数学（問題）

問題１から問題５を通じ、必要であれば「付表」に記載された数値を用いなさい。

「付表」には、以下の付表が掲載されている。

・付表Ⅰ.「標準正規分布表（上側 ε 点 $u(\varepsilon)$ から確率 ε を求める表）」
「標準正規分布表（確率 ε から上側 ε 点 $u(\varepsilon)$ を求める表）」
・付表Ⅱ.「自由度 φ の χ^2 分布の上側 ε 点：$\chi_\varphi^2(\varepsilon)$」
・付表Ⅲ.「分母の自由度 n 、分子の自由度 m の F 分布の上側 ε 点：$F_n^m(\varepsilon)$」
・付表Ⅳ.「自由度 φ の t 分布の上側 ε 点：$t_\varphi(\varepsilon)$」
・付表Ⅴ.「自然対数表」
・付表Ⅵ.「指数関数表」

問題１． 次の（１）～（６）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。　各５点（計３０点）

（１）ＡとＢの２人がじゃんけんを繰り返し行う。各じゃんけんにおいて、ＡとＢはそれぞれ以下のルールに従って無作為に手を出すものとする。

・ルール１：最初の１回は、ＡもＢもグー、チョキ、パーから無作為に手を出す。
・ルール２：Ａは、前回と連続して同じ手は出さない。
・ルール３：Ｂは、負けた直後のじゃんけんでは前回と連続して同じ手は出さない。

このとき、2 回目のじゃんけんでＡが勝つ確率は $\boxed{\quad ① \quad}$ であり、n $(n=1,2,\cdots)$ 回目のじゃんけんでＢが勝つ確率は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。なお、各じゃんけんにおいて、ＡとＢは互いに相手の手の出し方を考慮せずに手を出すものとし、あいこの場合も１回と数えることとする。

［①の選択肢］

（Ａ）$\dfrac{1}{4}$　（Ｂ）$\dfrac{5}{18}$　（Ｃ）$\dfrac{11}{36}$　（Ｄ）$\dfrac{1}{3}$

（Ｅ）$\dfrac{13}{36}$　（Ｆ）$\dfrac{7}{18}$　（Ｇ）$\dfrac{5}{12}$　（Ｈ）$\dfrac{4}{9}$

［②の選択肢］

（Ａ）$\dfrac{1}{9}+\dfrac{8}{27}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$　（Ｂ）$\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$　（Ｃ）$\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$　（Ｄ）$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

（Ｅ）$\dfrac{5}{18}+\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$　（Ｆ）$\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$　（Ｇ）$\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$　（Ｈ）$\dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$

（Ｉ）$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$　（Ｊ）$\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

（2）表の出る確率が $p\,(0<p<1)$、裏の出る確率が $1-p$ であるコインを、A、B、Cのうち2人または 3 人が順番に、それぞれ初めて表が出るまで互いに独立に投げるゲームを考える。A、B、Cに初めて表が出るまでコインを投げた回数を表す確率変数を、それぞれ $X_A,\ X_B,\ X_C$ とする。
まず、AとBにそれぞれ初めて表が出るまでコインを投げるとき、2 人のコインを投げた回数の合計が $k\ (\,k=2,3,\cdots)$ である確率 $P(X_A+X_B=k)$ は $\boxed{\quad ③\quad}$ である。
次に、A、B、Cにそれぞれ初めて表が出るまでコインを投げるとき、3 人のコインを投げた回数の合計が $k\ (\,k=3,4,\cdots)$ である確率 $P(X_A+X_B+X_C=k)$ は $\boxed{\quad ④\quad}$ であり、3 人のコインを投げた回数の合計が k であるという条件の下、Aに初めて表が出るまでコインを投げた回数が $j\ (\,j=1,2,\cdots,k-2)$ である条件付き確率 $P(X_A=j\,|\,X_A+X_B+X_C=k)$ は $\boxed{\quad ⑤\quad}$ である。

［③の選択肢］

（A） $(k+1)p^2(1-p)^k$　（B） $(k+1)p^2(1-p)^{k-2}$　（C） $kp^2(1-p)^k$

（D） $kp^2(1-p)^{k-2}$　（E） $(k-1)p^2(1-p)^k$　（F） $(k-1)p^2(1-p)^{k-2}$

（G） $(2k-3)p^2(1-p)^k$　（H） $(2k-3)p^2(1-p)^{k-2}$

［④の選択肢］

（A） $(k-1)p^3(1-p)^k$　（B） $(k-1)p^3(1-p)^{k-3}$　（C） $(k-2)p^3(1-p)^k$

（D） $(k-2)p^3(1-p)^{k-3}$　（E） $\frac{k-1}{2}p^3(1-p)^k$　（F） $\frac{k-1}{2}p^3(1-p)^{k-3}$

（G） $\frac{(k-1)(k-2)}{2}p^3(1-p)^k$　（H） $\frac{(k-1)(k-2)}{2}p^3(1-p)^{k-3}$

（I） $\frac{k(k-1)(k-2)}{6}p^3(1-p)^k$　（J） $\frac{k(k-1)(k-2)}{6}p^3(1-p)^{k-3}$

［⑤の選択肢］

（A） $\frac{k-j-1}{k-2}$　（B） $\frac{k-j}{2(k-2)}$　（C） $\frac{2(k-j-1)}{k-1}$

（D） $\frac{k-j}{k-1}$　（E） $\frac{k-j-1}{(k-1)(k-2)}$　（F） $\frac{k-j}{(k-1)(k-2)}$

（G） $\frac{2(k-j-1)}{(k-1)(k-2)}$　（H） $\frac{6(k-j-1)}{(k-1)(k-2)}$　（I） $\frac{6(k-j-1)}{k(k-1)(k-2)}$

（J） $\frac{3(k-j)}{k(k-1)(k-2)}$

（3）当たりくじ 3 本を含む $n\ (n \geq 3)$ 本のくじが入っている箱から、1 本だけくじを引くという試行を考える。この試行を n 回繰り返したとき、当たりくじを引いた回数を表す確率変数を X とする。なお、各試行は互いに独立であるものとし、各試行において引いたくじは元の箱に戻すものとする。X の積率母関数を $\phi_n(\theta)$ とすると、$\phi_n(\theta)$ は $\boxed{\quad ⑥ \quad}$ であり、$\phi_n(\theta)$ について $n \to \infty$ として極限をとったときの X の積率母関数を $\phi(\theta) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(\theta)$ とすると、$\phi(\theta)$ は $\boxed{\quad ⑦ \quad}$ である。いま、$n = 1{,}000$ とする。n が十分大きく、当たりくじを引く確率が十分小さいとき、X の積率母関数が $\boxed{\quad ⑦ \quad}$ となることを用いると、$X = 2$ である確率に最も近い数値は $\boxed{\quad ⑧ \quad}$ である。

［⑥の選択肢］

（A） $\left(\frac{3}{n}e^{\theta} + 1\right)^n$　（B） $\left\{\frac{3}{n}e^{\theta} + \left(1 - \frac{3}{n}\right)\right\}^n$　（C） $\left(\frac{1}{3n}e^{\theta} + 1\right)^n$

