \to {}^{E}C$　となる。

（注）計算にあたって必要な場合には、以下の記号を使用すること。（以下、この試験の３．以降においても同様とする。）

x_e ：　加入年齢
x_r ：　定年年齢
x_ω ：　生存最終年齢
l_x ：　定常状態におけるｘ歳の加入者（および年金受給者）の人数
B　：　年金給付額
P　：　標準保険料率
C　：　年間保険料
F　：　積立金

なお、P、C、Fは財政方式により異なるため、どの財政方式によるものであるかを識別するために、それぞれの財政方式の英語の頭文字をとり、次のようにあらわすこととする。

個人平準保険料方式　：　${}^{I}P$、${}^{I}C$、${}^{I}F$
加入年齢方式　：　${}^{E}P$、${}^{E}C$、${}^{E}F$
単位積立方式　：　${}^{U}P$、${}^{U}C$、${}^{U}F$
退職時年金現価積立方式　：　${}^{T}P$、${}^{T}C$、${}^{T}F$

３．Trowbridgeのモデルの下で、ｘ歳（$x_e \leqq x < x_r$）の被保険者１人あたりの積立金V_xが

$$V_x = \frac{x - x_e}{x_r - x_e} \cdot \frac{D_{x_r}}{D_x} \cdot \ddot{a}_{x_r}$$

で表わされる財政方式が単位積立方式であることをｘ歳の被保険者の保険料を求めることによって示せ。（２０点）

４．ある企業が、Trowbridgeのモデルに基づく給付を行う年金制度を発足させた。この企業の脱退残存表によるｘ歳の残存率p_x（$x_e \leqq x < x_r$）は、

$p_{x_e} < p_{x_e+1} < \cdots\cdots < p_{x_r-1}$　であるとする。

加入年齢方式に基づく責任準備金を保険料の支払回数に応じて次のとおり定義する。

ア．年１回期初払とした場合（$V^{(1)}$）

イ．年２回期初払とした場合（$V^{(2)}$）

ここで、x_eは最低年齢、標準保険料算出のための加入年齢はx_e歳とし、脱退（死亡を含む）は年度を通じて一様に発生するものとする。

以上の前提のもとで次の各設問に答えよ。（２０点）

(1)　年２回期初払とした場合の標準保険料 ${}^{E}P^{(2)}$ を求めよ。

(2)　責任準備金（$V^{(2)}$）を求めよ。

(3)　$V^{(1)}$ と$V^{(2)}$ との間には、$V^{(1)} \geqq V^{(2)}$ なる関係があることを示せ。

５．Trowbridgeのモデルにおいて、財政方式を加入年齢方式とした場合に以下の設問に答えよ。（２０点）

(1)標準保険料率 ${}^{E}P$、年間保険料 ${}^{E}C$を求めよ。

(2)年齢ｘ歳の被保険者（$x_e+1 \leqq x < x_r$）に対する責任準備金を将来法により求めよ。

(3)　(2)の責任準備金は標準者１人あたりのｘ歳時における標準保険料の元利合計に等しいことを示せ。

(4)成熟状態における積立金 ${}^{E}F$を求め、極限方程式 ${}^{E}C + d \cdot {}^{E}F = B$の成立を確認せよ。

（退職時年金現価積立方式において極限方程式が成立することを用いてもよい）

年金数理　解答例　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　１９９３年１２月２２日

1．

問題	(1)	(2)	(3)	(4)
記号	（D）	（A）	（E）	（B）

正解は上記のとおりであるが、以下に解法を略記する。

(1)　この年金制度が給与比例制の制度であるとしても一般性を失わないため、給与比例制の制度として考える。

制度変更前の給付現価をS、標準保険料率をP、給与現価をGとすると、Uは次のようにかける。

$$U = S - P \cdot G - F$$

変更後の過去勤務債務をWとすると、Wは次のようにかける。

$$W = (1+\alpha) \cdot S - [(1+\alpha) \cdot P] \cdot G - F$$

これより

$$W = S - P \cdot G - F + \alpha \cdot (S - P \cdot G)$$

$$= U + \alpha \cdot (U + F) = (1+\alpha) \cdot U + \alpha \cdot F$$

したがって、（D）が正しい。

(2)　この年金制度のこの年度の期初の差損益繰越額は、責任準備金と年金資産が同額であることから、0である。したがって、期末の差損益額が、この年度における差損益である。

