保 険 数 学 ２（問題）

１．次の（１）から（５）までについて、それぞれ五つの選択肢の中から正しい答を一つ選んで、所定の解答用紙にその記号〔（A）から（E）のうちいずれか一つ。〕を記入せよ。（40点）

（１）死因ｉによる死力$\mu_x^{(i)}$が、死因ｉ以外の死因による死力$\mu_x^{(-i)}$のC倍であるとする場合、被保険者（ｘ）が死因ｉによって死亡したときは３、それ以外の死因によって死亡したときは１を即時に支払う全期払込ｎ年定期保険の年払純保険料は次のうちどれに等しいか。

（A）$(1+2C)\overline{P}^{1}_{x:\overline{n|}}$　（B）$\frac{1+3C}{1+C}\overline{P}^{1}_{x:\overline{n|}}$　（C）$\frac{1+4C}{1+C}\overline{P}^{1}_{x:\overline{n|}}$　（D）$\overline{P}^{1}_{x:\overline{n|}}+\frac{3C}{1+C}$　（E）$\overline{P}^{1}_{x:\overline{n|}}+\frac{1+2C}{1+C}$

（２）ｘ歳加入年払全期払込ｎ年満期養老保険（保険金額１、保険金年末払）において、第１保険年度末の全期チルメル式責任準備金が０となるようにチルメル割合αを決めたところ$\alpha=0.030$となった。$p_x=0.998$　$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}=12.000$のとき、予定利率は次のうちどれに最も近いか。

（A）5.1%　（B）5.3%　（C）5.5%　（D）5.7%　（E）5.9%

（３）ｘ歳加入年払全期払込ｎ年満期養老保険（保険金額１、保険金年末払）において、経過20年で延長保険に変更する場合、変更後の生存保険金額は次のうちどれに最も近いか。

但し、$P_{x:\overline{n|}}=0.01431$　$A_{x+20:\overline{n-20|}}^{\ \ \ \ \ 1}=0.5466$　${}_{20}V_{x:\overline{n|}}=0.4838$　$i=5.5\%$　$n>20$とする。

また、解約控除と付加保険料は考慮しないものとする。

（A）0.72　（B）0.74　（C）0.76　（D）0.78　（E）0.80

（４）${}_{\infty}q^{\ 2}_{xy}=0.4$　${}_{\infty}q^{\ 2}_{xz}=0.5$　${}_{\infty}q^{\ 2}_{xyz}=0.2$のとき、${}_{\infty}q^{\ 3}_{xyz}$の値に最も近いのは次のうちどれか。

（A）0.33　（B）0.35　（C）0.37　（D）0.39　（E）0.41

（５）死亡表がゴムパーツの法則に従っており、$\mu_x=0.2\times1.06^x$のとき、$\overline{A}_{\overset{1}{30}:32}$を$\overline{A}_{30:32}$で表せば次のうちどれに最も近いか。

（A）$0.41\overline{A}_{30:32}$　（B）$0.43\overline{A}_{30:32}$　（C）$0.45\overline{A}_{30:32}$　（D）$0.47\overline{A}_{30:32}$　（E）$0.49\overline{A}_{30:32}$

２．確率変数Ｔは確率密度関数 $f(t)={}_{t}p_{x}\mu_{x+t}$ に従う。

死力 $\mu_{x+t}=\mu=0.08$、利力 $\delta=0.02$ のとき次の問に答えよ。　(20点)

（１）$\bar{a}_{\overline{T|}}$ の平均値 $E\left[\bar{a}_{\overline{T|}}\right]$ の値を求めよ。

（２）$\bar{a}_{\overline{T|}}$ の分散 $V\left[\bar{a}_{\overline{T|}}\right]$ の値を求めよ。

（３）$\bar{a}_{\overline{T|}}>\bar{a}_{x}$ となる確率 $P\left(\bar{a}_{\overline{T|}}>\bar{a}_{x}\right)$ の値を求めよ。