（D） $\left\{\frac{1}{3n}e^{\theta} + \left(1 - \frac{1}{3n}\right)\right\}^n$　（E） $e^{n\theta}$　（F） $\exp\left[\left(\frac{3}{n}\theta + 1\right)^n\right]$

（G） $\exp\left[\left\{\frac{3}{n}\theta + \left(1 - \frac{3}{n}\right)\right\}^n\right]$　（H） $\exp\left[\left(\frac{1}{3n}\theta + 1\right)^n\right]$　（I） $\exp\left[\left\{\frac{1}{3n}\theta + \left(1 - \frac{1}{3n}\right)\right\}^n\right]$

（J） $\exp\left[e^{n\theta}\right]$

［⑦の選択肢］

（A） 0　（B） $+\infty$　（C） $\exp\left[3e^{\theta}\right]$

（D） $\exp\left[3\left(e^{\theta} - 1\right)\right]$　（E） $\exp\left[\frac{1}{3}e^{\theta}\right]$　（F） $\exp\left[\frac{1}{3}\left(e^{\theta} - 1\right)\right]$

（G） $\left(1 - 3e^{\theta}\right)^{-1}$　（H） $\left\{1 - 3\left(e^{\theta} - 1\right)\right\}^{-1}$　（I） $\left(1 - \frac{e^{\theta}}{3}\right)^{-1}$

（J） $\left\{1 - \frac{1}{3}\left(e^{\theta} - 1\right)\right\}^{-1}$

［⑧の選択肢］

（A） 0.020　（B） 0.040　（C） 0.060　（D） 0.164　（E） 0.180

（F） 0.194　（G） 0.206　（H） 0.214　（I） 0.220　（J） 0.224

（4）1,000 ポイントの得点からスタートして勝った場合には得点が 50%上昇し、負けた場合は得点が 30%減少するゲームを繰り返し行う。各ゲームに勝つ確率は 70%、負ける確率は 30%であり、各ゲームの勝敗は互いに独立であるとする。

20 回ゲームを行った後、得点が 1,000,000 ポイント以上となる確率に最も近い数値は $\boxed{\quad ⑨ \quad}$ である。また、$n\,(n = 1,2,3,\cdots)$ 回ゲームを行った後、得点が 1,000,000 ポイント以上となる確率が 95% 以上となるために必要な最小のゲーム回数 n は $\boxed{\quad ⑩ \quad}$ である。

ただし、ゲーム回数は十分大きいものとして、中心極限定理を利用した近似により確率を計算することとする。また、⑩を求める際に計算過程の中で小数を扱う場合には、小数点以下第 5 位を四捨五入して小数点以下第 4 位までの小数を用いることとする。

［⑨の選択肢］

（A） 0.007　（B） 0.019　（C） 0.031　（D） 0.044　（E） 0.056

（F） 0.068　（G） 0.080　（H） 0.093　（I） 0.105　（J） 0.117

［⑩の選択肢］

（A） 24　（B） 30　（C） 36　（D） 42　（E） 48

（F） 54　（G） 60　（H） 66　（I） 72　（J） 78

（５）未知の母数 θ を含む以下の確率密度関数 $f(x;\theta)$ を考える。

$$f(x;\theta)=\frac{1}{6}\exp\left(-\left|\frac{x}{3}-\theta\right|\right)\qquad(-\infty<x<\infty)$$

いま、この分布を母集団分布とする母集団から標本 X_1、X_2 を抽出した。

・統計量 S は、定数 α を用いて $\alpha X_1+\frac{1}{4}X_2$ の形で表される θ の不偏推定量である。このとき、$\alpha=$ $\boxed{⑪}$ である。

・統計量 T は、定数 β_1 、β_2 を用いて $\beta_1X_1+\beta_2X_2$ の形で表される θ の不偏推定量のうち最も有効な推定量である。このとき、$\beta_1=$ $\boxed{⑫}$、$\beta_2=$ $\boxed{⑬}$ である。

［⑪の選択肢］

（A） $-\frac{7}{12}$　（B） $-\frac{5}{12}$　（C） $-\frac{1}{4}$　（D） $-\frac{1}{12}$

（E） $\frac{1}{12}$　（F） $\frac{1}{4}$　（G） $\frac{5}{12}$　（H） $\frac{7}{12}$

［⑫、⑬の選択肢］

（A） $-\frac{2}{3}$　（B） $-\frac{1}{2}$　（C） $-\frac{1}{3}$　（D） $-\frac{1}{6}$

（E） $\frac{1}{6}$　（F） $\frac{1}{3}$　（G） $\frac{1}{2}$　（H） $\frac{2}{3}$

（６）標本変量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の分布が区間 $[0,2\theta]$ 上の一様分布 $U(0,2\theta)$ に従うとき、母平均 θ を信頼係数 α で区間推定することを以下の手順で実施する。（$\theta > 0$ とする。）

＜手順＞

適当な統計量 $T(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$ に対して、

$$P(\theta'_{\mathrm{L}} < T(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < \theta'_{\mathrm{U}}) = \alpha$$

となるような、$\theta'_{\mathrm{L}}, \theta'_{\mathrm{U}}$ を定める。

これを、θ について解き、

$$P\left(\hat{\theta}_{\mathrm{L}}(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_{\mathrm{U}}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\right) = \alpha$$

と変形した場合、$\hat{\theta}_{\mathrm{L}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が信頼区間の下限、$\hat{\theta}_{\mathrm{U}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が信頼区間の上限である。

なお、$x_i\ (i = 1,2, \cdots, n)$ は $X_i\ (i = 1,2, \cdots, n)$ の実現値である。

いま、統計量 $T(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$ を母平均 θ の最尤推定量とする。実現値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が、

1.2　0.6　0.9　1.3　1.0　1.1　0.8　0.7

であるとき、θ の最尤推定値に最も近い数値は $\boxed{\quad ⑭ \quad}$ である。

また、信頼係数 α が 0.95、$\theta'_{\mathrm{U}} = \theta$ であるとき、母平均 θ の信頼区間の下限に最も近い数値は $\boxed{\quad ⑮ \quad}$ であり、信頼区間の上限に最も近い数値は $\boxed{\quad ⑯ \quad}$ である。

［⑭～⑯の選択肢］

（Ａ） 0.25	（Ｂ） 0.27	（Ｃ） 0.30	（Ｄ） 0.32	（Ｅ） 0.35
（Ｆ） 0.37	（Ｇ） 0.40	（Ｈ） 0.42	（Ｉ） 0.45	（Ｊ） 0.47
（Ｋ） 0.50	（Ｌ） 0.52	（Ｍ） 0.55	（Ｎ） 0.57	（Ｏ） 0.60
（Ｐ） 0.62	（Ｑ） 0.65	（Ｒ） 0.67	（Ｓ） 0.70	（Ｔ） 0.72
（Ｕ） 0.75	（Ｖ） 0.77	（Ｗ） 0.80	（Ｘ） 0.82	（Ｙ） 0.85
（Ｚ） 0.87	（ＡＡ） 0.90	（ＡＢ） 0.92	（ＡＣ） 0.95	（ＡＤ） 0.97

