数　学　2（問題）

1．次の各問の $\boxed{}$ に入る答のみを，所定の解答用紙に記入せよ。必要ならば，末尾に示す数値を用いよ。（３０点）

(1) 52枚のトランプの札から重複を許さないで独立に５枚の札を抽出するとき，抽出された５枚の札の番号の標本平均 $\bar{X}$ の分散

$V(\bar{X}) = \boxed{}$ 。（四捨五入して，小数第２位まで求めよ。）

(2) ある会社で，任意抽出された 450人の男性のうち 298人， 550人の女性のうち 352人が運転免許証を持っている。この会社の男女の運転免許証の保有率 p_1 ，p_2 の差の信頼度95%の信頼区間は，

$\boxed{} \leqq p_1 - p_2 \leqq \boxed{}$ 。（四捨五入して，小数第４位まで求めよ。）

(3) 不良率がおよそ10%であることが知られている製品の不良率を誤差が５%以下になることを確率0.99で保証するためには，$\boxed{}$ 個以上のサンプルを必要とする。

(4) $$f(x\,;\theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta(x-\mu)} & (x > \mu) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を確率密度関数としてもつ母集団からの標本変量を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする。$\mu\ (>0)$ を既知としたとき θ の最尤推定量は，$\boxed{}$ である。

(5) pをコインを投げたときに表が出る確率とする。
帰無仮説 $H_0 : p = 0.5$ ，対立仮説 $H_1 : p > 0.5$ をコインを１０回投げて検定する。８回以上表が出るときに帰無仮説を棄却するという検定における検出力関数は，$\boxed{}$ である。

2．ある川の魚が公害物質で汚染されている。ある公害物質の含有量は従来，平均0.38単位の正規分布に従っていた。公害規制条例施行１年後，この川の魚８尾の公害物質含有量の検査結果は次のとおりである。

0.31　0.35　0.30　0.42　0.38　0.31　0.34　0.39

（1）条例施行後，含有量は減ったと言えるか。有意水準0.05で検定せよ。

（2）条例施行後の含有量の平均値の信頼度95％の信頼区間を求めよ。（２０点）

3．（1）ある有名な野球選手は，ある年３７４打数，その次の年２６８打数あり，その選手の平均打率は，前年の 0.313 $\left(=\frac{117}{374}\right)$ から，翌年の 0.280 $\left(=\frac{75}{268}\right)$ に下がった。彼の打撃能力は２年間を通じて変化がないことを，２×２ の分割表の独立性の検定を用いて，有意水準0.05で検定せよ。

（2）前記の問題のデータを使用し，ベルヌーイ分布からなる２つの母集団からそれぞれ３７４個，２６８個の標本を抽出したとする。正規分布で近似し，２つの母集団でヒットの確率が同一であることを有意水準0.05で検定せよ。（２５点）

4．母集団がΓ分布で，その確率密度関数が，

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{a-1}}{\Gamma(a)}e^{-x} & (0\leqq x<\infty,\ a>0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

で与えられているとき，標本変量平均 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ の確率密度関数を求めよ。（２５点）

数表：

標準正規分布　N(0,1) の上側ε点u（ε）

$u(0.005)=2.576$	$u(0.010)=2.326$	$u(0.025)=1.960$	$u(0.050)=1.645$

自由度nのχ^2 分布の上側ε点$\chi^2_n(\varepsilon)$

$\chi^2_1(0.005)=7.88$	$\chi^2_1(0.010)=6.63$	$\chi^2_1(0.025)=5.02$	$\chi^2_1(0.050)=3.84$
$\chi^2_2(0.005)=10.60$	$\chi^2_2(0.010)=9.21$	$\chi^2_2(0.025)=7.38$	$\chi^2_2(0.050)=5.99$
$\chi^2_3(0.005)=12.84$	$\chi^2_3(0.010)=11.34$	$\chi^2_3(0.025)=9.35$	$\chi^2_3(0.050)=7.81$
$\chi^2_4(0.005)=14.86$	$\chi^2_4(0.010)=13.28$	$\chi^2_4(0.025)=11.14$	$\chi^2_4(0.050)=9.49$
$\chi^2_5(0.005)=16.75$	$\chi^2_5(0.010)=15.09$	$\chi^2_5(0.025)=12.83$	$\chi^2_5(0.050)=11.07$
$\chi^2_6(0.005)=18.55$	$\chi^2_6(0.010)=16.81$	$\chi^2_6(0.025)=14.45$	$\chi^2_6(0.050)=12.59$
$\chi^2_7(0.005)=20.3$	$\chi^2_7(0.010)=18.48$	$\chi^2_7(0.025)=16.01$	$\chi^2_7(0.050)=14.07$
$\chi^2_8(0.005)=22.0$	$\chi^2_8(0.010)=20.1$	$\chi^2_8(0.025)=17.53$	$\chi^2_8(0.050)=15.51$
$\chi^2_9(0.005)=23.6$	$\chi^2_9(0.010)=21.7$	$\chi^2_9(0.025)=19.02$	$\chi^2_9(0.050)=16.92$
$\chi^2_{10}(0.005)=25.2$	$\chi^2_{10}(0.010)=23.2$	$\chi^2_{10}(0.025)=20.5$	$\chi^2_{10}(0.050)=18.31$