３．ｘ歳加入年払全期払込ｎ年定期保険（保険金額１、保険金年末払）において、予定死亡率 q_{x} を q'_{x} に変更するとき、q_{x} と q'_{x} の間に

$$q'_{x+t}-q_{x+t}=\frac{P'^{\,1}_{x:\overline{n|}}-P^{1}_{x:\overline{n|}}}{1-{}_{t+1}V^{1}_{x:\overline{n|}}}(1+i)$$

なる関係が成り立つならば、${}_{t}V'^{\,1}_{x:\overline{n|}}={}_{t}V^{1}_{x:\overline{n|}}$ $(0\leqq t\leqq n)$ となることを示せ。

但し、$P'^{\,1}_{x:\overline{n|}}$、${}_{t}V'^{\,1}_{x:\overline{n|}}$ はそれぞれ予定死亡率 q'_{x} による年払純保険料、純保険料式責任準備金とし、ｉは予定利率とする。　(20点)

４．死亡・就業不能脱退残存表が与えられるとき、次の問に答えよ。　(20点)

（１）30歳における次の①～④の値を右表の数値を用いて求めよ。

但し、小数点第７位を四捨五入し、小数点第６位まで求めよ。

X	ℓ_{x}^{aa}	d_{x}^{aa}	i_{x}	ℓ_{x}^{ii}	d_{x}^{ii}
29歳	99,197人	79人	26人	139人	2人
30歳	99,092人	82人	28人	163人	2人
31歳	98,982人	86人	30人	189人	2人

①q_{30}^{aa*}

②q_{30}^{i}

③q_{30}^{a}

④q_{30}^{ai}

但し、q_{30}^{aa*} は30歳の就業者の絶対死亡率とする。

（２）$q_{x}^{(i)}$ を就業者が１年以内に就業不能になる確率とする。$\ell_{x}^{ii}=K_{x}\ell_{x}$ なる関係があるとき

$$q_{x}^{(i)}=\frac{K_{x+1}(1-q_{x})-K_{x}(1-q_{x}^{i})}{(1-K_{x})(1-\frac{1}{2}q_{x}^{i})}$$ となることを示せ。

但し、$q_{x}=\dfrac{d_{x}}{\ell_{x}}$ とする。

保険数学２（解答例）

1.

設問番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
解答欄	(B)	(D)	(E)	(B)	(D)

正解は上表のとおりであるが、以下に各設問の解答方法を略記する。

(1) … (B)

題意より $\mu_x^{(i)} = C\mu_x^{(-i)}$　また、$\mu_x^{(i)} + \mu_x^{(-i)} = \mu_x$　より　$\mu_x^{(i)} = \dfrac{C}{1+C}\mu_x$

給付現価は　$\int_0^n v^t {}_t p_x (3\mu_{x+t}^{(i)} + \mu_{x+t}^{(-i)})\,dt = \int_0^n v^t {}_t p_x (2\mu_{x+t}^{(i)} + \mu_{x+t})\,dt = \dfrac{1+3C}{1+C}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$

従って求める年払純保険料は　$\dfrac{1+3C}{1+C}\bar{P}^{1}_{x:\overline{n}|}$

(2) … (D)

$${}_1V^{(2)}_{x:n} = A_{x+1:\overline{n-1}|} - (P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|})}\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} = 0 \quad より$$

$$\alpha = (P_{x+1:\overline{n-1}|} - P_{x:\overline{n}|})\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \left(\frac{1}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} - d - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + d\right)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} - 1$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + v p_x \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} \quad より \quad \alpha = \frac{v p_x \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1} - 1$$

$$従って予定利率 i は \quad i = \frac{p_x \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{(\alpha+1)(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1)} - 1 \fallingdotseq 0.057$$

(3) … (E)

