保 険 数 学 1（問題）

1．次の（1）から（10）までについて、それぞれ五つの選択肢の中から正しい答を一つ選んで、所定の解答用紙にその記号〔（A）から（E）のうちいずれか一つ。〕を記入せよ。 （50点）

（1）7, 11, 15, 19, 23, 27年後にそれぞれ1を支払う給付の利率 i （$i>0$）に基づく現価は次のうちどれに等しいか。

（A）$\dfrac{\ddot{a}_{\overline{28}|}-\ddot{a}_{\overline{4}|}}{s_{\overline{3}|}+a_{\overline{1}|}}$　（B）$\dfrac{a_{\overline{28}|}-a_{\overline{4}|}}{\ddot{s}_{\overline{3}|}+a_{\overline{1}|}}$　（C）$\dfrac{a_{\overline{28}|}-\ddot{a}_{\overline{4}|}}{\ddot{s}_{\overline{3}|}+a_{\overline{1}|}}$　（D）$\dfrac{\ddot{a}_{\overline{28}|}-a_{\overline{4}|}}{s_{\overline{3}|}+a_{\overline{1}|}}$　（E）$\dfrac{a_{\overline{28}|}-a_{\overline{4}|}}{s_{\overline{3}|}+a_{\overline{1}|}}$

（2）30歳で加入し、60歳で退会する団体を組織する。この団体の構成員は、生存数が ℓ_x で表される生命表に従って死亡するものとし、死亡以外での中途脱退はないこととする。毎年の加入者が一様に ℓ_{30}人であり、何年後かには定常状態に到達するとした場合、次の文中の（A）から（E）までのうちで正しくないものはどれか。但し、$T_x=\int_0^{\omega-x}\ell_{x+t}dt$ とする。

「この団体が定常状態に到達するのは（A）年後である。その時の団体の人数は（B）である。定常状態に到達した後、ある時点で30歳から40歳の間にある者が、60歳までに死亡する人数は（C）、60歳まで生存して退会する確率は（D）である。この団体の死亡者の平均年齢は（E）である。」

（A）30　（B）$T_{30}-T_{60}$　（C）$T_{30}-T_{40}-10\ell_{60}$　（D）$\dfrac{10\ell_{60}}{T_{30}-T_{40}}$　（E）$\dfrac{T_{30}-T_{60}-30\ell_{60}}{\ell_{30}-\ell_{60}}$

（3）第1の生命表が $\ell_x=90-x$ （$0\leqq x\leqq 90$）に従い、第1の生命表での生存確率 ${}_tp_{60}$と、第2の生命表での生存確率 ${}_tp'_{60}$との関係が ${}_tp'_{60}=e^{0.01t}\cdot{}_tp_{60}$（$0\leqq t\leqq 30$）であるとき、第2の生命表での死力 μ'_{66}の値に最も近いのは次のうちどれか。但し、e は自然対数の底を表し、必要なら $e\fallingdotseq 2.7$ を用いよ。

（A）0.023　（B）0.027　（C）0.032　（D）0.043　（E）0.052

（4）$\dfrac{d}{dx}{}_{n|}\mathring{e}_x$ を表す式のうち、正しいものは次のどれか。

（A）$\mu_x\cdot{}_{n|}\mathring{e}_x-1$　（B）$\mu_{x+n}\cdot{}_{n|}\mathring{e}_x-1$　（C）$\mu_x\cdot{}_{n|}\mathring{e}_x-{}_np_x$　（D）$\mu_{x+n}\cdot{}_{n|}\mathring{e}_x-{}_np_x$　（E）$\mu_{x+n}\cdot{}_{n|}\mathring{e}_x-\mu_x$

（5）$\int_0^n\overline{a}_{x+t}(\mu_{x+t}+\delta)dt$ を表す式のうち、正しいものは次のどれか。

（A）$\overline{a}_{x+n}-\overline{a}_x+\mu_{x+n}-\mu_x+n\delta$　（B）$\overline{a}_{x+n}-\overline{a}_x-\mu_{x+n}+\mu_x-n\delta$

（C）$\overline{a}_{x+n}-\overline{a}_x+\mu_{x+n}-\mu_x-n\delta$　（D）$\overline{a}_{x+n}-\overline{a}_x+n$　（E）$\overline{a}_{x+n}-\overline{a}_x-n$