当年度の差損益　＝　年末の責任準備金　－　年末の年金資産

＝　1,200 － 1,154　＝　46 ………　差損

このうち、利差は題意より

利差　＝(1,000 ＋ 200) × (5.5% － 4.5%) ＝ 12 ………　利差損

これらより、利差損益以外の差損益は　46 － 12 ＝ 34 ………　差損

したがって、（A）が正しい。

(3)　まず、年m回分割の各期末生存者に支払う分割払年金の現価はWoolhouseの公式より

$$a_x^{(m)}=\frac{1}{D_x}\left(\sum_{t=1}^{\infty}D_{x+t}+\frac{m-1}{2m}\cdot D_x+\frac{m^2-1}{12\cdot m^2}\cdot\frac{dD_x}{d_x}+\cdots\cdots\right)$$

$$\fallingdotseq\frac{1}{D_x}\left(\sum_{t=1}^{\infty}D_{x+t}+\frac{m-1}{2m}\cdot D_x\right)$$

m＝4を代入して

$$与式=\frac{1}{D_x}\left(\sum_{t=1}^{\infty}D_{x+t}+\frac{3}{8}\bullet D_x\right)=\frac{1}{D_x}\left(N_x-\frac{5}{8}\bullet D_x\right)$$

一方、死亡者に対する給付現価は、

$$^{(12)}a_x=\frac{1}{\ell_x}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}\left\{\frac{1}{12}\left(\ell_{x+t+(3j-3)/12}-\ell_{x+t+(3j-2)/12}\right)\right.$$
$$+\frac{2}{12}\left(\ell_{x+t+(3j-2)/12}-\ell_{x+t+(3j-1)/12}\right)$$
$$\left.+\frac{3}{12}\left(\ell_{x+t+(3j-1)/12}-\ell_{x+t+3j/12}\right)\right\}v^{t+3j/12}$$

ここで（x+t,x+t+1）の死亡は一様に発生すると考えれば、与式の（　）内は全て

$\frac{1}{12}(\ell_{x+t}-\ell_{x+t+1})=\frac{1}{12}d_{x+t}$ となるので

$$^{(12)}a_x=\frac{1}{12\ell_x}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{6}{12}d_{x+t}\left(\sum_{j=1}^{4}v^{t+3j/12}\right)\fallingdotseq\frac{1}{24\ell_x}\sum_{t=0}^{\infty}d_{x+t}\cdot 4\bullet v^{t+1/2}$$

$$=\frac{1}{D_x}\bullet\frac{\overline{M}_x}{6}$$

これらより、求める現価率は各々の合計であり、

$\frac{1}{D_x}\left(N_x-\frac{5}{8}\bullet D_x+\frac{1}{6}\bullet\overline{M}_x\right)$ となる。したがって、（E）が正しい。

(4)　ⅠからⅣの各償却方法での償却完了年度は以下のとおり。ちなみに（　）内の小数は各年度期初の未償却過去勤務債務額（当年度分の償却前）の概数である。

Ⅰ．６年（1.000、0.840、0.672、0.496、0.310、0.116）

Ⅱ．９年（1.000、0.735、0.540、0.397、0.292、0.215、0.158、0.116、0.085）

Ⅲ．８年（1.000、0.903、0.795、0.676、0.544、0.400、0.241、0.067）

Ⅳ．７年（1.000、0.877、0.748、0.613、0.471、0.321、0.165） 以上より、償却が早く完了する順番は、Ⅰ→Ⅳ→Ⅲ→Ⅱである。

したがって、（Ｂ）が正しい。

２．(1)

番号	解　　　答
①	$d_x^{(W)} \cdot (1 - \frac{\ell_{x+1}}{\ell_{x+t}})$
②	$\frac{q_x}{2} \bullet d_x^{(W)}$
③	$(d_x^{(d)} + d_x^{(d)'})$
④	$d_x^{(d)} / (\ell_x^{(T)} - \frac{1}{2} d_x^{(W)})$

教科書９頁、１０頁からの出題

(2)

番号	解　　　答
⑤	$D_{x_r} \bullet \ddot{a}_{x_r}$
⑥	$\sum_{x=x_e+n-1}^{x_r-1} \ell_x \cdot {}^{1}P_{x-n+1}$
⑦	$\sum_{x=x_e}^{x_e+n-2} \ell_x$
⑧	$\sum_{x=x_e+n-1}^{x_r-1} \ell_x \cdot ({}^{1}P_{x-n+1} - {}^{E}P)$

教科書５５頁からの出題

３．ｘ歳の被保険者１人あたりの保険料をP_xとする。Trowbridgeのモデルでは、定年退職時のみに給付があるから Facklerの公式を用いれば次の式が成り立つ。

$$(V_x + P_x) \bullet (1 + i) = V_{x+1} \cdot \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x}$$