問題２． 次の（１）～（６）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。　各５点（計３０点）

（１）ある学校の１年生のＡ組とＢ組の生徒の身長の平均値に差があるとみなせるかどうか検定したい。Ａ組の生徒の身長は正規分布 $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ に従っていて、Ｂ組の生徒の身長は正規分布 $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ に従っているとする（μ_x、σ_x^2、μ_y、σ_y^2 はすべて未知）。
なお、本問において m 個の標本 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ の標本平均 $\bar{z}$ および標本分散 s_z^2 とは、それぞれ

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} z_i \text{ 、 } s_z^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(z_i - \bar{z})^2$$

とする。また、本問の検定に用いる分布の自由度が整数値でない場合は、最も近い整数値で代用することとする。

まず、帰無仮説 $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ を対立仮説 $H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ に対して、有意水準5%で等分散性の検定を行うため、Ａ組の生徒から $n_x = 10$（人）、Ｂ組の生徒から $n_y = 8$（人）、それぞれ標本を抽出した。Ｂ組の生徒の身長の標本分散が $s_y^2 = 64.00$（cm²）であるとき、帰無仮説 H_0 が棄却されるためにＡ組の生徒の身長の標本分散 s_x^2 が満たすべき条件は、

$$s_x^2 < \boxed{\quad ① \quad} \text{（cm}^2\text{）　または　} s_x^2 > \boxed{\quad ② \quad} \text{（cm}^2\text{）}$$

である（①および②はともに最も近い数値とする）。

実際にＡ組の生徒の身長の標本分散 s_x^2 を調べたところ、$s_x^2 = \boxed{\quad ① \quad} - 0.50$（cm²）であったため、帰無仮説 H_0 は棄却された。
次に、帰無仮説 $H_0' : \mu_x = \mu_y$ を対立仮説 $H_1' : \mu_x \neq \mu_y$ に対して、有意水準5%でウェルチの検定を行うため、先ほど抽出した標本の標本平均を調べたところ、下表のとおりとなった。

組	標本数（人）	標本平均（cm）	標本分散（cm²）
Ａ組	$n_x = 10$	$\bar{x} = 154.1$	$s_x^2 = \boxed{\quad ① \quad} - 0.50$
Ｂ組	$n_y = 8$	$\bar{y} = 152.3$	$s_y^2 = 64.00$

このとき、検定統計量 T に最も近い数値は $\boxed{\quad ③ \quad}$（$T \geq 0$ となるように設定する）であり、棄却域は $\boxed{\quad ④ \quad}$ であるから、帰無仮説 H_0' は $\boxed{\quad ⑤ \quad}$ される。

［①の選択肢］

（Ａ） 12.20　（Ｂ） 13.27　（Ｃ） 13.65　（Ｄ） 14.90　（Ｅ） 15.25

（Ｆ） 15.33　（Ｇ） 15.68　（Ｈ） 16.60　（Ｉ） 17.08　（Ｊ） 17.43

［②の選択肢］

（A） 246.71	（B） 246.95	（C） 253.76	（D） 268.61	（E） 274.89
（F） 276.28	（G） 282.74	（H） 308.68	（I） 317.50	（J） 352.78

［③の選択肢］

（A） 0.1897	（B） 0.2023	（C） 0.2157	（D） 0.2253
（E） 0.5214	（F） 0.5470	（G） 0.5834	（H） 0.5891

［④の選択肢］

（A） $\lvert T\rvert > 2.2281$	（B） $\lvert T\rvert > 2.2622$	（C） $\lvert T\rvert > 2.3060$	（D） $\lvert T\rvert > 2.3646$
（E） $\lvert T\rvert > 3.8549$	（F） $\lvert T\rvert > 4.1970$	（G） $\lvert T\rvert > 4.2951$	（H） $\lvert T\rvert > 4.8232$
（I） $\lvert T\rvert < 2.2281$	（J） $\lvert T\rvert < 2.2622$	（K） $\lvert T\rvert < 2.3060$	（L） $\lvert T\rvert < 2.3646$
（M） $\lvert T\rvert < 3.8549$	（N） $\lvert T\rvert < 4.1970$	（O） $\lvert T\rvert < 4.2951$	（P） $\lvert T\rvert < 4.8232$

［⑤の選択肢］

（A） 採択　　（B） 棄却

（２）帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 の下で、離散確率変数 X は下表の確率分布を持つとする。

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x \mid H_0)$	0.01	0.52	0.03	0.06	0.04	0.11	0.02	0.07	0.05	0.09
$P(X = x \mid H_1)$	0.55	0.01	0.05	0.08	0.03	0.07	0.02	0.09	0.06	0.04

帰無仮説 H_0 を対立仮説 H_1 に対して検定するとき、第 1 種の誤りの起こる確率が 0.10 であるような棄却域 W（$\{1,2,\cdots,10\}$ の部分集合）は $\boxed{\quad ⑥ \quad}$ 個存在する。
また、上記棄却域 W における第 2 種の誤りの起こる確率のうち、最も小さい数値は $\boxed{\quad ⑦ \quad}$ である。

［⑥の選択肢］

（A） 1　（B） 2　（C） 3　（D） 4　（E） 5

（F） 6　（G） 7　（H） 8　（I） 9　（J） 10

［⑦の選択肢］

（A） 0.28　（B） 0.29　（C） 0.30　（D） 0.31　（E） 0.32

（F） 0.33　（G） 0.34　（H） 0.35　（I） 0.36　（J） 0.37

（３）ある店舗の過去 100 日間の 1 日あたりのクレーム受付件数は、下表のとおりとなった。

受付件数	0 件	1 件	2 件	3 件	4 件	5 件以上	計
日数	7 日	23 日	25 日	26 日	14 日	5 日	100 日

帰無仮説 H_0 を「1 日のクレーム受付件数は平均 2 件のポアソン分布に従っている」として適合度の検定を行うとき、検定統計量に最も近い数値は $\boxed{\quad ⑧ \quad}$ であり、以下の結果が得られる。

・有意水準 2.5% の場合、帰無仮説 H_0 は $\boxed{\quad ⑨ \quad}$ される。
・有意水準 5% の場合、帰無仮説 H_0 は $\boxed{\quad ⑩ \quad}$ される。
・有意水準 10% の場合、帰無仮説 H_0 は $\boxed{\quad ⑪ \quad}$ される。

なお、この店舗の 1 日あたりのクレーム受付件数の平均は 2 件であることが判明しているとする。

［⑧の選択肢］

（Ａ） 4.3　（Ｂ） 4.4　（Ｃ） 5.0　（Ｄ） 5.4　（Ｅ） 7.3

（Ｆ） 7.5　（Ｇ） 10.2　（Ｈ） 10.7　（Ｉ） 14.4　（Ｊ） 14.6

［⑨～⑪の選択肢］

（Ａ） 採択　（Ｂ） 棄却

（４）(x, y) のデータが下表のとおり与えられている。このデータから、指数関数モデル $y = \alpha e^{\beta x}$ を用いた回帰式を求めると、α に最も近い数値は $\exp\left(\boxed{\quad ⑫ \quad}\right)$ であり、β に最も近い数値は $\boxed{\quad ⑬ \quad}$ である。

x	4.1	23.0	84.8	120.2
y	13.0	9.0	2.5	1.3

［⑫の選択肢］

（Ａ） 2.580　（Ｂ） 2.625　（Ｃ） 2.646　（Ｄ） 2.674　（Ｅ） 2.708

（Ｆ） 2.741　（Ｇ） 2.773　（Ｈ） 2.803　（Ｉ） 2.833　（Ｊ） 2.862

［⑬の選択肢］

（Ａ） -0.0237　（Ｂ） -0.0232　（Ｃ） -0.0227　（Ｄ） -0.0222　（Ｅ） -0.0216

（Ｆ） -0.0211　（Ｇ） -0.0205　（Ｈ） -0.0200　（Ｉ） -0.0196　（Ｊ） -0.0189

（５）確率過程 $\{Y_t\}$ が、以下の自己回帰移動平均モデル $ARMA(2,2)$ に従うものとする。

$$Y_t = 2 + aY_{t-1} + 0.1Y_{t-2} + \varepsilon_t - 0.1\varepsilon_{t-1} - b\varepsilon_{t-2} \qquad (a \text{ と } b\ (b \geq -0.0025) \text{ は定数})$$

