年 金 数 理（問 題）

（各問20点）

1．次の(1)～(5)までについて，それぞれ5つの選択肢の中から正しいものを選んで所定の解答用紙にその記号を記入せよ。

(1)　i 賦課方式　ii 退職時年金現価積立方式　iii 単位積立方式　iv 総合保険料方式(閉鎖型)　v 到達年齢方式　vi 開放基金方式の各種財政方式を積立レベルの高い順序に並べたとき，正しいものはどれか。

(A)　v→vi→iii→iv＝ii→ i の順序　　(B)　v→vi→iv＝iii→ii→ i の順序

(C)　v→vi＝iv→iii→ii→ i の順序　　(D)　v＝iv→vi＝iii→ii→ i の順序

(E)　v＝iv→iii→vi→ii→ i の順序

(2)　経過年数 t において年額 α^t の割合で支払われる n 年間の連続払確定年金の現価は次のうちどれか。（$\alpha > 1+i$）

(A) $\dfrac{(\log\alpha-\delta)v^n}{i}$　(B) $\dfrac{1}{\log\alpha+\delta}(\alpha^n\cdot v^n-1)$　(C) $\dfrac{1}{\log\alpha-\delta}(\alpha^n\cdot v^n-1)$　(D) $\dfrac{1-v^n}{\log\alpha-\delta}$　(E) $\dfrac{nv^n}{\alpha-\delta}$

(3)　年金資産 F_A の時刻 t における利力は $\delta_t=a+bt$，年金資産 F_B の時刻 t における利力は $\delta'_t=g+ht$ である。このとき，$a>g>0$，$h>b>0$，時刻 $t=0$ のとき年金資産 F_A と年金資産 F_B は等しく，時刻 $t=n$ のときも等しい。n は次のうちどれか。

(A) $\dfrac{a-g}{h-b}$　(B) $\dfrac{2(a-g)}{h-b}$　(C) $\dfrac{h-b}{a-g}$　(D) $\dfrac{h-b}{2(a-g)}$　(E) $\dfrac{2(h-b)}{a-g}$

(4)　ある年金制度を発足したところ，初期過去勤務債務は100，積立金は0であった。初年度末に2倍の給付改善を行うとした場合，この時の過去勤務債務額は次のうちどれか。

ただし，条件は以下のとおりとする。

・予定利率	：5.5%	・給付	：10
・運用利率	：5.5%	・財政方式	：加入年齢方式
・標準保険料	：12	・保険料および給付は年1回期初に発生するものとする。	
・特別保険料	：8		

(A)　194.12　(B)　204.67　(C)　211.0　(D)　215.22　(E)　221.55

(5)　次のデータにもとづき，H2年4月1日における加入員Aの年金現価の値はどの範囲にあるか。

①加入員Aの生年月日　S15年4月1日

②年金給付　55歳開始の毎月2万5千円支払いの年金

③年金の種類　5年間保証期間付終身年金

④予定利率　6％

⑤基数表（N_X）

X	N_X
50歳	67,129
51	62,016
⋮	⋮
55	44,721
56	41,056
⋮	⋮
60	28,659
61	26,066

⑥年金現価　$\ddot{a}^{(12)}_{\overline{5}|}(i=6\%)=4.348$

(A)　257.5万円未満　(B)　257.5万円以上260万円未満　(C)　260万円以上262.5万円未満

(D)　262.5万円以上265万円未満　(E)　265万円以上

2．次の空欄に適当と思われる計算式を記入せよ。

加入年齢 X 歳の加入員１人あたり，単位給与あたりの企業年金制度の責任準備金を表わす公式は，ファクラーの公式と呼ばれている。記号を下のとおり定義しよう。

X_w　：最終年齢

$S_\tau^{(X)}d\tau$　：勤続期間 τ における微少期間 $d\tau$ に脱退する者の給付額の期待値（時点 t の給与１当たり）

$B_\tau^{(X)}$　：勤続期間 τ における給与額の期待値（時点 t の給与１当たり）

P_τ　：時点 τ における保険料率

δ　：利力

すると，X 歳加入 t 年後の加入員に対する責任準備金 ${}_tV_X$ は，

$$ {}_tV_X=\int_t^{X_w-X}\boxed{\text{①}}\,d\tau-\int_t^{X_w-X}\boxed{\text{②}}\,d\tau $$

ここで，$S_\tau^{(X)}d\tau$，$B_\tau^{(X)}$ を生存数 l_X，給与指数 b_X を用いて表現すると，

$$ S_\tau^{(X)}d\tau=\overline{S}_\tau^{(X)}\cdot\boxed{\text{③}}\,d\tau $$

$$ B_\tau^{(X)}=\boxed{\text{④}} $$

となる。ここで，$\overline{S}_\tau^{(X)}$ なる記号を使用したが，これは X 歳加入 τ 年後に脱退したものの給与１に対する年金給付現価である。

