保険数学２（問題）

１．次の（１）から（５）までについて、それぞれ五つの選択肢の中から正しいものを一つ選んで、所定の解答用紙にその記号（（A）から（E）のうちいずれか一つ。）を記入せよ。 （40点）

（１）$\ell_{x+1}=\ell_x-a_x-b_x$ で表わされる２重脱退表（a_x は原因Aによる脱退者数、b_x は原因Bによる脱退者数。）で、中央脱退率が、$m_x^A=\dfrac{2}{39}$ ，$m_x^B=\dfrac{2}{9}$ で与えられているとき、$q_x^A=\dfrac{a_x}{\ell_x}$ の値に最も近いものは次のうちどれか。

(A) 0.044　(B) 0.045　(C) 0.046　(D) 0.047　(E) 0.048

（２）x＋t歳における予定死亡率のみをc（c>0)だけ小さくして、$q'_{x+t}=q_{x+t}-c$、$q'_{x+s}=q_{x+s}$ （$s\neq t,\ s\geqq 0$）とするとき、変更後の予定死亡率で計算した終身年金現価$\ddot{a}'_x$ に等しいものは、次のうちどれか。

(A) $\ddot{a}_x+cv^t{}_tp_x\cdot\ddot{a}_{x+t}$　(B) $\ddot{a}_x+cv^t{}_tp_x\cdot\ddot{a}_{x+t+1}$　(C) $\ddot{a}_x+cv^t{}_{t+1}p_x\cdot\ddot{a}_{x+t+1}$

(D) $\ddot{a}_x+cv^{t+1}{}_tp_x\cdot\ddot{a}_{x+t}$　(E) $\ddot{a}_x+cv^{t+1}{}_tp_x\cdot\ddot{a}_{x+t+1}$

（３）30歳加入、保険期間30年、保険料は年払で全期払込の養老保険（保険金期末払、保険金額100 万円）において、経過10年の時点で保険期間のみを変更する。変更後の契約は、契約当初から20年の保険期間であったものとし、以後の保険料も変更後のものに改める。この場合、変更時に契約者より受領すべき一時金に最も近いものは次のうちどれか。但し、受領すべき金額は変更前後の純保険料式責任準備金の差額とする。また計算基数は、$D_{30}=19622$ 、$D_{40}=11354$ 、$N_{30}=336587$、$N_{40}=181183$、$N_{50}=91719$ および$N_{60}=41527$ で与えられるものとする。

(A) 16.9万円　(B) 17.8万円　(C) 18.7万円　(D) 19.6万円　(E) 20.5万円

（４）(x)が(y)に先立って死亡すればそれぞれの死亡時の年度末に保険金0.5 ずつ支払い、(y)が(x)に先立って死亡すれば(x)の死亡時の年度末に保険金１を支払う保険の一時払純保険料を表わすものとして、次の①から⑤が与えられているという。

①$A_{\overset{2}{x}y}+0.5(A_{\overset{1}{x}y}+A_{x\overset{2}{y}})$　②$A_{x\overset{1}{y}}+0.5(A_{\overset{1}{x}y}+A_{x\overset{2}{y}})$　③$A_{xy}+0.5(A_{\overset{1}{x}y}+A_{x\overset{2}{y}})$

④$A_x+0.5(A_y-A_{xy})$　⑤$A_{xy}+0.5(A_x+A_y)$

この①から⑤のうちで正しいものは二つあるが、それらは次のうちどれか。

(A) ①と④　(B) ①と⑤　(C) ②と④　(D) ②と⑤　(E) ③と④

（５）(x)と(y)は同一の生命表 $\{\ell_z;\ell_z=\ell_0\cdot(1-\frac{z}{\omega}),\ 0\leqq z\leqq\omega\}$ に属するものとする。$\omega>x>y$のとき、(x)と(y)について今後(x)が(y)に先立ち死亡する確率は次のうちどれか。

(A) $\dfrac{x-2y+\omega}{2\cdot(\omega-y)}$　(B) $\dfrac{\omega-y}{2\cdot(\omega-x)}$　(C) $\dfrac{\omega-x}{2\cdot(\omega-y)}$　(D) $\dfrac{y-2x+\omega}{2\cdot(\omega-x)}$　(E) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{x-y}{\omega}$