ラグ作用素 L を用いてこれを変形すると、

$$\varphi(L)Y_t = 2 + \theta(L)\varepsilon_t$$

と書ける。ここで、

$$\varphi(L) = \boxed{⑭}, \quad \theta(L) = \boxed{⑮}$$

である。

定常性を持つための定数 a の範囲は、

$$\boxed{⑯} < a < \boxed{⑰} \quad ・・・(ア)$$

である。

また、反転可能であるための定数 b の範囲は、

$$\boxed{⑱} \leq b < \boxed{⑲} \quad ・・・(イ)$$

である。（⑱を計算した結果が選択肢にない場合は、最も近い数値を選択肢より選ぶこと）

$a = 0.9,\ b = 0.2$ のとき、$ARMA(2,2)$は $\boxed{⑳}$

［⑭、⑮の選択肢］

（Ａ） $1 + aL + 0.1L^2$　（Ｂ） $1 - aL - 0.1L^2$　（Ｃ） $-1 - aL + 0.1L^2$

（Ｄ） $-1 + aL + 0.1L^2$　（Ｅ） $1 - aL + 0.1L^2$　（Ｆ） $1 + 0.1L + bL^2$

（Ｇ） $1 - 0.1L - bL^2$　（Ｈ） $-1 - 0.1L + bL^2$　（Ｉ） $-1 + 0.1L + bL^2$

（Ｊ） $1 - 0.1L + bL^2$

［⑯～⑲の選択肢］

（Ａ） -0.9　（Ｂ） -0.8　（Ｃ） -0.7　（Ｄ） -0.6　（Ｅ） -0.5

（Ｆ） -0.4　（Ｇ） -0.3　（Ｈ） -0.2　（Ｉ） -0.1　（Ｊ） 0

（Ｋ） 0.1　（Ｌ） 0.2　（Ｍ） 0.3　（Ｎ） 0.4　（Ｏ） 0.5

（Ｐ） 0.6　（Ｑ） 0.7　（Ｒ） 0.8　（Ｓ） 0.9　（Ｔ） 1.0

［⑳の選択肢］

（A） a は（ア）の範囲を満たしており、$\theta(x)=0$ が $\varphi(x)=0$ と共通解を持たないことから、識別可能である。

（B） a は（ア）の範囲を満たしており、$\theta(x)=0$ が $\varphi(x)=0$ と共通解を持たないことから、識別可能ではない。

（C） a は（ア）の範囲を満たしており、$\theta(x)=0$ が $\varphi(x)=0$ と共通解を持つことから、識別可能である。

（D） a は（ア）の範囲を満たしており、$\theta(x)=0$ が $\varphi(x)=0$ と共通解を持つことから、識別可能ではない。

（E） b は（イ）の範囲を満たしており、$\theta(x)=0$ が $\varphi(x)=0$ と共通解を持たないことから、識別可能である。

（F） b は（イ）の範囲を満たしており、$\theta(x)=0$ が $\varphi(x)=0$ と共通解を持たないことから、識別可能ではない。

（G） b は（イ）の範囲を満たしており、$\theta(x)=0$ が $\varphi(x)=0$ と共通解を持つことから、識別可能である。

（H） b は（イ）の範囲を満たしており、$\theta(x)=0$ が $\varphi(x)=0$ と共通解を持つことから、識別可能ではない。

（６）ある種類の自動車事故について、期間 $[0,t]$ $(t \geq 0)$ で起こった事故の発生回数を N_t とし、$i\,(i=1,2,\cdots)$ 回目の事故が起こる時刻を確率変数 T_i で表すものとする。計数過程 $\{N_t\}_{t\geq 0}$ が強度 $\lambda\,(\lambda > 0)$ のポアソン過程であるとき、条件付き期待値 $E[N_{3t}|N_{4t}=1]$ は $\boxed{\quad ㉑ \quad}$ であり、確率 $P(T_2 > 4T_1)$ は $\boxed{\quad ㉒ \quad}$ である。
ただし、$t>0$ のとき、N_t はパラメータ λt のポアソン分布に従うこと（$t=0$ のときは、$N_0=0$）を用いてよい。

［㉑の選択肢］

（A） $\frac{1}{4}$ （B） $\frac{1}{2}$ （C） $\frac{3}{4}$ （D） 1 （E） $\frac{1}{4}\lambda t$

（F） $\frac{1}{2}\lambda t$ （G） $\frac{3}{4}\lambda t$ （H） λt （I） $\frac{1}{4\lambda t}$ （J） $\frac{1}{2\lambda t}$

（K） $\frac{3}{4\lambda t}$ （L） $\frac{1}{\lambda t}$

［㉒の選択肢］

（A） $\frac{1}{5}$ （B） $\frac{1}{4}$ （C） $\frac{1}{3}$ （D） $\frac{1}{5}\lambda$ （E） $\frac{1}{4}\lambda$

（F） $\frac{1}{3}\lambda$ （G） $\frac{1}{5\lambda}$ （H） $\frac{1}{4\lambda}$ （I） $\frac{1}{3\lambda}$ （J） $\frac{1}{\lambda}$

問題３．次の（１）、（２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。同じ選択肢を複数回選択してもよい。（１０点）

（１）ともに区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従う互いに独立な 2 つの確率変数から、ともに標準正規分布に従う互いに独立な 2 つの確率変数を求めることができる（ボックス・マーラーの変換式)。これにより、生成が比較的容易な一様分布に従う乱数から、応用上重要な正規分布に従う乱数を生成することができる。以下、この手法について考える。

X, Y を標準正規分布に従う互いに独立な確率変数とすると、X と Y の同時確率密度関数は、

$$f(x,y) = \boxed{\quad ① \quad} \quad (-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty)$$

となる。いま、点 (X,Y) の極座標を考え、

$$X = \sqrt{R}\cos\Theta$$
$$Y = \sqrt{R}\sin\Theta$$

とおく。R と Θ の同時確率密度関数を求めるために、変換

$$x = \sqrt{r}\cos\theta, \quad y = \sqrt{r}\sin\theta \quad (0 \le r < \infty,\ 0 \le \theta < 2\pi)$$

を考えると、R と Θ の同時確率密度関数 $f_{R,\Theta}(r,\theta)$ は、

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = \boxed{\quad ② \quad} \quad (0 \le r < \infty,\ 0 \le \theta < 2\pi)$$