生存保険金額をS′とすると　$S' = \dfrac{{}_{20}V_{x:\overline{n}|} - A^{1}_{x+20:\overline{n-20}|}}{A_{x+20:\overline{n-20}|}^{\ \ \ \ 1}}$

また、$P_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d$　　${}_{20}V_{x:\overline{n}|} = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+20:\overline{n-20}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$　より

$$\ddot{a}_{x+20:\overline{n-20}|} = \frac{1 - {}_{20}V_{x:\overline{n}|}}{P_{x:\overline{n}|} + d}$$

$$A^{1}_{x+20:\overline{n-20}|} = 1 - d\left(\frac{1 - {}_{20}V_{x:\overline{n}|}}{P_{x:\overline{n}|} + d}\right) - A_{x+20:\overline{n-20}|}^{\ \ \ \ 1} \fallingdotseq 0.0484$$

$\therefore\ \ S' \fallingdotseq 0.7966$

(4) … (B)

$${}_{\infty}q^{3}_{xyz} = \int_0^\infty (1 - {}_tp_y)(1 - {}_tp_z)\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt = 1 - {}_{\infty}q^{1}_{xy} - {}_{\infty}q^{1}_{xz} + {}_{\infty}q^{1}_{xyz}$$

$${}_{\infty}q^{2}_{xyz} = \int_0^\infty {}_tp_x\,{}_tp_{\overset{[1]}{yz}}\,\mu_{x+t}\,dt = \int_0^\infty {}_tp_x\,({}_tp_y + {}_tp_z - 2\,{}_tp_{yz})\,\mu_{x+t}\,dt$$

$$= {}_{\infty}q^{1}_{xy} + {}_{\infty}q^{1}_{xz} - 2\,{}_{\infty}q^{1}_{xyz}$$

$$\therefore\ \ 2\,{}_{\infty}q^{3}_{xyz} + {}_{\infty}q^{2}_{xyz} = 2 - {}_{\infty}q^{1}_{xy} - {}_{\infty}q^{1}_{xz} = 2 - (1 - {}_{\infty}q^{2}_{xy}) - (1 - {}_{\infty}q^{2}_{xz})$$

$$\therefore\ \ {}_{\infty}q^{3}_{xyz} = \frac{1}{2}\left({}_{\infty}q^{2}_{xy} + {}_{\infty}q^{2}_{xz} - {}_{\infty}q^{2}_{xyz}\right) = 0.35$$

(5) … (D)

$\mu_x = BC^x$　とおく

$$\bar{A}^{1}_{xy} = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xy}\,\mu_{x+t}\,dt = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xy}\,BC^{x+t}\,dt$$

$$= \frac{C^x}{C^x + C^y}\int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xy}\,B\,(C^x + C^y)\,C^t\,dt = \frac{1}{1 + C^{y-x}}\int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xy}\,\mu_{x+t,\,y+t}\,dt$$

$$= \frac{1}{1 + C^{y-x}}\,\bar{A}_{xy}$$

$C = 1.06$　$x = 30$　$y = 32$　より　　$\bar{A}^{1}_{30:32} \fallingdotseq 0.47\bar{A}_{30:32}$

2. (1) $E[\bar{a}_{\overline{T}|}] = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt = \int_0^\infty \frac{1 - v^t}{\delta}\,e^{-\mu t}\mu\,dt$

$$= \frac{\mu}{\delta}\int_0^\infty \left\{e^{-\mu t} - e^{-(\mu+\delta)t}\right\}dt = \frac{\mu}{\delta}\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu + \delta}\right)$$

$$= \frac{1}{\mu + \delta} = \frac{1}{0.08 + 0.02} = 10$$

$$\therefore\ \ E[\bar{a}_{\overline{T}|}] = 10$$

(2) $V[\bar{a}_{\overline{T}|}] = E[\bar{a}^2_{\overline{T}|}] - E[\bar{a}_{\overline{T}|}]^2$

$$E[\bar{a}^2_{\overline{T}|}] = E\left[\frac{1 - 2v^T + v^{2T}}{\delta^2}\right] = \frac{1}{\delta^2}\left(1 - 2E[v^T] + E[v^{2T}]\right)$$

$$E[v^T] = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(\mu+\delta)t}\mu\,dt = \frac{\mu}{\mu + \delta}$$

$$E[v^{2T}] = \int_0^\infty v^{2t}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(\mu+2\delta)t}\mu\,dt = \frac{\mu}{\mu + 2\delta}$$