これを代入して整理すると，

$$ {}_tV_X=\frac{e^{\delta t}}{l_{X+t}\cdot b_{X+t}}\int_t^{X_w-X}\boxed{\text{⑤}}\,d\tau $$

さらに Δt 時間経過後は

$$ {}_{t+\Delta t}V_X=\frac{e^{\delta(t+\Delta t)}}{l_{X+t+\Delta t}\cdot b_{X+t+\Delta t}}\int_{t+\Delta t}^{X_w-X}\boxed{\text{⑤}}\,d\tau $$

この両者を差引すれば

$$ {}_{t+\Delta t}V_X-{}_tV_X=\frac{1}{l_{X+t}\cdot b_{X+t}}\int_t^{t+\Delta t}\boxed{\text{⑥}}\,d\tau+\left(\boxed{\text{⑦}}\right)\cdot{}_tV_X $$
$$ +{}_{t+\Delta t}V_X\cdot\boxed{\text{⑧}}-{}_{t+\Delta t}V_X\frac{b_{X+t+\Delta t}-b_{X+t}}{b_{X+t}} $$
$$ -\frac{1}{l_{X+t}\cdot b_{X+t}}\int_t^{t+\Delta t}\boxed{\text{⑨}}\,d\tau $$

上式は，責任準備金の時間的経過による変化を示している。各項の意味は，

第１項………保険料の払込による増（減）

第２項………予定利息による増（減）

第３項………脱退者の責任準備金の移転による増（減）

第４項………昇給による相対的減（増）

第５項………給付の支払いによる減（増）

この式を Δt で除し，$\Delta t\to 0$ として極限をとると，ファクラーの公式の連続的表現であるティーレの公式が得られる。

$$ \frac{d_tV_X}{dt}=p_t+\left(\boxed{\text{⑩}}\right)\cdot{}_tV_X-\overline{S}_t^{(X)}\cdot\mu_{X+t} $$

ここに，

$$ \mu_{X+t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{l_{X+t}-l_{X+t+\Delta t}}{l_{X+t}\cdot\Delta t} $$

が成立していることを利用しており，また λ_{X+t} をその時における昇給力，すなわち

$$ \lambda_{X+t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{b_{X+t+\Delta t}-b_{X+t}}{b_{X+t}\cdot\Delta t} $$

とした。以上が，加入員の責任準備金に関する漸化式である。

3．定常人口の企業を仮定する。Trowbridgeのモデル（定年退職者に即時支給開始終身年金を支給）にもとづく年金制度の諸数値は以下のとおりである。

①年金受給者の給付現価		(S^p)	763百万円
②加入員の給付現価	将来期間対応分	($S^a_{F\cdot S\cdot}$)	296 〃
	過去期間対応分	($S^a_{P\cdot S\cdot}$)	527 〃
	合　　計	(S^a)	823 〃
③新規加入員の加入時給付現価（単年度分）		(S^f_0)	6.8 〃
④加入員の給与現価		(G^a)	3,063 〃
⑤新規加入員の加入時給与現価（単年度分）		(G^f_0)	144 〃
⑥年金資産の残高		(F)	1,000 〃
⑦給与総額		(ΣLB)	283 〃
⑧予定利率		(i)	5％
⑨15年償却の年金現価率		$\left(\ddot{a}_{\overline{15}|}\right)$	10.90

(1) 以下の財政方式におけるそれぞれの保険料率の算式と値を求めよ。

ア　加入年齢方式で過去勤務債務を15年償却とした場合の標準保険料率と特別保険料率

イ　開放基金方式で過去勤務債務を15年償却とした場合の標準保険料率と特別保険料率

ウ　総合保険料方式の初年度の保険料率

(2) 給付を一律2倍とした場合の(1)のそれぞれの保険料率を求めよ。ただし，給付改善の効果は，年金受給権者には及ばないものとする。

(3) (1)のアの結果にもとづき，1年間制度を運営した後に(2)の給付改善を行うこととした場合，加入年齢方式の保険料率はどうなるか。ただしその間の積立金の運用利率は年8％，給付改善後の過去勤務債務の償却年数は15年とする。

保険料率（年払い）は％表示で小数点以下第3位を四捨五入とし，途中計算に使用する保険料率は端数処理後の数値を使用すること。また算式を求める場合は，与えられた記号を使用すること。