となる。
したがって、R と Θ の周辺確率密度関数をそれぞれ $f_R(r)$、$f_\Theta(\theta)$ とすると、

$$f_R(r) = \boxed{\quad ③ \quad} \quad (0 \le r < \infty)$$
$$f_\Theta(\theta) = \boxed{\quad ④ \quad} \quad (0 \le \theta < 2\pi)$$

である。これにより、R と Θ の従う確率分布を確認することができ、また、R と Θ が独立であることもわかる。
次に、U を区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従う確率変数とし、R と Θ と同じ確率分布に従う確率変数 S、T をそれぞれ逆関数法で求めると、

$$S = \boxed{\quad ⑤ \quad}$$
$$T = \boxed{\quad ⑥ \quad}$$

となる。

ゆえに、U_1 と U_2 を区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従う互いに独立な確率変数とし、改めて R と Θ と同じ確率分布に従う確率変数 S、T をそれぞれ U_1 と U_2 および上式から求めると、U_1 と U_2 が独立であるから、S と T も独立となる。
よって、

$$X = \boxed{\quad ⑦ \quad} \times \boxed{\quad ⑧ \quad}$$
$$Y = \boxed{\quad ⑨ \quad} \times \boxed{\quad ⑩ \quad}$$

とすると、これらはともに標準正規分布に従う互いに独立な確率変数となる。これを、ボックス・マーラーの変換式という。

（２）ボックス・マーラーの変換式には、対数と三角関数の計算が伴うため、計算が非効率であり、十分な計算結果を得られないことがある。しかしながら、少なくとも三角関数の計算を回避する方法がある（極座標法)。以下、この手法について考える。

まず、$U_i\ (i = 1, 2)$ が区間 $(0, 1)$ 上の一様分布に従う互いに独立な確率変数であるとき、$2U_i - 1$ は区間 $(-1, 1)$ 上の一様分布に従う互いに独立な確率変数である。
したがって、

$$V_1 = 2U_1 - 1$$
$$V_2 = 2U_2 - 1$$

とおけば、(V_1, V_2) は 原点 O を中心とする正方形の領域

$$A = \{(V_1, V_2) \mid -1 \le V_1 \le 1, -1 \le V_2 \le 1\}$$

の上で一様に分布する。
このうち、原点 O を中心とする半径 1 の円

$$C = \{(V_1, V_2) \mid 0 \le V_1^2 + V_2^2 \le 1\}$$

に含まれる (V_1, V_2) のみを採用すると、(V_1, V_2) は、C 内に一様に分布する。
このとき、$W = V_1^2 + V_2^2$ とすると、

$$X = \begin{cases} \boxed{\quad ⑪ \quad} \times V_1 & \big((V_1, V_2) \ne (0,0)\big) \\ 0 & \big((V_1, V_2) = (0,0)\big) \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} \boxed{\quad ⑫ \quad} \times V_2 & \big((V_1, V_2) \ne (0,0)\big) \\ 0 & \big((V_1, V_2) = (0,0)\big) \end{cases}$$

が、ともに標準正規分布に従う互いに独立な確率変数となる。この手法を、極座標法という。
極座標法では、区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従う互いに独立な 2 つの確率変数を 1 組生成する手順を平均 $\boxed{\quad ⑬ \quad}$ 回反復することにより、互いに独立な標準正規分布に従う 2 つの確率変数を得ることになる。

[①の選択肢]

（A） $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+y)^2}{2}}$　（B） $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$　（C） $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}$　（D） $\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x+y)^2}{2}}$

（E） $\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$　（F） $\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}$　（G） $\dfrac{1}{4\pi}e^{-\frac{(x+y)^2}{2}}$　（H） $\dfrac{1}{4\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

（I） $\dfrac{1}{4\pi}e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}$　（J） $\dfrac{1}{8\pi}e^{-\frac{(x+y)^2}{2}}$　（K） $\dfrac{1}{8\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$　（L） $\dfrac{1}{8\pi}e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}$

[②の選択肢]

（A） $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{r(\sin\theta+\cos\theta)^2}{2}}$　（B） $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{r}{2}}$　（C） $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{r(\sin\theta-\cos\theta)^2}{2}}$

（D） $\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{r(\sin\theta+\cos\theta)^2}{2}}$　（E） $\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{r}{2}}$　（F） $\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{r(\sin\theta-\cos\theta)^2}{2}}$

（G） $\dfrac{1}{4\pi}e^{-\frac{r(\sin\theta+\cos\theta)^2}{2}}$　（H） $\dfrac{1}{4\pi}e^{-\frac{r}{2}}$　（I） $\dfrac{1}{4\pi}e^{-\frac{r(\sin\theta-\cos\theta)^2}{2}}$

（J） $\dfrac{1}{8\pi}e^{-\frac{r(\sin\theta+\cos\theta)^2}{2}}$　（K） $\dfrac{1}{8\pi}e^{-\frac{r}{2}}$　（L） $\dfrac{1}{8\pi}e^{-\frac{r(\sin\theta-\cos\theta)^2}{2}}$

[③の選択肢]

（A） e^{-r}　（B） $\dfrac{1}{2}e^{-\frac{r}{2}}$　（C） $\dfrac{1}{3}e^{-\frac{r}{3}}$　（D） $\dfrac{1}{4}e^{-\frac{r}{4}}$

（E） re^{-r}　（F） $\dfrac{1}{4}re^{-\frac{r}{2}}$　（G） $\dfrac{1}{9}re^{-\frac{r}{3}}$　（H） $\dfrac{1}{16}re^{-\frac{r}{4}}$

（I） $\dfrac{1}{2}r^2e^{-r}$　（J） $\dfrac{1}{16}r^2e^{-\frac{r}{2}}$　（K） $\dfrac{1}{54}r^2e^{-\frac{r}{3}}$　（L） $\dfrac{1}{128}r^2e^{-\frac{r}{4}}$

[④の選択肢]

（A） $\dfrac{1}{2\pi}$　（B） $\dfrac{\theta}{2\pi^2}$　（C） $\dfrac{|\theta-\pi|}{\pi^2}$　（D） $\dfrac{\pi-|\theta-\pi|}{\pi^2}$

（E） $\dfrac{2\pi-\theta}{2\pi^2}$　（F） $\dfrac{3\theta^2}{8\pi^3}$　（G） $\dfrac{3(\theta-\pi)^2}{2\pi^3}$　（H） $\dfrac{3(2\pi-\theta)^2}{8\pi^3}$

（I） $\dfrac{|\cos\theta|}{4}$　（J） $\dfrac{|\sin\theta|}{4}$　（K） $\dfrac{|\cos 2\theta|}{4}$　（L） $\dfrac{|\sin 2\theta|}{4}$

［⑤、⑥の選択肢］

（A）πU　（B）$2\pi U$　（C）$2\pi^2 U$　（D）$4\pi^2 U$

（E）$\dfrac{1}{\pi}U$　（F）$\dfrac{1}{2\pi}U$　（G）$\dfrac{1}{2\pi^2}U$　（H）$\dfrac{1}{4\pi^2}U$