（6）$C_x=40$，$D_{x+1}=35,000$，$N_{x+1}=682,000$，$i=0.05$ の時、A_x の値に最も近いのは次のうちどれか。

（A）0.070　（B）0.075　（C）0.080　（D）0.085　（E）0.090

（７）ｘ歳加入、期間２ｎ年の保険で、次の給付を行う保険を考える。

死亡保険金（期末払）$\begin{cases} 1 & （最初のｎ年間） \\ 0.5 & （残りのｎ年間） \end{cases}$　　生存保険金$\begin{cases} 0.5 & （ｎ年経過時） \\ 0.5 & （満　期　時） \end{cases}$

この保険の年払平準純保険料Ｐは、保険期間中、被保険者が生存する限り各保険年度始に払い込まれるものとする。いま、$P=0.0850$ とし、保険金期末払の養老保険の年払純保険料を $P'_{x:\overline{n}|}=0.1705$，$P_{x:\overline{2n}|}=0.0740$ とするとき、予定利率の値に最も近いのは次のうちどれか。

（Ａ）5.0%　　（Ｂ）5.1%　　（Ｃ）5.2%　　（Ｄ）5.3%　　（Ｅ）5.4%

（８）$P=\dfrac{v\,q_x+v^2\,{}_{1|}q_x+\cdots+v^n\,{}_{n-1|}q_x+v^n\,{}_np_x}{\ddot{a}_{\overline{1}|}\,q_x+\ddot{a}_{\overline{2}|}\,{}_{1|}q_x+\cdots+\ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_{n-1|}q_x+\ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x}$ は次のうちどれに等しいか。

（Ａ）$\dfrac{M_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}$　　（Ｂ）$\dfrac{M_x-M_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}$　　（Ｃ）$\dfrac{M_x-M_{x+n}+D_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}$　　（Ｄ）$\dfrac{M_x}{N_x-N_{x+n}}$　　（Ｅ）$\dfrac{M_x+v^n}{N_x-N_{x+n}}$

（９）$A_{x+2t}-A_{x+t}=A_{x+t}-A_x$ かつ ${}_tV_x=\dfrac{1}{8}$ のとき、${}_tV_{x+t}$ の値は次のうちどれか。

（Ａ）$\dfrac{3}{20}$　　（Ｂ）$\dfrac{3}{16}$　　（Ｃ）$\dfrac{2}{15}$　　（Ｄ）$\dfrac{1}{7}$　　（Ｅ）$\dfrac{1}{6}$

（10）${}_1V_{35:\overline{15}|}=0.0444$，${}_3V_{35:\overline{15}|}=0.1410$，${}_5V_{35:\overline{15}|}=0.2483$，${}_1V_{37:\overline{15}|}=0.0545$，${}_5V_{37:\overline{15}|}=0.3048$ のとき、${}_3V_{37:\overline{15}|}$ の値に最も近いのは次のうちどれか。

（Ａ）0.1726　　（Ｂ）0.1731　　（Ｃ）0.1736　　（Ｄ）0.1741　　（Ｅ）0.1746

２．第ｔ保険年度の死亡保険金額 S_t が次の条件を満たすようなｘ歳加入ｎ年定期保険（保険金期末払、保険料全期払込）を考える。

$$S_1q_x>S_2q_{x+1}>\cdots>S_Tq_{x+T-1}<\cdots<S_{n-1}q_{x+n-2}<S_nq_{x+n-1}$$

いま、この保険の年払平準純保険料Ｐについて $P>vS_1q_x$ が成立しているとき、次の（１）および（２）を証明せよ。

（25点）

（１）$vS_mq_{x+m-1}\leqq P<vS_{m+1}q_{x+m}$ を満たす整数ｍ（$T\leqq m<n$）が１つ存在する。

（２）第ｔ保険年度末純保険料式責任準備金 V_t（$t=1,\cdots,n-1$）はすべて正である。

３．ｘ歳加入、保険期間ｎ年、保険料全期払込の次の給付を行う保険を考える。

①第ｔ保険年度中に被保険者が死亡した場合には、死亡給付金として$\dfrac{t}{n}$を即時に支払うとともに、第ｔ保険年度末から第ｎ保険年度末まで毎年度末に被保険者の遺族に年金を（遺族の生死に関係なく）支払う。この年金額は、第１回目はｒ、第２回目はｒ（１＋ｊ）、第３回目はｒ（１＋２ｊ）、… と毎年逓増していくものとする。

②満期まで被保険者が生存した場合には、満期保険金として１を支払う。

この保険について、次の問に答えよ。　　（25点）

（１）年払平準純保険料を求めよ。

（２）被保険者が生存している場合の第ｔ保険年度末純保険料式責任準備金を過去法および将来法で表し、それらが一致することを示せ。

保険数学１（解答例）

１.