4．極限状態にある開放型総合保険料方式を採用している年金制度があるものとする。

ある年度で剰余金Rを使い，保険料率の引き下げを行ったとした場合，次の設問に答えよ。

(1) $G^a+G^f=\dfrac{L}{d}$であることを証明せよ。

(2) 剰余金を使用しない場合と剰余金を使用する場合の制度の保険料の差を式で示せ。

(3) (2)と「R×予定割引率」の大小を比較せよ。

制度内容はTrowbridgeモデル（定年退職者に即時支給開始終身年金を支給）によるものとし，計算にあたって必要な場合，次の記号を使用すること。

〔記号〕

・G^a	：現在加入員の給与現価	・L	：現在加入員数
・G^f	：将来加入員の給与現価	・L_X	：X歳の現在加入員数
・S^a	：現在加入員の給付現価	・i	：予定利率
・S^f	：将来加入員の給付現価	・d	：予定割引率
・S^p	：年金受給者，待期者の給付現価	・l_X，D_X	：予定脱退率，予定死亡率，予定利率から計算した基数
・F	：年金資産額（剰余金を除く）		

5．極限状態にある次のような年金制度を考える。

保険料　：年度始に C が払い込まれるものとする。

給付　　：年度末に B が給付されるものとする。

積立金　：年度末給付支払い後の値を F とする。

予定利率：i とする。

このとき次の質問に答えよ。

(1) この制度の極限方程式を示せ。

(2) 積立金の水準を下げるため，ある年度以降この制度への保険料の払い込みをそれまでの$\frac{1}{2}$とした。積立金が$\frac{F}{2}$を下回るのは何年後か。

年金数理（解答例）

1.

問題番号	正　　解
(1)	(D)
(2)	(C)
(3)	(B)
(4)	(B)
(5)	(A)

正解は上記のとおりであるが，以下に解法を略記する。

(1)Trowbridgeの分類に従えば，賦課方式は第1類，退職時年金現価積立方式は第2類，単位積立方式・開放基金方式は第3類，総合保険料方式，到達年齢方式は第4類に属し，この順に従って積立水準が高くなる。

(2)題意よりn年間連続払確定年金の現価は，

$$\bar{a}_{\overline{n|}}=\int_0^n \alpha^t \cdot e^{-\delta t}dt$$

$$=\int_0^n e^{(\log\alpha-\delta)t}dt$$

$$=\left[\frac{1}{\log\alpha-\delta}e^{(\log\alpha-\delta)t}\right]_0^n$$

$$=\frac{1}{\log\alpha-\delta}\{e^{(\log\alpha-\delta)n}-1\}$$

$$=\frac{1}{\log\alpha-\delta}(\alpha^n\cdot v^n-1)$$

(3)題意より

$$\frac{dF_A(t)}{dt}=a+bt,\quad \frac{dF_B(t)}{dt}=g+ht$$

従って

$$F_A(t)=c+at+\frac{1}{2}bt^2$$

$$F_B(t)=c'+gt+\frac{1}{2}ht^2$$

$F_A(0)=F_B(0)$ より $c=c'$

$F_A(n)=F_B(n)$ と $c=c'$ より $an+\frac{1}{2}bn^2=gn+\frac{1}{2}hn^2$

従って $n=\frac{2(a-g)}{h-b}$

(4)初年度末の積立金は

（標準保険料＋特別保険料）×運用利率－給付×運用利率

＝(12＋８)×1.055－10×1.055

＝10.55

初年度末の責任準備金は

（初年度始の責任準備金）×予定利率＋（標準保険料－給付）×予定利率

＝100×1.055＋(12－10)×1.055

＝107.61

２倍に給付改善すると初年度末責任準備金は

107.61×２＝215.22

従って過去勤務債務額は

初年度末責任準備金－初年度末積立金

＝215.22－10.55

＝204.67

(5)求める A さんの年金現価は，現在年齢が50歳の加入者の55歳開始の５年間保証期間付の終身年金現価（年12回払い）である。この年金現価は，

$$\frac{D_{55}}{D_{50}}\ddot{a}_{\overline{5}|}^{(12)}+\frac{D_{60}}{D_{50}}\ddot{a}_{60}^{(12)}$$

となる。ここに $\ddot{a}_{60}^{(m)}\fallingdotseq\ddot{a}_{60}-\frac{m-1}{2m}=\frac{N_{60}}{D_{60}}-\frac{m-1}{2m}$ の近似式が成りたつ。

さらに $D_X=N_X-N_{X+1}$ に注意すると，

$$25{,}000\text{円}\times12\times\left\{\frac{D_{55}}{D_{50}}\ddot{a}_{\overline{5}|}^{(12)}+\frac{D_{60}}{D_{50}}\left(\ddot{a}_{60}-\frac{11}{24}\right)\right\}\fallingdotseq254.7\text{万円}$$

2.