（I）$-\log U$　（J）$-2\log U$　（K）$-3\log U$　（L）$-4\log U$

（M）$-\dfrac{1}{2}\log U$　（N）$-\dfrac{1}{3}\log U$　（O）$-\dfrac{1}{4}\log U$

［⑦、⑨の選択肢］

（A）$-\log U_1$　（B）$-2\log U_1$　（C）$-3\log U_1$　（D）$-4\log U_1$

（E）$-\dfrac{1}{2}\log U_1$　（F）$-\dfrac{1}{3}\log U_1$　（G）$-\dfrac{1}{4}\log U_1$　（H）$(-\log U_1)^{\frac{1}{2}}$

（I）$(-2\log U_1)^{\frac{1}{2}}$　（J）$(-3\log U_1)^{\frac{1}{2}}$　（K）$(-4\log U_1)^{\frac{1}{2}}$　（L）$\left(-\dfrac{1}{2}\log U_1\right)^{\frac{1}{2}}$

（M）$\left(-\dfrac{1}{3}\log U_1\right)^{\frac{1}{2}}$　（N）$\left(-\dfrac{1}{4}\log U_1\right)^{\frac{1}{2}}$

［⑧、⑩の選択肢］

（A）$\sin(\pi U_2)$　（B）$\sin(2\pi U_2)$　（C）$\sin(2\pi^2 U_2)$　（D）$\sin(4\pi^2 U_2)$

（E）$\sin\left(\dfrac{1}{\pi}U_2\right)$　（F）$\sin\left(\dfrac{1}{2\pi}U_2\right)$　（G）$\sin\left(\dfrac{1}{2\pi^2}U_2\right)$　（H）$\sin\left(\dfrac{1}{4\pi^2}U_2\right)$

（I）$\cos(\pi U_2)$　（J）$\cos(2\pi U_2)$　（K）$\cos(2\pi^2 U_2)$　（L）$\cos(4\pi^2 U_2)$

（M）$\cos\left(\dfrac{1}{\pi}U_2\right)$　（N）$\cos\left(\dfrac{1}{2\pi}U_2\right)$　（O）$\cos\left(\dfrac{1}{2\pi^2}U_2\right)$　（P）$\cos\left(\dfrac{1}{4\pi^2}U_2\right)$

［⑪、⑫の選択肢］

（Ａ） $\dfrac{-\log W}{W}$　（Ｂ） $\dfrac{-2\log W}{W}$　（Ｃ） $\dfrac{-3\log W}{W}$　（Ｄ） $\dfrac{-4\log W}{W}$

（Ｅ） $\dfrac{-\log W}{2W}$　（Ｆ） $\dfrac{-\log W}{3W}$　（Ｇ） $\dfrac{-\log W}{4W}$　（Ｈ） $\sqrt{\dfrac{-\log W}{W}}$

（Ｉ） $\sqrt{\dfrac{-2\log W}{W}}$　（Ｊ） $\sqrt{\dfrac{-3\log W}{W}}$　（Ｋ） $\sqrt{\dfrac{-4\log W}{W}}$　（Ｌ） $\sqrt{\dfrac{-\log W}{2W}}$

（Ｍ） $\sqrt{\dfrac{-\log W}{3W}}$　（Ｎ） $\sqrt{\dfrac{-\log W}{4W}}$

［⑬の選択肢］

（Ａ） $\dfrac{\pi}{2}$　（Ｂ） $\dfrac{\pi}{3}$　（Ｃ） $\dfrac{3\pi}{5}$　（Ｄ） $\dfrac{4\pi}{7}$

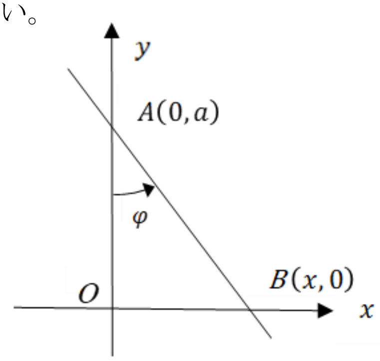
（Ｅ） $\dfrac{4}{\pi}$　（Ｆ） $\dfrac{5}{\pi}$　（Ｇ） $\dfrac{9}{2\pi}$　（Ｈ） $\dfrac{13}{3\pi}$

（Ｉ） $\dfrac{\pi^2}{7}$　（Ｊ） $\dfrac{\pi^2}{8}$　（Ｋ） $\dfrac{2\pi^2}{15}$　（Ｌ） $\dfrac{3\pi^2}{22}$

（Ｍ） $\dfrac{11}{\pi^2}$　（Ｎ） $\dfrac{13}{\pi^2}$　（Ｏ） $\dfrac{27}{2\pi^2}$　（Ｐ） $\dfrac{32}{3\pi^2}$

問題４． 次の（１）～（３）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。同じ選択肢を複数回選択してもよい。（１５点）

（１）xy 座標軸上で点 $A(0,a)$, $(a>0)$ を通る直線を考える。この直線は、点 A を中心軸とした回転針のルーレットであり、針の止まる位置は回転の角度に関して一様であるとする。
このルーレットと x 軸との交点 B の x 座標 X の分布を求めたい。



点 O を xy 座標軸上の原点とし、針の位置は、y 軸と針がなす角 $\angle OAB$（rad）によって定まるとする。
針が y 軸から反時計回りに回転する方向を正、時計回りに回転する方向を負とし、角 $\angle OAB$ を表す確率変数を φ（rad）とする。

φ を用いてルーレットと x 軸との交点の x 座標を表すと、$X=$ ① である。
仮定から、φ は区間 $(-\pi/2,\pi/2)$ 上で一様に分布するので、$-\pi/2<\theta<\pi/2$ なる θ につき、

$$P\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi\le\theta\right)=\frac{②}{③}=P(-\infty<X\le ④)$$

となる。
すなわち X の分布関数を F_X とすれば、

$$F_X(④)=\frac{②}{③}$$

となる。
したがって、 ④ $=x$ とすると、X の確率密度関数 f_X は、

$$f_X(x)=\frac{⑤}{⑥}\quad ・・・(※)$$

と表される。
このことから、ルーレットと x 軸との交点の x 座標 X は確率密度関数（※）をもつことが分かる。（※）で $a=1$ とするとき、X は ⑦ に従う。また X が ⑦ に従うとき、$\dfrac{1}{X}$ は ⑧ に従い、X^2 は ⑨ に従うことが分かる。

（２）次に、（１）で求めた X の分布を活用し、

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

を計算する。

確率変数 Y,Z は互いに独立で、ともに確率密度関数（※）を持つとし、$a=1$ とする。

このとき、$|Y|,|Z|$ の確率密度関数 $f_{|Y|},f_{|Z|}$ は、

$$f_{|Y|}(x)=f_{|Z|}(x)=\frac{\boxed{⑩}}{\boxed{⑪}} \qquad (x>0)$$

となる。

ここで、

$$P(|Z|<|Y|)=\boxed{⑫}$$

である。

一方、$P(|Z|<|Y|)$ を積分形で表し、$z=uy,\ y^2=w$ と変数変換すると、$0<z<y$ に対し、

$$P(|Z|<|Y|)=\iint_{0<z<y} f_{|Y|}(y)f_{|Z|}(z)\,dydz=\boxed{⑬}\int_0^1\int_0^{\infty}\boxed{⑭}\,dwdu$$