$\therefore\ \ E[\bar{a}^2_{\overline{T}|}] = \dfrac{1}{\delta^2}\left(1 - \dfrac{2\mu}{\mu+\delta} + \dfrac{\mu}{\mu+2\delta}\right) = \dfrac{2}{(\mu+\delta)(\mu+2\delta)} = \dfrac{2}{0.10\times 0.12} = \dfrac{500}{3}$

$\therefore\ \ V[\bar{a}_{\overline{T}|}] = \dfrac{500}{3} - 100 = \dfrac{200}{3}$

(3) $\bar{a}_x = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt$ より

$P(\bar{a}_{\overline{T}|} > \bar{a}_x) = P(\bar{a}_{\overline{T}|} > E[\bar{a}_{\overline{T}|}]) = P(\bar{a}_{\overline{T}|} > 10)$

$= P\left(\dfrac{1-v^t}{\delta} > 10\right) = P\left(t > -\dfrac{\log(1-10\delta)}{\delta}\right)$

$= \int_{-\frac{\log(1-10\delta)}{\delta}}^{\infty} {}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt = \int_{-\frac{\log(1-10\delta)}{\delta}}^{\infty} e^{-\mu t}\mu\,dt$

$= e^{\frac{\mu}{\delta}\log(1-10\delta)} = (1-10\delta)^{\frac{\mu}{\delta}} = (0.8)^4 = 0.4096$

$\therefore\ \ P(\bar{a}_{\overline{T}|} > \bar{a}_x) = 0.4096$

3. 責任準備金の再帰式より　${}_tV^1_{x:\overline{n}|} + P^1_{x:\overline{n}|} - vq_{x+t} = vp_{x+t}\cdot{}_{t+1}V^1_{x:\overline{n}|}$ ……………………………… ①

${}_tV'^1_{x:\overline{n}|} + P'^1_{x:\overline{n}|} - vq'_{x+t} = vp'_{x+t}\cdot{}_{t+1}V'^1_{x:\overline{n}|}$ …………………………… ②

②−①　$({}_tV'^1_{x:\overline{n}|} - {}_tV^1_{x:\overline{n}|}) + (P'^1_{x:\overline{n}|} - P^1_{x:\overline{n}|}) = v(q'_{x+t} - q_{x+t}) + vp'_{x+t}\cdot{}_{t+1}V'^1_{x:\overline{n}|} - vp_{x+t}\cdot{}_{t+1}V^1_{x:\overline{n}|}$

ここで　${}_tV'^1_{x:\overline{n}|} - {}_tV^1_{x:\overline{n}|} = (\Delta V)_t$，$P'^1_{x:\overline{n}|} - P^1_{x:\overline{n}|} = \Delta P$，$q'_{x+t} - q_{x+t} = \Delta q_{x+t}$

とおくと　$p_{x+t} = p'_{x+t} + \Delta q_{x+t}$

$(\Delta V)_t + \Delta P = v\Delta q_{x+t} + vp'_{x+t}\cdot{}_{t+1}V'^1_{x:\overline{n}|} - v(p'_{x+t} + \Delta q_{x+t})\,{}_{t+1}V^1_{x:\overline{n}|}$

$(\Delta V)_t + \Delta P = v\Delta q_{x+t}(1 - {}_{t+1}V^1_{x:\overline{n}|}) + vp'_{x+t}(\Delta V)_{t+1}$