自由度nの t分布の上側ε点 $t_n(\varepsilon)$

$t_1(0.005)=63.657$	$t_1(0.010)=31.821$	$t_1(0.025)=12.706$	$t_1(0.050)=6.314$
$t_2(0.005)=9.925$	$t_2(0.010)=6.965$	$t_2(0.025)=4.303$	$t_2(0.050)=2.920$
$t_3(0.005)=5.841$	$t_3(0.010)=4.541$	$t_3(0.025)=3.182$	$t_3(0.050)=2.353$
$t_4(0.005)=4.604$	$t_4(0.010)=3.747$	$t_4(0.025)=2.776$	$t_4(0.050)=2.132$
$t_5(0.005)=4.032$	$t_5(0.010)=3.365$	$t_5(0.025)=2.571$	$t_5(0.050)=2.015$
$t_6(0.005)=3.707$	$t_6(0.010)=3.143$	$t_6(0.025)=2.447$	$t_6(0.050)=1.943$
$t_7(0.005)=3.499$	$t_7(0.010)=2.998$	$t_7(0.025)=2.365$	$t_7(0.050)=1.895$
$t_8(0.005)=3.355$	$t_8(0.010)=2.896$	$t_8(0.025)=2.306$	$t_8(0.050)=1.860$
$t_9(0.005)=3.250$	$t_9(0.010)=2.821$	$t_9(0.025)=2.262$	$t_9(0.050)=1.833$
$t_{10}(0.005)=3.169$	$t_{10}(0.010)=2.764$	$t_{10}(0.025)=2.228$	$t_{10}(0.050)=1.812$

数学2　（解答例）

1.

（1）

母平均　$m=\frac{1}{52}\cdot 4\sum_{k=1}^{13}k=\frac{1}{13}\cdot\sum_{k=1}^{13}k=7$

母分散　$\sigma^2=\frac{1}{52}\cdot 4\sum_{k=1}^{13}k^2-m^2=\frac{1}{13}\cdot\sum_{k=1}^{13}k^2-m^2=14$

$V(X)=\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}=\frac{52-5}{52-1}\cdot\frac{14}{5}=\boxed{2.58}$

（2）p_1-p_2 の95%信頼限界は，

$\overline{p}_1-\overline{p}_2\pm u(0.025)\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$

$\overline{p}_1=\frac{298}{450}$　　$\overline{p}_2=\frac{352}{550}$　　$n_1=450$　　$n_2=550$　　$\overline{p}=\frac{298+352}{450+550}=0.65$

$u(0.025)=1.960$　を代入

根号の中は，$0.65(1-0.65)\left(\frac{1}{450}+\frac{1}{550}\right)=0.0009191\cdots$

$\sqrt{0.0009191\cdots}=0.03031817788$

$\overline{p}_1-\overline{p}_2=0.02222\cdots$

$u(0.025)\times 0.03031817788=0.05942362894$

$\boxed{-0.0372}\leqq p_1-p_2\leqq\boxed{0.0816}$

（3）確率　$1-\varepsilon$　で，　$|\hat{p}-p|<u\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$　が成り立つ。

$\varepsilon=0.01$，$p=0.1$，$u(0.005)=2.576$ を代入

$2.576\sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{n}}\leqq 0.05$

$n\geqq\boxed{239}$

（4）尤度関数　$l(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\theta^n\exp\left(-\theta\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\right)$

尤度方程式　$\frac{\partial}{\partial\theta}\log l(\theta)=0$　を解く。

最尤推定量は　$\theta=\boxed{\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu}}$

（5）

検出力とは，帰無仮説を棄却する確率だから，

L（p）＝P（8回以上表が出る｜p）

$$=p^{10}+\binom{10}{1}p^{9}(1-p)+\binom{10}{2}p^{8}(1-p)^{2}$$

$$=\boxed{p^{8}(36p^{2}-80p+45)}$$

2.（1）$\overline{X}=\frac{1}{8}(0.31+0.35+0.30+0.42+0.38+0.31+0.34+0.39)=0.35$

不偏分散　$V=\frac{1}{7}\{(0.31-0.35)^2+(0.35-0.35)^2+(0.30-0.35)^2+(0.42-0.35)^2$

$+(0.38-0.35)^2+(0.31-0.35)^2+(0.34-0.35)^2+(0.39-0.35)^2\}$

$=0.001886$

施行後の含有量の母平均をμとする。H_0 ：$\mu=0.38$　，　H_1 ：$\mu<0.38$

H_0 が正しいすると，$T=\dfrac{\overline{X}-0.38}{\sqrt{\frac{V}{8}}}$ は，自由度7のt分布に従う。

Tの実現値は，-1.954　　　$t_7(0.05)=1.895$　だから，H_0 は棄却される。含有量は減ったといえる。

（2）$\overline{X}-t_7(0.025)\sqrt{\frac{V}{8}}\leqq\mu\leqq\overline{X}+t_7(0.025)\sqrt{\frac{V}{8}}$