ここにｉは予定利率。

これから、

$$P_x = V_{x+1} \cdot \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x} \bullet v - V_x \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

ここに$v = \frac{1}{1+i}$ 。

題意に基づきV_x 、V_{x+1} を書き換えて (1)式に代入すると

$$P_x = \frac{x+1-x_e}{x_r-x_e} \bullet \frac{D_{x_r}}{D_{x+1}} \bullet \ddot{a}_{x_r} \bullet \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x} \cdot v - \frac{x-x_e}{x_r-x_e} \cdot \frac{D_{x_r}}{D_x} \bullet \ddot{a}_{x_r}$$

$$P_x = \frac{x+1-x_e}{x_r-x_e} \cdot \frac{D_{x_r}}{D_x \cdot (\ell_{x+1}/\ell_x) \cdot v} \cdot \ddot{a}_{x_r} \cdot \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x} \cdot v - \frac{x-x_e}{x_r-x_e} \cdot \frac{D_{x_r}}{D_x} \cdot \ddot{a}_{x_r}$$

$$P_x = \frac{x+1-x_e}{x_r-x_e} \cdot \frac{D_{x_r}}{D_x} \cdot \ddot{a}_{x_r} - \frac{x-x_e}{x_r-x_e} \cdot \frac{D_{x_r}}{D_x} \cdot \ddot{a}_{x_r}$$

$$P_x = \frac{1}{x_r-x_e} \cdot \frac{D_{x_r}}{D_x} \cdot \ddot{a}_{x_r}$$

これは、単位積立方式の一人あたりの保険料である。

4. (1) $D_{x+1/2} = \ell_{x+1/2} \cdot v^{x+1/2}$ とすると、仮定より

$$= \ell_x \cdot \left(\frac{1+p_x}{2}\right) \bullet v^x \cdot v^{1/2} = D_x \cdot \left(\frac{1+p_x}{2} \bullet v^{1/2}\right)$$

$\overline{D}_x = D_x + D_{x+1/2}$ とする。また、この企業のx歳の被保険者数をL_x とする。

$${}^{E}P^{(1)} = D_{x_r} \bullet \ddot{a}_{x_r} / \sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x$$

$${}^{E}P^{(2)} = D_{x_r} \bullet \ddot{a}_{x_r} / \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \overline{D}_x$$

(2) 給付現価Sは、保険料の支払回数によらない。

$$S = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \frac{D_{x_r} \bullet \ddot{a}_{x_r}}{D_x}$$

年1回払の場合の人数（給与）現価を$G^{(1)}$ 、年2回払の場合を$G^{(2)}$ とすると

$$G^{(1)} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left\{ L_x \cdot \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \right) / D_x \right\}$$

$$G^{(2)} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left\{ L_x \cdot \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} \overline{D}_y \right) / D_x \right\}$$ となる。

従って、$V^{(1)}$ 、$V^{(2)}$ は、それぞれ、次のとおりである。

$$V^{(1)} = S - {}^{E}P^{(1)} \cdot G^{(1)} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \frac{D_{x_r} \bullet \ddot{a}_{x_r}}{D_x}$$

$$- {}^{E}P^{(1)} \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left\{ L_x \cdot \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \right) / D_x \right\}$$

$$V^{(2)} = S - {}^{E}P^{(2)} \cdot G^{(2)} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \frac{D_{x_r} \bullet \ddot{a}_{x_r}}{D_x}$$

$$- {}^{E}P^{(2)} \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \{ L_x \cdot (\sum_{y=x}^{x_r-1} \overline{D}_y) / D_x \}$$

(3) (2)より

$$V^{(1)} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \{ L_x \cdot (D_{x_r} \bullet \ddot{a}_{x_r} - {}^{E}P^{(1)} \cdot \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y) / D_x \}$$

$$V^{(2)} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \{ L_x \cdot (D_{x_r} \bullet \ddot{a}_{x_r} - {}^{E}P^{(2)} \cdot \sum_{y=x}^{x_r-1} \overline{D}_y) / D_x \}$$

従って$V^{(1)} \geqq V^{(2)}$を示すためには、任意のx($x_e < x \leqq x_r-1$)に対して上記2式の( )内を比較し、

$$D_{x_r} \bullet \ddot{a}_{x_r} - {}^{E}P^{(1)} \cdot \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \geqq D_{x_r} \bullet \ddot{a}_{x_r} - {}^{E}P^{(2)} \cdot \sum_{y=x}^{x_r-1} \overline{D}_y$$