D'_{x+t}　を両辺に掛けると

$D'_{x+t}(\Delta V)_t + D'_{x+t}\Delta P = v\Delta q_{x+t}D'_{x+t}(1 - {}_{t+1}V^1_{x:n}) + D'_{x+t+1}(\Delta V)_{t+1}$

$t = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ t-1$　とおき辺々加えると

$D'_x(\Delta V)_0 + \Delta P\sum_{k=0}^{t-1} D'_{x+k} = v\sum_{k=0}^{t-1}\Delta q_{x+k}D'_{x+k}(1 - {}_{k+1}V^1_{x:n}) + D'_{x+t}(\Delta V)_t$

$(\Delta V)_0 = 0$　また、題意の条件より　$\Delta q_{x+t} = \dfrac{\Delta P}{(1 - {}_{t+1}V^1_{x:\overline{n}|})}(1+i)$

$\Delta P\sum_{k=0}^{t-1} D'_{x+k} = v\sum_{k=0}^{t-1}\dfrac{\Delta P}{(1 - {}_{k+1}V^1_{x:n})}(1+i)D'_{x+k}(1 - {}_{k+1}V^1_{x:n}) + D'_{x+t}(\Delta V)_t$

$\therefore\ \ D'_{x+t}(\Delta V)_t = 0$

従って　${}_tV'^1_{x:\overline{n}|} = {}_tV^1_{x:\overline{n}|}$

4.（1）①$q_{30}^{aa*} = \dfrac{d_{30}^{aa}}{\ell_{30}^{aa} - \dfrac{1}{2} i_{30}} = \dfrac{82}{99{,}092 - \dfrac{1}{2} \times 28} = 0.000828$

②$q_{30}^{i} = \dfrac{d_{30}^{ii}}{\ell_{30}^{ii} + \dfrac{1}{2} i_{30}} = \dfrac{2}{163 + \dfrac{1}{2} \times 28} = 0.011299$

③$q_{30}^{a} = \dfrac{d_{30}^{aa} + \dfrac{1}{2} i_{30} q_{30}^{i}}{\ell_{30}^{aa}} = \dfrac{82 + \dfrac{1}{2} \times 28 \times \dfrac{2}{177}}{99{,}092} = 0.000829$

④$q_{30}^{ai} = \dfrac{\dfrac{1}{2} i_{30} q_{30}^{i}}{\ell_{30}^{aa}} = \dfrac{\dfrac{1}{2} \times 28 \times \dfrac{2}{177}}{99{,}092} = 0.000002$

（2）$i_x = \ell_{x+1}^{ii} - \ell_x^{ii} + d_x^{ii} = \ell_{x+1}^{ii} - \ell_x^{ii} + \ell_x^{ii} q_x^{i} + \dfrac{1}{2} i_x q_x^{i}$

$\therefore \quad i_x = \dfrac{\ell_{x+1}^{ii} - \ell_x^{ii}(1 - q_x^{i})}{1 - \dfrac{1}{2} q_x^{i}}$

$q_x^{(i)} = \dfrac{i_x}{\ell_x^{aa}} = \dfrac{\ell_{x+1}^{ii} - \ell_x^{ii}(1 - q_x^{i})}{\ell_x^{aa}\left(1 - \dfrac{1}{2} q_x^{i}\right)}$

分母分子をℓ_xで割り

$\dfrac{\ell_{x+1}^{ii}}{\ell_x} = \dfrac{\ell_{x+1}^{ii}}{\ell_{x+1}} \dfrac{\ell_{x+1}}{\ell_x} = K_{x+1}(1 - q_x) \qquad \dfrac{\ell_x^{aa}}{\ell_x} = 1 - \dfrac{\ell_x^{ii}}{\ell_x} = 1 - K_x$ を代入すると

$q_x^{(i)} = \dfrac{K_{x+1}(1 - q_x) - K_x(1 - q_x^{i})}{(1 - K_x)\left(1 - \dfrac{1}{2} q_x^{i}\right)}$