２．養老保険（保険金期末払、保険金１）の全期チルメル式責任準備金 ${}_tV^z_{x:\overline{n}|}$ について、次の問に答えよ。 （20点）

（１）${}_1V^z_{x:\overline{n}|}=0$ となるようなチルメル割合αを求めよ。

（２）$q_x=q_{x+1}=q_{x+2}=\cdots\cdots=q_{x+k-1}$ （$2\leqq k\leqq n$）のとき、（１）で求めたαに対しては、

$${}_kV^z_{x:\overline{n}|}=\frac{\alpha}{P_{x+1:\overset{1}{\overline{k-1}|}}}$$

であることを証明せよ。

３．子供ｘ歳・親ｙ歳加入、保険期間ｎ年、保険料全期払込、死亡保険金即時払で、次の①から③の給付を行う親子連生保険を考える。

①子供が死亡した場合には、死亡保険金としてその死亡時までの既払込年払純保険料相当額（③で親の死亡の場合に払込を免除された年払純保険料部分を含む。）を支払い、契約は消滅する。

②子供が契約日からｍ年後（ｍ＜ｎ）まで生存した場合には、生存祝金 0.3Ｓを支払い、更に満期時まで生存した場合には、満期保険金Ｓを支払う。

③親が死亡した場合には、死亡保険金Ｓを支払い、その後の保険料の払込を免除する。更に、親の死亡時以後の毎保険料払込応当日の子供の生存を条件として、契約日からｍ－１年後の応当日までは年金年額 0.6Ｓ、契約日からｍ年後の応当日からは年金年額Ｓとする年金を支払う。

この保険について、次の問に答えよ。但し、予定死亡率は親子とも同一の生命表によるものとし、付加保険料は考慮しないものとする。（20点）

（１）年払純保険料を求めよ。

（２）純保険料式責任準備金を求めよ。

４．ある団体の構成員は、原因C_1およびC_2により団体から脱退していくものとする。この団体に所属するｘ歳の人がｘ＋ｔ歳になるまでに原因C_j（$j=1,2$）によって脱退する確率を${}_tq_x^{(j)}$とし、ｘ＋ｓ歳($0\leqq s\leqq t$)における原因C_jによる脱退力を$\mu_{x+s}^{(j)}$とする。

このとき、次の問に答えよ。（20点）

（１） ${}_tq_x^{(1)}$を、$\mu^{(1)}$および$\mu^{(2)}$を用いて表わせ。

（２） ${}_tq_x^{(1)}$および${}_tq_x^{(2)}$がｔ($0\leqq t\leqq 1$)についての一次式であるとするとき、

$$p_x'^{(1)}=(1-q_x^{(\tau)})^{\frac{q_x^{(1)}}{q_x^{(\tau)}}}$$

が成り立つことを示せ。但し、$p_x'^{(1)}=\exp(-\int_0^1\mu_{x+t}^{(1)}dt)$、$q_x^{(j)}={}_1q_x^{(j)}$、$q_x^{(\tau)}=q_x^{(1)}+q_x^{(2)}$とする。

（３）$q_x'^{(j)}=1-p_x'^{(j)}$とすると、（２）より、近似式

$$q_x'^{(1)}\fallingdotseq q_x^{(1)}\cdot\left(1+\frac{1}{2}q_x^{(2)}\right)$$

が成り立つことを示せ。

（注）本問の一部の設問にミスプリントがあり、それを訂正の上で問題を掲載した。なお実際の採点に当っては、ミスプリントに関係のない設問の配点を多くする等、受験生に不利な取扱いとならないよう配慮した。

保険数学２（解答例）

１．(1) 中央脱退率の定義より

$$m_x^A=\frac{a_x}{\frac{1}{2}(l_x+l_{x+1})}=\frac{a_x}{lx-\frac{1}{2}(a_x+b_x)}=\frac{q_x^A}{1-\frac{1}{2}(q_x^A+q_x^B)}\quad\left(\text{ここに}q_x^A=\frac{a_x}{l_x},\ q_x^B=\frac{b_x}{l_x}\right)$$