すなわち　${}^{E}P^{(1)} \cdot \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \leqq {}^{E}P^{(2)} \cdot \sum_{y=x}^{x_r-1} \overline{D}_y$ を示すことができればよい。

$$\frac{{}^{E}P^{(1)} \cdot \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{{}^{E}P^{(2)} \cdot \sum_{y=x}^{x_r-1} \overline{D}_y} = \frac{D_{x_r} \bullet \ddot{a}_{x_r} \Big/ \sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y}{D_{x_r} \bullet \ddot{a}_{x_r} \Big/ \sum_{y=x_e}^{x_r-1} \overline{D}_y} \bullet \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{\sum_{y=x}^{x_r-1} \overline{D}_y}$$

$$= \left(\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} \overline{D}_y}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y} \right) \bullet \left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{\sum_{y=x}^{x_r-1} \overline{D}_y} \right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

ここで、$\dfrac{\overline{D}_x}{D_x}$、($x_e \leqq x \leqq x_r-1$)について考えてみる

$$\frac{\overline{D}_x}{D_x} = \frac{D_x + D_{x+(1/2)}}{D_x} = \frac{D_x + D_x \cdot \{ v^{1/2} \cdot (1+p_x) \}}{D_x} = 1 + \left(\frac{1+p_x}{2} \right) \bullet v^{1/2}$$

仮定より、p_xはxについて単調増加であるから($\overline{D}_x / D_x$)もxについて単調増加となる。一般に、$a_i > 0$、$b_i > 0$　($i = 1, \cdots\cdots n$)で

$$\frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_2} < \cdots\cdots < \frac{b_n}{a_n} \quad \text{であれば}$$

$$\frac{b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n}{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n} < \frac{b_2 + \cdots\cdots + b_n}{a_2 + \cdots\cdots + a_n} < \cdots\cdots < \frac{b_n}{a_n} \quad \text{が言える。}$$

従って $\dfrac{\sum_{y=X_e}^{X_r-1}\overline{D}y}{\sum_{y=X_e}^{X_r-1}Dy} \leqq \dfrac{\sum_{y=X}^{X_r-1}\overline{D}y}{\sum_{y=X}^{X_r-1}Dy}$ $(x_e < x \leqq x_r-1)$

よって（＊）≦１を示すことができたため $V^{(1)} \geqq V^{(2)}$ が言えた。

５．

(1) 標準保険料率 ${}^{E}P = (Dx_r \cdot \ddot{a}_{x_r}) \Big/ \sum_{X=X_e}^{X_r-1} Dx$

保険料額 ${}^{E}C = {}^{E}P \cdot \sum_{X=X_e}^{X_r-1} \ell x$

(2) 年齢ｘ歳の被保険者一人当りの責任準備金は

$$Vx = \frac{Dx_r \cdot \ddot{a}_{x_r}}{Dx} - {}^{E}P \cdot \sum_{y=X}^{X_r-1} \frac{Dy}{Dx}$$

(3) (2)より

$$\frac{Dx_r \cdot \ddot{a}_{x_r}}{Dx} - {}^{E}P \cdot \sum_{y=X}^{X_r-1} \frac{Dy}{Dx} = \frac{{}^{E}P}{Dx} \cdot \left(\frac{Dx_r \cdot \ddot{a}_{x_r}}{{}^{E}P} - \sum_{y=X}^{X_r-1} Dy\right)$$

$$= \frac{{}^{E}P}{Dx} \cdot \left(\sum_{y=X_e}^{X_r-1} Dy - \sum_{y=X}^{X_r-1} Dy\right)$$

$$= \frac{{}^{E}P}{Dx} \cdot \sum_{y=X_e}^{X-1} Dy$$

$$= {}^{E}P \cdot \frac{1}{\ell x} \cdot \sum_{y=X_e}^{X-1} \ell y \cdot (1+i)^{x-y}$$

これは標準者一人当りのｘ歳時における標準保険料の元利合計に等しい。

(4) 成熟状態での極限方程式における積立金 ${}^{E}F$ は以下のとおりである。

$${}^{E}F = \sum_{X=X_e+1}^{X_r-1} \ell x \cdot \left({}^{E}P \cdot \sum_{y=X_e}^{X-1} \frac{Dy}{Dx}\right) + \sum_{X=X_r}^{X\omega} \ell x \cdot \ddot{a}_x$$

$$= \sum_{X=X_e+1}^{X_r-1} \ell x \cdot \left({}^{E}P \cdot \sum_{y=X_e}^{X-1} \frac{Dy}{Dx}\right) + ({}^{T}C + {}^{T}F)$$