問題番号	
①	$S_\tau{}^{(X)} \cdot e^{-\delta(\tau-t)}$
②	$P_\tau \cdot B_\tau{}^{(X)} e^{-\delta(\tau-t)}$
③	$\dfrac{l_{X+\tau} \cdot b_{X+\tau}}{l_{X+t} \cdot b_{X+t}} \cdot \mu_{X+\tau}$
④	$\dfrac{l_{X+\tau} \cdot b_{X+\tau}}{l_{X+t} \cdot b_{X+t}}$
⑤	$(\overline{S}_\tau^{(X)} \mu_{X+\tau} - P_\tau) \cdot l_{X+\tau} b_{X+\tau} e^{-\delta\tau}$
⑥	$P_\tau \cdot l_{X+\tau} \cdot b_{X+\tau} \cdot e^{\delta(t+\Delta t-\tau)}$
⑦	$e^{\delta\Delta t} - 1$
⑧	$\dfrac{b_{X+t+\Delta t}}{b_{X+t}} \cdot \dfrac{l_{X+t} - l_{X+t+\Delta t}}{l_{X+t}}$
⑨	$\overline{S}_\tau{}^{(X)} \mu_{X+\tau} \cdot l_{X+\tau} \cdot b_{X+\tau} e^{\delta(t+\Delta t-\tau)}$
⑩	$\delta + \mu_{X+t} - \lambda_{X+t}$

「年金数理」の教科書（P89～92）から出題。保険数学で有名なFacklerの公式を連続時間に拡張し，年金数理に適用した。

3.

(1)ア　標準保険料率　（算式）　S_n^f/G_n^f

（値）　6.8/144＝0.0472　　<u>4.72%</u>

特別保険料率　（算式）　$\{(S^p+S^a)-(S_n^f/G_n^f)\times G^a-F\}/(\sum LB\times \ddot{a}_{\overline{n|}})$

（値）　{(763＋823)－0.0472×3,063－1,000}/(283×10.90)

＝0.14310　　<u>14.31%</u>

イ　標準保険料率　（算式）　$(S^a_{F.S.}+S_n^f/i)/(G^a+G_n^f/i)$

（値）　(296＋6.8/0.05)/(3,063＋144/0.05)

＝0.07269　　<u>7.27%</u>

特別保険料率　（算式）　$(S^p+S^a_{P.S.}-F)/(\sum LB\times \ddot{a}_{\overline{n|}})$

（値）　(763＋527－1,000)/(283×10.90)

＝0.09401　　<u>9.40%</u>

ウ　保険料率　（算式）　$(S^p+S^a-F)/G^a$

（値）　(763＋823－1,000)/3,063

＝0.19132　　<u>19.13%</u>

(2)年金受給者以外の給付を一律２倍するのだから，(1)におけるS_n^f，$S^a_{F.S.}$，$S^a_{P.S.}$，S^aが２倍となることによりS_n^f＝13.6，$S^a_{F.S.}$＝592，$S^a_{P.S.}$＝1,054，S^a＝1,646として上記算式を適用する。

ア　標準保険料率　13.6/144＝0.0944　　9.44%

特別保険料率　{(763＋1,646)－0.0944×3,063－1,000}/(283×10.90)

＝0.36303　　36.30%

イ　標準保険料率　(592＋13.6/0.05)/(3,063＋144/0.05)

＝0.14538　　14.54%

特別保険料率　(763＋1,054－1,000)/(283×10.90)

＝0.26486　　26.49%

ウ　保険料率　(763＋1,646－1,000)/3,063

＝0.46001　　46.00%

(3)定常人口を仮定しているわけだから

$S^p+S^a+S^f_\infty/i=B/d$（Bは単年度の給付額，dは割引率）

$\therefore B=(763+823+136)/21$

$=82$

標準保険料　283×0.0472＝13.3576

特別保険料　283×0.1431＝40.4973

1年後の資産　(1,000＋13.3576＋40.4973－82)×1.08

＝1,049.6032

この資産を使用して上記算式にもとずいて保険料率を求める。

標準保険料率　13.6/144＝0.0944　　9.44%

特別保険料率　{(763+1,646)－0.0944×3,063－1,049.6032)/(283×10.90)