同様に

$$m_x^B=\frac{q_x^B}{1-\frac{1}{2}(q_x^A+q_x^B)}\text{であるから}\quad q_x^A=\frac{2m_x^A}{2+m_x^A+m_x^B}=0.04511\cdots=(B)$$

(2)
$$\ddot{a}_x'=1+vp_x'+\cdots\cdots+v^tp_x'\cdots\cdots p_{x+t-1}'+v^{t+1}p_x'\cdots\cdots p_{x+t}'+\cdots\cdots$$
$$=1+vp_x+\cdots\cdots+v^tp_x\cdots\cdots p_{x+t-1}+v^{t+1}p_x\cdots\cdots p_{x+t-1}(p_{x+t}+c)$$
$$+v^{t+2}p_x\cdots\cdots p_{x+t-1}(p_{x+t}+c)p_{x+t+1}+\cdots\cdots$$
$$(\because p_{x+t}'=p_{x+t}+c,\ p_{x+s}'=p_{x+s})$$
$$=\ddot{a}_x+cv^{t+1}\cdot{}_tp_x\cdot(1+vp_{x+t+1}+v^2p_{x+t+1}\cdot p_{x+t+2}+\cdots\cdots)$$
$$=\ddot{a}_x+cv^{t+1}\cdot{}_tp_x\cdot\ddot{a}_{x+t+1}=(E)$$

(3) ${}_tV_{x:\overline{n|}}=1-\dfrac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$より

$${}_{10}V_{30:\overline{20|}}-{}_{10}V_{30:\overline{30|}}=\left(1-\frac{\ddot{a}_{40:\overline{10|}}}{\ddot{a}_{30:\overline{20|}}}\right)-\left(1-\frac{\ddot{a}_{40:\overline{20|}}}{\ddot{a}_{30:\overline{30|}}}\right)$$

$$=\frac{(N_{40}-N_{60})/D_{40}}{(N_{30}-N_{60})/D_{30}}-\frac{(N_{40}-N_{50})/D_{40}}{(N_{30}-N_{50})/D_{30}}=0.18657=(C)$$

(4) 題意より

$A_{xy}^{2}+0.5(A_{xy}^{1}+A_{xy}^{2})$ （①が正しい）

$=(A_x-A_{xy}^{1})+0.5\{A_{xy}^{1}+(A_y-A_{xy}^{1})\}$

$=A_x+0.5A_y-0.5(A_{xy}^{1}+A_{xy}^{2})$

$=A_x+0.5(A_y-A_{xy})$ （④が正しい） (A)

(5)
$$\mu_{x+t}=-\frac{1}{l_{x+t}}\frac{dl_{x+t}}{dt}=\frac{1}{-l_0\left(1-\frac{x+t}{w}\right)}\cdot\left(-\frac{l_0}{w}\right)=\frac{1}{w-x-t}$$

$$\therefore {}_tp_{xy}\mu_{x+t}={}_tp_x\,{}_tp_y\,\mu_{x+t}=\frac{l_0\left(1-\frac{x+t}{w}\right)}{l_0\left(1-\frac{t}{w}\right)}\cdot\frac{l_0\left(1-\frac{y+t}{w}\right)}{l_0\left(1-\frac{y}{w}\right)}\cdot\frac{1}{w-x-t}$$

$$=\frac{w-y-t}{(w-x)(w-y)}$$

したがって

$$ {}_{w-x}q^{\ 1}_{xy} = \int_0^{w-x} {}_tp_{xy}\cdot \mu_{x+t}dt $$

$$ = \int_0^{w-x} \frac{w-y-t}{(w-x)(w-y)}dt $$

$$ = \frac{x-2y+w}{2(w-y)} = (A) $$

2．(1)　初年度純保険料をP_1，次年度以降をP_2とすれば全期チルメルであるから

$$ P_2 = P_1 + \alpha $$

また

$$ P_{x:\overline{n}|}\cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = P_1 + P_2(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1) $$

が成立する。これより

$$ P_2 = P_{x:\overline{n}|} + \alpha/\ddot{a}_{x:\overline{n}|} $$

従って$t \geqq 1$のとき

$$ {}_tV^z_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - (P_{x:\overline{n}|} + \alpha/\ddot{a}_{x:\overline{n}|})\cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} $$