また ${}^{E}C + d \cdot {}^{E}F$

$$= {}^{E}P \cdot \sum_{X=X_e}^{X_r-1} \ell x + d \cdot \left\{\sum_{X=X_e+1}^{X_r-1} \ell x \cdot \left({}^{E}P \cdot \sum_{y=X_e}^{X-1} \frac{Dy}{Dx}\right) + ({}^{T}C + {}^{T}F)\right\}$$

$$= {}^{E}P\left(\sum_{X=Xe}^{Xr-1}\ell x + d\bullet\sum_{X=Xe+1}^{Xr-1}\ell x\cdot\sum_{y=Xe}^{X-1}\frac{Dy}{Dx}\right) + d\bullet({}^{T}C + {}^{T}F)$$

ここで $d\bullet\displaystyle\sum_{X=Xe+1}^{Xr-1}\ell x\cdot\sum_{y=Xe}^{X-1}\frac{Dy}{Dx} = d\bullet\sum_{X=Xe+1}^{Xr-1}\ \sum_{y=Xe}^{X-1}\ell y\bullet(1+i)^{X-y}$

$$= d\bullet\sum_{y=Xe}^{Xr-2}\ \sum_{X=y+1}^{Xr-1}\ell y\bullet(1+i)^{X-y}$$

$$= d\bullet\sum_{y=Xe}^{Xr-2}\ell y\cdot\sum_{X=y+1}^{Xr-1}\bullet(1+i)^{X-y}$$

$$= \frac{i}{1+i}\sum_{y=Xe}^{Xr-2}\ell y\ \frac{(1+i)\{(1+i)^{X_r-y-1}-1\}}{i}$$

$$= \sum_{y=Xe}^{Xr-1}\ell y\ (1+i)^{X_r-y-1} - \sum_{y=Xe}^{Xr-1}\ell y$$

また ${}^{E}P = (Dx_r\bullet\ddot{a}x_r)\Big/\displaystyle\sum_{y=Xe}^{Xr-1}Dy$

$$= \upsilon^{xr}\bullet\ell_{xr}\bullet\ddot{a}x_r\Big/\sum_{y=Xe}^{Xr-1}\ell_y\cdot\upsilon^{y}$$

$= \upsilon\bullet\ell_{xr}\bullet\ddot{a}x_r\Big/\displaystyle\sum_{y=Xe}^{Xr-1}\ell_y\cdot(1+i)^{X_r-y-1}$ であるから、

$${}^{E}C + d\cdot{}^{E}F = {}^{E}P\bullet\sum_{y=Xe}^{Xr-1}\ell_y\cdot(1+i)^{X_r-y-1} + d\bullet({}^{T}C + {}^{T}F)$$

$$= \upsilon\bullet\ell_{xr}\bullet\ddot{a}x_r + d\bullet({}^{T}C + {}^{T}F)$$

$$= \upsilon\cdot{}^{T}C + d\bullet({}^{T}C + {}^{T}F) = {}^{T}C + d\cdot{}^{T}F = B$$

∵ 退職時年金現価積立方式において極限方程式が成立することより。

∴ ${}^{E}C + d\cdot{}^{E}F = B$ となり、加入年齢方式において極限方程式が成立する。

出題のねらいと採点してのコメント

1．(1) 過去勤務期間に遡及しての制度変更を行った場合の影響について問う問題であり、正解した者が多かった。

(2) 年金制度の年度決算状況を問う基本的な問題である。正解した者が多かった。

(3) 特殊な条件の付された分割払い年金現価を問う問題である。死亡者への給付を正しく見積もることができれば正解できる。

(4) 年金制度の過去勤務債務償却方法を理論にしたがって、実際に計算できるかを見る問題である。

2．(1) 死亡と生存脱退の多重脱退残存表に関する基礎的理解を求める問題である。

(2) Trowbridgeモデルでの財政運営のうち、個人平準保険料方式と加入年齢方式の関連を問う問題である。なお、出題の算式に未定義の記号を用いた部分があり、この部分の採点にあたっては、別途配慮した。

3．Trowbridgeモデルでの責任準備金の意味と、Fackler の公式を理解して、応用できるかを問う問題である。

4．Trowbridgeモデルでの責任準備金について、保険料分割払いの前提で評価した場合の影響を問う問題である。分割払いは、保険料の年間額は年１回払いより大きくなるものの、責任準備金は下回ることを示すよう求めたが、正解者は少なかった。

5．Trowbridgeモデルでの財政運営のうち、加入年齢方式に関する基本知識を問う問題である。正解者は多かった。