設問番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
解答欄	E	E	C	C	D	A	D	C	D	A

正解は上表のとおりであるが，以下に各設問の解法を略記する。

(1) … (E)

$$求める現価 = v^7 + v^{11} + v^{15} + v^{19} + v^{23} + v^{27} = v^7(1 + v^4 + v^8 + v^{12} + v^{16} + v^{20})$$

$$= v^7 \frac{1 - v^{24}}{1 - v^4} = \frac{(1 - v^{28}) - (1 - v^4)}{(1+i)^3 - 1 + (1 - v)}$$

$$= \frac{a_{\overline{28|}} - a_{\overline{4|}}}{s_{\overline{3|}} + a_{\overline{1|}}} \qquad \left(\because a_{\overline{n|}} = \frac{1 - v^n}{i},\ s_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

(2) … (E)

(E) は $30 + \dfrac{T_{30} - T_{60} - 30\ell_{60}}{\ell_{30} - \ell_{60}}$ が正しい。

(3) … (C)

$$\mu_{60+t} = -\frac{d}{dt}\log \ell_{60+t} = -\frac{d}{dt}\log(30 - t) = \frac{1}{30 - t}$$

${}_tp'_{60} = e^{0.01t} \cdot {}_tp_{60}$ より $\mu'_{60+t} = \mu_{60+t} - 0.01 = \dfrac{1}{30 - t} - 0.01$

よって$\mu'_{66} = \dfrac{1}{24} - 0.01 \fallingdotseq 0.032$

(4) … (C)

$$\frac{d}{dx}{}_{n|}\mathring{e}_x = \frac{d}{dx}\left({}_np_x \mathring{e}_{x+n}\right) = \left(\frac{d}{dx}{}_np_x\right)\mathring{e}_{x+n} + {}_np_x\left(\frac{d}{dx}\mathring{e}_{x+n}\right)$$

$$= {}_np_x(\mu_x - \mu_{x+n})\mathring{e}_{x+n} + {}_np_x(\mu_{x+n}\mathring{e}_{x+n} - 1) = {}_np_x\mu_x\mathring{e}_{x+n} - {}_np_x$$

$$= \mu_x\, {}_{n|}\mathring{e}_x - {}_np_x$$

(5) … (D)

$\dfrac{d}{dx}\bar{a}_x = \bar{a}_x(\mu_x + \delta) - 1$ より $\dfrac{d}{dx}(\bar{a}_x + x) = \bar{a}_x(\mu_x + \delta)$

よって $\displaystyle\int_0^n \bar{a}_{x+t}(\mu_{x+t} + \delta)\,dt = \left[\bar{a}_{x+t} + t\right]_{t=0}^{t=n} = \bar{a}_{x+n} - \bar{a}_x + n$

(6) … (A)

$C_x = vD_x - D_{x+1}$ より $D_x = (1+i)(C_x + D_{x+1}) = 1.05 \times (40 + 35{,}000) = 36{,}792$

$$A_x = 1 - d\ddot{a}_x = 1 - d\frac{N_x}{D_x} = 1 - \frac{i}{1+i} \cdot \frac{D_x + N_{x+1}}{D_x} = 1 - \frac{0.05}{1.05} \cdot \frac{36{,}792 + 682{,}000}{36{,}792}$$

$$= 0.0696\cdots$$

(7) … (D)

題意より，$P\,\ddot{a}_{x:\overline{2n}|} = 0.5\,A_{x:\overline{n}|} + 0.5\,A_{x:\overline{2n}|}$　　$\therefore 2P = \dfrac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{2n}|}} + P_{x:\overline{2n}|}$

これに $A_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{P_{x:\overline{n}|}}{P_{x:\overline{n}|} + d}$，$\ddot{a}_{x:\overline{2n}|} = \dfrac{1}{P_{x:\overline{2n}|} + d}$ を代入すれば，

$2P - P_{x:\overline{2n}|} = \dfrac{P_{x:\overline{2n}|} + d}{P_{x:\overline{n}|} + d} P_{x:\overline{n}|}$ これを d について解けば，

$$d = \frac{2P_{x:\overline{n}|}(P - P_{x:\overline{2n}|})}{P_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{2n}|} - 2P} = \frac{2 \times 0.1705 \times (0.0850 - 0.0740)}{0.1705 + 0.0740 - 2 \times 0.0850} \fallingdotseq 0.0503$$

$$\therefore i = \frac{d}{1-d} \fallingdotseq \frac{0.0503}{0.9497} = 0.0529 \cdots$$

(8) … (C)