今，${}_1V^z_{x:\overline{n}|} = 0$より

$$ A_{x+1:\overline{n-1}|} = (P_{x:\overline{n}|} + \alpha/\ddot{a}_{x:\overline{n}|})\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} $$

$$ \therefore \alpha = (P_{x+1:\overline{n-1}|} - P_{x:\overline{n}|})\cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} $$

(2)　(1)で定めたαに対しては，

$$ P_2 = P_{x:\overline{n}|} + (P_{x+1:\overline{n-1}|} - P_{x:\overline{n}|}) = P_{x+1:\overline{n-1}|} $$

$$ P_1 = P_{x+1:\overline{n-1}|} - (P_{x+1:\overline{n-1}|} - P_{x:\overline{n}|})\ddot{a}_{x:\overline{n}|} $$

$$ = A_{x:\overline{n}|} - P_{x+1:\overline{n-1}|}\cdot(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1) $$

$$ = (vq_x + vp_x\cdot A_{x+1:\overline{n-1}|}) - vp_xA_{x+1:\overline{n-1}|} $$

$$ = vq_x $$

を得る。

$t \geqq 2$に対し，責任準備金の再帰公式は

$$ {}_{t-1}V^z_{x:\overline{n}|} + P_2 = vq_{x+t-1} + vp_{x+t-1}\cdot {}_tV^z_{x:\overline{n}|} $$

ここで$t \leqq k$のときは仮定から

$$ vq_{x+t-1} = vq_x = P_1 $$

故に，$2 \leqq t \leqq k$に対し

$$ {}_{t-1}V^z_{x:\overline{n}|} = P_1 - P_2 + vp_{x+t-1}\cdot {}_tV^z_{x:\overline{n}|} $$

$$ = -\alpha + vp_{x+t-1}\cdot {}_tV^z_{x:\overline{n}|} $$

両辺にD_{x+t-1}を乗じて整理すると

$$D_{x+t-1}({}_{t-1}V^{z}_{x:\overline{n}|}+\alpha)=D_{x+t}\cdot{}_{t}V^{z}_{x:\overline{n}|}$$

この式に $t=2$，3，…，k まで代入し辺々加えれば

$$D_{x+1}({}_{1}V^{z}_{x:\overline{n}|}+\alpha)=D_{x+2}\cdot{}_{2}V^{z}_{x:\overline{n}|}$$

$$D_{x+2}({}_{2}V^{z}_{x:\overline{n}|}+\alpha)=D_{x+3}\cdot{}_{3}V^{z}_{x:\overline{n}|}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$+)\;D_{x+k-1}({}_{k-1}V^{z}_{x:\overline{n}|}+\alpha)=D_{x+k}\cdot{}_{k}V^{z}_{x:\overline{n}|}$$

$$D_{x+1}\cdot{}_{1}V^{z}_{x:\overline{n}|}+\alpha(N_{x+1}-N_{x+k})=D_{x+k}\cdot{}_{k}V^{z}_{x:\overline{n}|}$$

ここで ${}_{1}V^{z}_{x:\overline{n}|}=0$ より

$$ {}_{k}V^{z}_{x:\overline{n}|}=\alpha/P_{x+1:\overline{k-1}|}^{\;\;\;\;1}$$

以上

3．(1) 求める年払純保険料を P とすると，

収入の現価は条件①，③より $P\cdot\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}$ ……＊

次に支出の現価を考える。

①の給付現価$=P\cdot\dfrac{\bar{R}_x-\bar{R}_{x+n}-n\cdot\bar{M}_{x+n}}{D_x}=P\cdot(I\bar{A})^{\,1}_{x:\overline{n}|}$ ……①