となる。

さらに、被積分関数の $1-u^2$ 倍の部分分数分解を考えて式変形すると、

$$\iint_{0<z<y} f_{|Y|}(y)f_{|Z|}(z)\,dydz=\boxed{⑮}\int_0^1\boxed{⑯}\,du$$

となる。

ここで、一般に $0<s<1$ に対し、

$$\frac{1}{1-s}=\sum_{k=0}^{\infty}s^k$$

が成り立つので、$\log u=t$ と変数変換して式変形すると、

$$\int_0^1\boxed{⑯}\,du=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\boxed{⑰}\,dt$$

となる。

ここから、

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\boxed{⑱}$$

が導出される。

（３）最後に、任意に互いに独立に選ばれた 2 つの自然数 a、b が互いに素となる確率 Pr を求める。
a および b が素数 p の倍数である確率は、それぞれ $1/p$ であるとする。
すると、求める確率 Pr は、

$$\mathrm{Pr} = \prod_{p:\text{素数}} \left\{ \boxed{\quad ⑲ \quad} \right\}$$

と表される。
ここで、

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} = T$$

とおき、両辺に素数の 2 乗の逆数をかけて辺々引くことを繰り返すと、

$$\prod_{p:\text{素数}} \left\{ \frac{1}{\boxed{\quad ⑲ \quad}} \right\} = \sum_{s=1}^{\infty} \boxed{\quad ⑳ \quad}$$

と変形できるから、

$$\mathrm{Pr} = \boxed{\quad ㉑ \quad}$$

となる。

［①の選択肢］

（A） $a\sin\varphi$　（B） $a\cos\varphi$　（C） $a\tan\varphi$　（D） $\dfrac{a}{\sin\varphi}$

（E） $\dfrac{a}{\cos\varphi}$　（F） $\dfrac{a}{\tan\varphi}$　（G） $\dfrac{\sin\varphi}{a}$　（H） $\dfrac{\cos\varphi}{a}$

［②、③の選択肢］

（A） $\theta-\pi$　（B） $\theta-\dfrac{\pi}{2}$　（C） $\theta+\dfrac{\pi}{2}$　（D） $\theta+\pi$

（E） $-\pi$　（F） $-\dfrac{\pi}{2}$　（G） $\dfrac{\pi}{2}$　（H） π

［④の選択肢］

（A） $a\sin\theta$　（B） $a\cos\theta$　（C） $a\tan\theta$　（D） $\dfrac{a}{\sin\theta}$

（E） $\dfrac{a}{\cos\theta}$　（F） $\dfrac{a}{\tan\theta}$　（G） $\dfrac{\sin\theta}{a}$　（H） $\dfrac{\cos\theta}{a}$

［⑤、⑥の選択肢］

（A） 1　（B） a　（C） 2　（D） $2a$

（E） a^2-x^2　（F） $\pi(a^2-x^2)$　（G） $\sqrt{a^2-x^2}$　（H） $\pi\sqrt{a^2-x^2}$

（I） a^2+x^2　（J） $\pi(a^2+x^2)$　（K） $\sqrt{a^2+x^2}$　（L） $\pi\sqrt{a^2+x^2}$

［⑦～⑨の選択肢］

（A） 標準正規分布　（B） 標準対数正規分布　（C） 平均 1 の指数分布

（D） 自由度 1 の χ^2 分布　（E） 自由度 1 の t 分布　（F） 自由度 (1,1) の F 分布

（G） 自由度 (1,2) の F 分布　（H） 平均 2 の指数分布　（I） 自由度 2 の χ^2 分布

（J） 自由度 2 の t 分布　（K） 自由度 (2,1) の F 分布　（L） 自由度 (2,2) の F 分布

［⑩、⑪の選択肢］

（A） 1　（B） 2　（C） 4　（D） 8

（E） $1-x^2$　（F） $\pi(1-x^2)$　（G） $\sqrt{1-x^2}$　（H） $\pi\sqrt{1-x^2}$

（I） $1+x^2$　（J） $\pi(1+x^2)$　（K） $\sqrt{1+x^2}$　（L） $\pi\sqrt{1+x^2}$

（M） $\sqrt{\pi}(1-x^2)$　（N） $\sqrt{\pi}(1+x^2)$　（O） $\sqrt{\pi(1-x^2)}$　（P） $\sqrt{\pi(1+x^2)}$

［⑫の選択肢］

（A） 1　（B） $\frac{1}{2}$　（C） $\frac{1}{3}$　（D） $\frac{1}{4}$

（E） $\frac{1}{5}$　（F） $\frac{2}{3}$　（G） $\frac{3}{4}$　（H） $\frac{4}{5}$

［⑬の選択肢］

（A）$\dfrac{1}{2\pi}$　（B）$\dfrac{1}{\pi}$　（C）$\dfrac{2}{\pi}$　（D）$\dfrac{4}{\pi}$

（E）$\dfrac{8}{\pi}$　（F）$\dfrac{32}{\pi}$　（G）$\dfrac{1}{2\pi^2}$　（H）$\dfrac{1}{\pi^2}$

（I）$\dfrac{2}{\pi^2}$　（J）$\dfrac{4}{\pi^2}$　（K）$\dfrac{8}{\pi^2}$　（L）$\dfrac{32}{\pi^2}$

［⑭の選択肢］

（A）$\dfrac{1}{(1+w)(1+u^2w)}$　（B）$\dfrac{1}{(1+w^2)(1+uw)}$　（C）$\dfrac{1}{(1+w^2)(1+u^2w)}$

（D）$\dfrac{1}{(1-w)(1-u^2w)}$　（E）$\dfrac{1}{(1-w^2)(1-uw)}$　（F）$\dfrac{1}{(1-w^2)(1-u^2w)}$

（G）$\dfrac{1}{\sqrt{(1+w)(1+u^2w)}}$　（H）$\dfrac{1}{\sqrt{(1+w^2)(1+uw)}}$　（I）$\dfrac{1}{\sqrt{(1+w^2)(1+u^2w)}}$

（J）$\dfrac{1}{\sqrt{(1-w)(1-u^2w)}}$　（K）$\dfrac{1}{\sqrt{(1-w^2)(1-uw)}}$　（L）$\dfrac{1}{\sqrt{(1-w^2)(1-u^2w)}}$

［⑮の選択肢］

（A）$\dfrac{1}{\pi}$　（B）$\dfrac{4}{\pi}$　（C）$\dfrac{8}{\pi}$　（D）$-\dfrac{1}{\pi}$

（E）$-\dfrac{4}{\pi}$　（F）$-\dfrac{8}{\pi}$　（G）$\dfrac{1}{\pi^2}$　（H）$\dfrac{4}{\pi^2}$

（I）$\dfrac{8}{\pi^2}$　（J）$-\dfrac{1}{\pi^2}$　（K）$-\dfrac{4}{\pi^2}$　（L）$-\dfrac{8}{\pi^2}$

［⑯の選択肢］

（A）$\dfrac{\log u}{1-u}$　（B）$\dfrac{\log u}{1-u^2}$　（C）$\dfrac{\log u}{1+u}$　（D）$\dfrac{(\log u)^2}{1-u}$

（E）$\dfrac{(\log u)^2}{1-u^2}$　（F）$\dfrac{(\log u)^2}{1+u}$　（G）$\dfrac{1-\log u}{1-u}$　（H）$\dfrac{1-\log u}{1-u^2}$