$A_{x:\overline{n}|}$，$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ を確率論的に表示すれば，

$$A_{x:\overline{n}|} = vq_x + v^2{}_{1|}q_x + \cdots + v^n{}_{n-1|}q_x + v^n{}_n p_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{1}|}q_x + \ddot{a}_{\overline{2}|}{}_{1|}q_x + \cdots + \ddot{a}_{\overline{n}|}{}_{n-1|}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}{}_n p_x$$

であるから，

$$P = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = P_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

(9) … (D)

${}_tV_x = \dfrac{A_{x+t} - A_x}{1 - A_x}$，${}_tV_{x+t} = \dfrac{A_{x+2t} - A_{x+t}}{1 - A_{x+t}}$ を利用すれば，題意により，

$$\frac{{}_tV_{x+t}}{{}_tV_x} = \frac{1 - A_x}{1 - A_{x+t}} = \frac{1}{1 - \dfrac{A_{x+t} - A_x}{1 - A_x}} = \frac{1}{1 - {}_tV_x}$$

よって，$${}_tV_{x+t} = \frac{{}_tV_x}{1 - {}_tV_x} = \frac{\dfrac{1}{8}}{1 - \dfrac{1}{8}} = \frac{1}{7}$$

(10) … (A)

${}_tV_{x:\overline{n}|} = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ を利用すれば，

$${}_3V_{37:\overline{13}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{37:\overline{13}|}} = 1 - \frac{\ddot{a}_{38:\overline{12}|}}{\ddot{a}_{37:\overline{13}|}} \cdot \frac{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{35:\overline{15}|}} \cdot \frac{\ddot{a}_{35:\overline{15}|}}{\ddot{a}_{38:\overline{12}|}} = 1 - \frac{(1 - {}_1V_{37:\overline{13}|})(1 - {}_5V_{35:\overline{15}|})}{1 - {}_3V_{35:\overline{15}|}}$$

$$= 1 - \frac{(1 - 0.0545)(1 - 0.2483)}{1 - 0.1410}$$

$$\fallingdotseq 0.1726$$

2. (1) $j=1, \cdots, n$ に対して，数列 $\{b_j\}$ を次のように定義する。

$$b_j = vS_j q_{x+j-1} - P$$

条件 $S_1 q_x > S_2 q_{x+1} > \cdots > S_T q_{x+T-1} < \cdots < S_{n-1} q_{x+n-2} < S_n q_{x+n-1}$ により，

$b_1 > b_2 > \cdots > b_T < \cdots < b_{n-1} < b_n$ である。

また，$P > vS_1 q_x$ より $b_1 < 0$ $\quad \therefore b_j < 0 \quad (j=1, \cdots, T) \cdots$①

さらに，$b_n > 0$ である。なんとなれば，もし $b_n \leqq 0$ とすれば，$b_j < 0 \quad (j=T, \cdots, n-1)$

となり，これと①より $j=1, \cdots, n-1$ で $b_j<0$ となるので，

$$vS_j q_{x+j-1} < P \quad (j=1, \cdots, n-1),\ vS_n q_{x+n-1} \leqq P$$

ゆえに $(1 + vp_x + \cdots + v_{n-1}\, p_x) P > vS_1 q_x + vp_x \cdot vS_2 q_{x+1} + \cdots + v^{n-1}_{n-1} p_x \cdot vS_n q_{x+n-1}$

となるが，収支相等の原則によれば，この両辺は等しくなければならず，これは矛盾だからである。

よって $b_T < 0,\ b_T < \cdots < b_n,\ b_n > 0$ ゆえ，ある整数 $j_0\,(T < j_0 \leqq n)$ が存在して

$$b_j \leqq 0 \quad (j < j_0);\ > 0\,(j \geqq j_0)$$

(すなわち，$j=T, \cdots, n$ で b_j は単調増大なので，初めて b_j を正にする $j=j_0$ がただ1つ存在する。)

そこで，$m = j_0 - 1$ とすれば $T \leqq m < n$ であり，

$$b_m = vS_m q_{x+m-1} - P \leqq 0 \qquad (\because m < j_0)$$

$$b_{m+1} = vS_{m+1} q_{x+m} - P > 0 \qquad (\because m+1 \geqq j_0)$$

であるから，これが題意を満たす m である。

(2) この保険について，Facklerの再帰式を考えると，

$V_{t-1} + P = vS_t q_{x+t-1} + vV_t p_{x+t-1} \quad (t=1, \cdots, n) \cdots$②

$1 \leqq t < m$ の場合と $m \leqq t < n$ の場合とに分けて $V_t > 0$ を証明する。

i) $1 \leqq t < m$ の場合

②より $V_t = \dfrac{1}{vp_{x+t-1}}(V_{t-1} + P - vS_t q_{x+t-1})$ なので

$t=1$ のとき

$$V_1 = \frac{1}{vp_x}(V_0 + P - vS_1 q_x) > 0 \qquad (\because vp_x > 0,\ V_0 = 0,\ P > vS_1 q_x)$$