②の給付現価$=0.3S\cdot A_{x:\overline{m}|}^{\;\;\;\;1}+S\cdot A_{x:\overline{n}|}^{\;\;\;\;1}$ ……②

$$③の給付現価=S\cdot\bar{A}^{\;\;\;1}_{xy:\overline{n}|}+0.6S\cdot\sum_{t=1}^{m-1}v^{t}{}_{t}p_x\cdot{}_{t}q_y+S\cdot\sum_{t=m}^{n-1}v^{t}{}_{t}p_x\cdot{}_{t}q_y$$

$$=S\cdot\bar{A}^{\;\;\;1}_{xy:\overline{n}|}+S\cdot\sum_{t=1}^{n-1}v^{t}{}_{t}p_x\cdot{}_{t}q_y-0.4S\cdot\sum_{t=1}^{m-1}v^{t}{}_{t}p_x\cdot{}_{t}q_y$$

$$=S\cdot\bar{A}^{\;\;\;1}_{xy:\overline{n}|}+S\cdot(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-\ddot{a}_{xy:\overline{n}|})-0.4S\cdot(\ddot{a}_{x:\overline{m}|}-\ddot{a}_{xy:\overline{m}|})\quad……③$$

収支相等の原則より＊＝①＋②＋③と置いて P について整理すると，

$$p=\frac{0.3S\cdot A_{x:\overline{m}|}^{\;\;\;\;1}+S\cdot A_{x:\overline{n}|}^{\;\;\;\;1}+S\cdot\bar{A}^{\;\;\;1}_{xy:\overline{n}|}+S\cdot(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-\ddot{a}_{xy:\overline{n}|})-0.4S(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-\ddot{a}_{xy:\overline{m}|})}{\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}-(I\bar{A})^{\,1}_{x:\overline{n}|}}$$

(2) 純保険料式責任準備金を V とし，将来法により求める。

ア）子生存，親生存の場合（保険料払込中）

(i) $0\leqq t\leqq m$ のとき

$$ {}_{t}V=\{p\cdot(t\cdot\bar{A}^{\,1}_{x+t:\overline{n-t}|}+(I\bar{A})^{\,1}_{x+t:\overline{n-t}|})+0.3S\cdot A_{x+t:\overline{m-t}|}^{\;\;\;\;\;\;\;1}$$

$$+S\cdot A_{x+t:\overline{n-t}|}^{\;\;\;\;\;\;\;1}+S\cdot\bar{A}^{\;\;\;\;\;\;\;1}_{x+t,y+t:\overline{n-t}|}+S\cdot(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}-\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t}|})$$

$$-0.4S\cdot(\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}-\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{m-t}|})\}-P\cdot\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t}|}$$

(ii) $m<t\leqq n$ のとき

$$ {}_{t}V=\{P\cdot(t\cdot\bar{A}^{\,1}_{x+t:\overline{n-t}|}+(I\bar{A})^{\,1}_{x+t:\overline{n-t}|})+S\cdot A_{x+t:\overline{n-t}|}^{\;\;\;\;\;\;\;1}$$

$$+S\cdot\bar{A}^{\;\;\;\;\;\;\;1}_{x+t,y+t:\overline{n-t}|}+S\cdot(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}-\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t}|})\}-P\cdot\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t}|}$$

イ）子生存，親死亡の場合（保険料払込免除後）

(i) $0 \leqq t \leqq m$ のとき

$$ {}_tV = P \cdot (t \cdot \bar{A}^{\ 1}_{x+t:\overline{n-t}|} + (I\bar{A})^{\ 1}_{x+t:\overline{n-t}|}) + 0.3S \cdot A_{x+t:\overline{m-t}|}^{\ \ \ \ 1} $$

$$ + S \cdot A_{x+t:\overline{n-t}|}^{\ \ \ \ 1} + S \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - 0.4S \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} $$

(ii) $m < t \leqq n$ のとき.

$$ {}_tV = P \cdot (t \cdot \bar{A}^{\ 1}_{x+t:\overline{n-t}|} + (I\bar{A})^{\ 1}_{x+t:\overline{n-t}|}) + S \cdot A_{x+t:\overline{n-t}|}^{\ \ \ \ 1} + S \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} $$