＝0.34695　　34.70%

なお(1)，(2)，(3)において端数処理による相異については，全て正解とした。

4.(1)題意より

$$L=\sum_{X=X_e}^{X_r-1}L_X,\quad L_X=\alpha l_X(\alpha>0)$$

$$G^a=\sum_{X=X_e}^{X_r-1}L_X\cdot\ddot{a}_{X:\overline{X_r-X}|}$$

$$G^f=\sum_{n=1}^{\infty}v^n\cdot L_{X_e}\cdot\ddot{a}_{X_e:\overline{X_r-X_e}|}$$

であるから

$$G^a+G^f=\sum_{X=X_e}^{X_r-1}L_X\frac{\sum_{Y=X}^{X_r-1}D_Y}{D_X}+\sum_{n=1}^{\infty}v^n\cdot L_{X_e}\frac{\sum_{X=X_e}^{X_r-1}D_X}{D_{X_e}}$$

$$=\alpha\sum_{X=X_e}^{X_r-1}\sum_{Y=X}^{X_r-1}l_Y v^{Y-X}+\alpha\cdot\frac{v}{d}\sum_{X=X_e}^{X_r-1}l_X v^{X-X_e}$$

ここで

$$\sum_{X=X_e}^{X_r-1}\sum_{Y=X}^{X_r-1}l_Y v^{Y-X}=\sum_{Y=X_e}^{X_r-1}\sum_{X=X_e}^{Y}l_Y v^{Y-X}$$

$$=\sum_{Y=X_e}^{X_r-1}l_Y\frac{1-v^{Y-X_e+1}}{d}$$

従って

$$G^a+G^f=\alpha\sum_{X=X_e}^{X_r-1}l_X\frac{1-v^{X-X_e+1}}{d}+\alpha\cdot\frac{v}{d}\sum_{X=X_e}^{X_r-1}l_X v^{X-X_e}$$

$$=\frac{\alpha}{d}\sum_{X=X_e}^{X_r-1}l_X$$

$$=\frac{L}{d}$$

よって証明された。

(2)　P　：剰余金を使用しない場合の保険料率

　P'：剰余金を使用する場合の保険料率

とすると，

$$P=\frac{S^a+S^f+S^p-F}{G^a+G^f}\qquad\cdots\cdots①$$

$$P'=\frac{S^a+S^f+S^p-F-R}{G^a+G^f}\qquad\cdots\cdots②$$

保険料率の差は①－②であるから

$$①-②=\frac{R}{G^a+G^f}$$

したがって，保険料の差は（(①－②)×L であるから$\dfrac{R\cdot L}{G^a+G^f}$

(3)　(1)を用いて(2)式を変形すると

$$\frac{RL}{G^a+G^f}=\frac{RL}{\frac{L}{d}}=dR$$

したがって，保険料の差は，R ×予定割引率と等しい。

5.(1) 年始での収支相等を考えると

$$C+F=v(B+F)$$

よって，この制度の極限方程式は

$$C+dF=vB$$

(2) 掛金が$\frac{1}{2}$となった後の第t年度末の積立金をF_tとすると

$$\frac{C}{2}+F_{t-1}=v(B+F_t) \qquad \cdots\cdots①$$

また，$F_0=F$であるから

$$C+F_0=v(B+F_0) \qquad \cdots\cdots②$$

①式より

$$\frac{C}{2}+F_0=v(B+F_1)$$

$$\frac{C}{2}v+vF_1=v^2(B+F_2)$$

$$\vdots$$

$$\frac{C}{2}v^{t-1}+v^{t-1}F_{t-1}=v^t(B+F_t)$$

上式の辺々を加え整理すると

$$\frac{C}{2}\ddot{a}_{\overline{t}|}+F_0=vB\ddot{a}_{\overline{t}|}+v^tF_t \qquad \cdots\cdots③$$

を得る。

同様にして②式より

$$C\cdot\ddot{a}_{\overline{t}|}+F_0=vB\ddot{a}_{\overline{t}|}+v^tF_0 \qquad \cdots\cdots④$$

を得る。

③$-$④$\times\frac{1}{2}$を求めると

$$\frac{F_0}{2}=\frac{B}{2}v\ddot{a}_{\overline{t}|}+v^t\left(F_t-\frac{F_0}{2}\right)$$

ここで$F_t<\frac{F_0}{2}$とすると

$$\frac{F_0}{2}<\frac{B}{2}v\ddot{a}_{\overline{t}|}$$

となるので，$F_0=F$に注意して$F<Bv\ddot{a}_{\overline{t}|}$を満たす最小の$t$が求めるものであるから，

これを t について解くと

$$t > \frac{1}{\delta} log \frac{C}{vB}$$

を得る。

故に積立金が$\frac{F}{2}$を下回るのは$\left[\frac{1}{\delta} log \frac{C}{vB} \right] + 1$年後となる。