$t = k-1$ のとき $V_{k-1} > 0$ が成立しているとすると，

$$V_k = \frac{1}{vp_{x+k-1}}(V_{k-1} + P - vS_k q_{x+k-1}) > 0 \quad (\because vp_{x+k-1} > 0,\ P > vS_k q_{x+k-1})$$

ゆえに帰納的に $V_t>0$ が証明された。

ii) $m \leqq t < n$ の場合

②より $V_t = vS_{t+1}q_{x+t} - P + vV_{t+1}p_{x+t}$ なので，

$t=n-1$ のとき

$$V_{n-1} = vS_n q_{x+n-1} - P + vV_n p_{x+n-1} > 0 \qquad (\because P > vS_n q_{x+n-1},\ V_n = 0)$$

$t=k+1$ のとき $V_{k+1}>0$ が成立しているとすると，

$$V_k = vS_{k+1}q_{x+k} - P + vV_{k+1}p_{x+k} > 0 (\because P < vS_{k+1}q_{x+k},\ vV_{k+1}P_{x+k} > 0)$$

ゆえに帰納的に $V_t>0$ が証明された。

3. (1) 求める保険料をPとすると，

(収入の現価) $P\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$

(支出の現価)・死亡給付金 $\frac{1}{n}(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}}$

・遺族年金 第t保険年度に被保険者が死亡した場合の，その年度末における年金の現価をF(t) とすると，

$F(t) = r\ddot{a}_{\overline{n-t+1|}} + rj(Ia)_{\overline{n-t|}}$ であるから，

加入時の現価は $\sum_{t=1}^{n} \frac{F(t)\cdot C_{x+t-1}}{D_x}$

・満期保険金 ${}_nE_x$

収支相等の原則により，

$$P = \frac{\frac{1}{n}(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}} + \sum_{t=1}^{n} \frac{F(t)\cdot C_{x+t-1}}{D_x} + {}_nE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

(2) ${}_tV^R$ を過去法，${}_tV^P$ を将来法の責任準備金とすると，

$${}_tV^R = \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{t|}} - \left\{\frac{1}{n}(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{t|}} + \sum_{k=1}^{t} \frac{F(k)\cdot C_{x+k-1}}{D_x}\right\}}{{}_tE_x}$$

$${}_tV^P = \frac{t}{n}\bar{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t|}} + \frac{1}{n}(I\bar{A})^{1}_{x+t:\overline{n-t|}} + \sum_{k=1}^{n-t} \frac{F(t+k)\cdot C_{x+t+k-1}}{D_{x+t}} + {}_{n-t}E_{x+t} - P\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

一方，記号の定義により，次の①～④の等式が成立する。

① $(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}} = (I\bar{A})^{1}_{x:\overline{t|}} + {}_tE_x\{t\bar{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t|}} + (I\bar{A})^{1}_{x+t:\overline{n-t|}}\}$

② $\sum_{k=1}^{n} \frac{F(k)\cdot C_{x+k-1}}{D_x} = \sum_{k=1}^{t} \frac{F(k)\cdot C_{x+k-1}}{D_x} + {}_tE_x \sum_{k=1}^{n-t} \frac{F(t+k)\cdot C_{x+k-1}}{D_{x+t}}$

③ ${}_nE_x = {}_tE_x \cdot {}_{n-t}E_{x+t}$

④ $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{t}|} + {}_tE_x \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$

そこで，$\dfrac{1}{n}$ × ① + ② + ③ − P × ④ を辺々計算し，右辺を ${}_tE_x$ について整理すれば，左辺は収支相等の原則により0であるから，

$$0 = \left\{ \frac{1}{n}(I\bar{A})^1_{x:\overline{t}|} + \sum_{k=1}^{t} \frac{F(k)\cdot C_{x+k-1}}{D_x} - P\ddot{a}_{x:\overline{t}|} \right\} + {}_tE_x \cdot {}_tV^P$$

となる。ところが，中括弧内は $-{}_tE_x \cdot {}_tV^R$ に等しいので，${}_tV^R = {}_tV^P$ となる。

以上