ウ）子死亡の場合（契約消滅）

$$ {}_tV = 0 $$

以上

4．　この団体に所属する x 歳の人が，t 年後に残存する確率を ${}_tp_x^{(T)}$，t 年間に脱退する確率を ${}_tq_x^{(T)}$ とすると，

$$ {}_tp_x^{(T)} = 1 - {}_tq_x^{(T)} $$

$$ {}_tq_x^{(T)} = \sum_{j=1}^{2} {}_tq_x^{(j)} $$

(1)

$$ {}_tq_x^{(1)} = \int_0^t {}_sp_x^{(T)} \cdot \mu_{x+s}^{(1)} \mathrm{ds} \qquad \cdots\cdots ① $$

$$ {}_sp_x^{(T)} = \exp \cdot \left\{ - \int_0^S (\mu_{x+\tau}^{(1)} + \mu_{x+\tau}^{(2)}) d\tau \right\} $$

であるから

$$ {}_tq_x^{(1)} = \int_0^t \exp\left\{ - \int_0^S (\mu_{x+\tau}^{(1)} + \mu_{x+\tau}^{(2)}) d\tau \right\} \cdot \mu_{x+s}^{(1)} \cdot ds $$

(2)　題意より

${}_tq_x^{(j)} = t \cdot a_j + b_j$　(a_j，b_j は定数，$j=1,2$）とかける。

${}_0q_x^{(j)} = 0$，${}_1q_x^{(j)} = q_x^{(j)}$ であるから，

$a_j = q_x^{(j)}$，$b_j = 0$　となり

$$ {}_tq_x^{(i)} = t \cdot q_x^{(i)} \qquad \cdots\cdots ② $$

従って，

$$ {}_tq_x^{(T)} = \sum_{j=1}^{2} {}_tq_x^{(j)} = \sum_{j=1}^{2} t \cdot q_x^{(j)} = t \cdot q_x^{(T)} \qquad \cdots\cdots ③ $$

一方①の両辺を t で微分すると，

$$ \frac{d}{dt}\left({}_tq_x^{(1)} \right) = {}_tp_x^{(T)} \cdot \mu_{x+t}^{(1)} $$

また②より

$$\frac{d}{dt}({}_tq_x^{(1)})={}_tq_x^{(1)}$$ だから

$${}_tq_x^{(1)}={}_tp_x^{(T)}\cdot\mu_{x+t}^{(1)}$$

これと③により

$$\mu_{x+t}^{(1)}=\frac{q_x^{(1)}}{{}_tP_x^{(T)}}=\frac{q_x^{(1)}}{1-{}_tq_x^{(T)}}=\frac{q_x^{(1)}}{1-t\cdot q_x^{(T)}}$$

従って，

$$p'{}_x^{(1)}=\exp\left(-\int_0^1\mu_{x+t}^{(1)}\mathrm{dt}\right)$$

$$=\exp\left(-\int_0^1\frac{q_x^{(1)}}{1-t\cdot q_x^{(T)}}dt\right)$$

$$=\exp\left\{\frac{q_x^{(1)}}{q_x^{(T)}}\cdot[\log(1-t\cdot q_x^{(T)})]_0^1\right\}$$

$$=\exp\left\{\frac{q_x^{(1)}}{q_x^{(T)}}\cdot log(1-q_x^{(T)})\right\}$$

$$=(1-q_x^{(T)})^{\frac{q_x^{(1)}}{q_x^{(T)}}}$$

(3)　$x=0$の近傍におけるテーラー展開による近似式

$$(1-x)^{\alpha}\fallingdotseq 1-\alpha x+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)\cdot x^2$$

を(2)の結果に適用すると，

$$P'{}_x^{(1)}\fallingdotseq 1-\frac{q_x^{(1)}}{q_x^{(T)}}\cdot q_x^{(T)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{q_x^{(1)}}{q_x^{(T)}}\cdot\left(\frac{q_x^{(1)}}{q_x^{(T)}}-1\right)\cdot(q_x^{(T)})^2$$

$$=1-q_x^{(1)}+\frac{1}{2}\cdot q_x^{(1)}(q_x^{(1)}-q_x^{(T)})$$

$$=1-q_x^{(1)}-\frac{1}{2}\cdot q_x^{(1)}\cdot q_x^{(2)}$$

$$=1-q_x^{(1)}\left(1+\frac{1}{2}q_x^{(2)}\right)$$

よって，

$$q'{}_x^{(1)}=1-p'{}_x^{(1)}=q_x^{(1)}\left(1+\frac{1}{2}q_x^{(2)}\right)$$

以上