$0.314\leqq\mu\leqq0.386$

3.（1） 2×2の分割表は，次の通り

	前年	翌年	計
安 打	117	75	192
非安打	257	193	450
計	374	268	642

一般に，2×2の分割表（各成分は位数）

A＼B	B_1	B_2	計
A_1	a	b	a＋b
A_2	c	d	c＋d
計	a＋c	b＋d	N

N＝a＋b＋c＋d

で，帰無仮説「2つの分割AとBは独立である」を有意水準εで検定するとき，

$$T=\frac{(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}, \quad T \geqq \frac{\chi_1^2(\varepsilon)}{N}$$

ならば，帰無仮説を棄却。

実現値は，$T=0.001262 < \frac{\chi_1^2(0.05)}{642}=0.005981$

よって，帰無仮説は棄却できない。この選手の打撃能力に変化があるとはいえない。

（2） 前年と翌年の安打数をそれぞれ X_1，X_2 とすると，

$\frac{X_1}{374}$ は $N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{374}\right)$ に，$\frac{X_2}{268}$ は $N\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{268}\right)$ に従うものとみなせる。すると，

$\frac{X_1}{374}-\frac{X_2}{268}$ は，$N\left(p_1-p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{374}+\frac{p_2(1-p_2)}{268}\right)$ に従うことになる。

帰無仮説を，$p_1=p_2$ とする。帰無仮説が正しいとすると，$p_1=p_2=p=\frac{192}{642}$ を用いて，

$$T=\left(\frac{X_1}{374}-\frac{X_2}{268}\right)\Big/\sqrt{\left(\frac{1}{374}+\frac{1}{268}\right)\hat{p}(1-\hat{p})}$$ は，N（0，1） に従うものとみなせる。

Tの実現値は，$0.900 < u(0.025)=1.960$

だから，帰無仮説は棄却できない。この選手の打撃能力に変化があるとはいえない。

4.

X_1+X_2 の確率密度関数は,

$$f_2(x)=\int_0^{\infty}f(y)\ f(x-y)\,dy$$
$$=\frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(a)}\int_0^{x}y^{a-1}(x-y)^{a-1}e^{-y}e^{-(x-y)}\,dy$$
$$=\frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(a)}\int_0^{1}t^{a-1}(1-t)^{a-1}x^{2a-1}e^{-x}\,dt$$
$$=\frac{B(a,a)}{\Gamma(a)\Gamma(a)}x^{2a-1}e^{-x}=\frac{x^{2a-1}}{\Gamma(2a)}e^{-x}\qquad(x\geqq 0)$$

帰納法　$f_{n-1}(x)=\dfrac{x^{(n-1)a-1}}{\Gamma((n-1)a)}e^{-x}\qquad(x\geqq 0)$　とする。

$$f_n(x)=\int_0^{\infty}f(y)\ f_{n-1}(x-y)\,dy$$
$$=\frac{1}{\Gamma((n-1)a)\Gamma(a)}\int_0^{x}y^{(n-1)a-1}(x-y)^{a-1}e^{-y}e^{-(x-y)}\,dy$$
$$=\frac{1}{\Gamma((n-1)a)\Gamma(a)}\int_0^{1}t^{(n-1)a-1}(1-t)^{a-1}x^{na-1}e^{-x}\,dt$$
$$=\frac{B((n-1)a,a)}{\Gamma((n-1)a)\Gamma(a)}x^{na-1}e^{-x}=\frac{x^{na-1}}{\Gamma(na)}e^{-x}\qquad(x\geqq 0)$$

f_n のxに対して，$n\bar{x}=x$　だから，$\bar{x}$の確率密度関数は,

$$f(\bar{x})=f_n(n\bar{x})\frac{dx}{d\bar{x}}$$
$$=\frac{(n\bar{x})^{na-1}}{\Gamma(na)}ne^{-n\bar{x}}\qquad(\bar{x}\geqq 0)$$

$$f(\bar{x})=\begin{cases}\dfrac{(nx)^{na-1}}{\Gamma(na)}ne^{-nx} & (x\geqq 0)\\[2ex] 0 & (x<0)\end{cases}$$