（I）$\dfrac{1-\log u}{1+u}$　（J）$\dfrac{(1-\log u)^2}{1-u}$　（K）$\dfrac{(1-\log u)^2}{1-u^2}$　（L）$\dfrac{(1-\log u)^2}{1+u}$

［⑰の選択肢］

（A） te^{kt}　（B） te^{2kt}　（C） t^2e^{kt}　（D） t^2e^{2kt}

（E） $te^{(k+1)t}$　（F） $te^{(2k+1)t}$　（G） $t^2e^{(k+1)t}$　（H） $t^2e^{(2k+1)t}$

［⑱の選択肢］

（A） $\frac{\pi}{8}$　（B） $\frac{\pi}{6}$　（C） $\frac{\pi}{4}$　（D） $\frac{\pi}{2}$

（E） π　（F） $\frac{3\pi}{2}$　（G） $\frac{\pi^2}{8}$　（H） $\frac{\pi^2}{6}$

（I） $\frac{\pi^2}{4}$　（J） $\frac{\pi^2}{2}$　（K） π^2　（L） $\frac{3\pi^2}{2}$

［⑲の選択肢］

（A） $\frac{1}{p}$　（B） $1-\frac{1}{p}$　（C） $1-\frac{1}{p^2}$　（D） $\left(1-\frac{1}{p}\right)^2$

（E） $\frac{1}{p^2}$　（F） $\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{p}$　（G） $\frac{1}{ab}$　（H） $1-\frac{1}{ab}$

［⑳の選択肢］

（A） $\frac{1}{s^2}$　（B） $\frac{2}{s^2}$　（C） $\frac{1}{2s^2}$　（D） $\frac{3}{2s^2}$

（E） $\frac{1}{3s^2}$　（F） $\frac{2}{3s^2}$　（G） $\frac{1}{(s+1)^2}$　（H） $\frac{2}{(s+1)^2}$

（I） $\frac{1}{2(s+1)^2}$　（J） $\frac{3}{2(s+1)^2}$　（K） $\frac{1}{3(s+1)^2}$　（L） $\frac{2}{3(s+1)^2}$

［㉑の選択肢］

（A） $\frac{1}{\pi}$　（B） $\frac{2}{\pi}$　（C） $\frac{3}{\pi}$　（D） $\frac{1}{\pi^2}$

（E） $\frac{2}{\pi^2}$　（F） $\frac{3}{\pi^2}$　（G） $\frac{4}{\pi^2}$　（H） $\frac{5}{\pi^2}$

（I） $\frac{6}{\pi^2}$　（J） $\frac{7}{\pi^2}$　（K） $\frac{8}{\pi^2}$　（L） $\frac{9}{\pi^2}$

（M） $\frac{1}{2(\pi^2-6)}$　（N） $\frac{1}{\pi^2-6}$　（O） $\frac{2}{\pi^2-6}$　（P） $\frac{3}{\pi^2-6}$

問題５． 次の（１）、（２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。同じ選択肢を複数回選択してもよい。（１５点）

生存時間 X の分布が確率密度関数 $f(x)$ を持つ分布に従う母集団から、大きさ N 個のサンプルを取り出して同時に実験を始め、その生存時間が小さいものから順に n 個 $(n \leq N)$ 測定して、測定値 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ を得たとする。この測定値の確率変数を $X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}$ とする。

（１）生存時間 X が区間 $(0,1)$ 上の一様分布 $U(0,1)$ に従う場合を考える。

これは、例えば「1 時間以内に確実に死亡するがいつ死亡するかは不明」であるサンプルの生存時間と考えることができる。このサンプルの生存時間の測定値 $X_{(n)}$ の期待値と分散、$X_{(k)}$ と $X_{(l)}$ $(k < l)$ の相関係数を調べたい。

まず、$X_{(n)}$ の確率密度関数 $f_{X_{(n)}}$ を求める。微小量を dx で表すこととする。

$x_n \leq X_{(n)} \leq x_n + dx_n$ である事象の確率は、$X_1, X_2, \cdots, X_N$ のうち、$\boxed{①}$ 個が x_n より小、$\boxed{②}$ 個が区間 $(x_n, x_n + dx_n)$ に入り、残りの $\boxed{③}$ 個が $x_n + dx_n$ より大、である事象の確率となると考えると、$X_{(n)}$ の確率密度関数は、

$$f_{X_{(n)}}(x_n) = \boxed{④} \times \boxed{⑤} \times \boxed{⑥} \qquad (0 < x_n < 1)$$

となる。(<u>⑤と⑥の解答は順不同</u>)

したがって、$X_{(n)}$ の期待値 $E\left[X_{(n)}\right]$ と分散 $V\left[X_{(n)}\right]$ を算出すると、

$$E\left[X_{(n)}\right] = \boxed{⑦}$$

$$V\left[X_{(n)}\right] = \boxed{⑧}$$

となる。

次に、$X_{(k)}$ と $X_{(l)}$ $(k < l)$ の同時確率密度関数 $f_{X_{(k)}, X_{(l)}}$ について考える。

上記と同様にして考えると、

$$f_{X_{(k)}, X_{(l)}}(x_k, x_l) = \boxed{⑨} \times \boxed{⑩} \times \boxed{⑪} \times \boxed{⑫} \qquad (0 < x_k \leq x_l < 1)$$

となる。(<u>⑩と⑪と⑫の解答は順不同</u>)

したがって、$X_{(k)}$ と $X_{(l)}$ の共分散 $\mathrm{Cov}\left(X_{(k)}, X_{(l)}\right)$ は、

$$\mathrm{Cov}\left(X_{(k)}, X_{(l)}\right) = \boxed{⑬}$$

となる。

したがって、$X_{(k)}$ と $X_{(l)}$ の相関係数 $\rho\left(X_{(k)}, X_{(l)}\right)$ は、

$$\rho\left(X_{(k)}, X_{(l)}\right) = \boxed{⑭}$$

となる。

（２）次に、生存時間 X が平均 θ $(\theta > 0)$ の指数分布に従う場合を考える。

これは、例えば「劣化せず、死亡は偶然の事故によって発生する」サンプルの生存時間と考えることができる。このサンプルの生存時間の測定値 $X_{(n)}$ の期待値と分散、$X_{(k)}$ と $X_{(l)}$ $(k < l)$ の相関係数を調べたい。

$X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}$ の同時確率密度関数は、（１）の場合と同様に考えて、

$$f_{X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boxed{⑮} \times \exp\left[-\boxed{⑯}\left\{\boxed{⑰}\right\}\right]$$

となる。

ここで、

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \boxed{⑰}$$

が成り立つように、y_i $(i = 1,2,\cdots,n)$ を

$$y_i = c_i(x_i - x_{i-1})$$

とおく。ただし、$x_0 = 0$ とする。

すると、

$$c_i = \boxed{⑱} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

となることが分かる。

いま、確率変数 Y_i $(i = 1,2,\cdots,n)$ を、

$$Y_i = \boxed{⑱} \times \left(X_{(i)} - X_{(i-1)}\right)$$

として定める。ただし、$X_{(0)} = 0$ とする。

対角線より右上の行列成分がすべて 0 である下三角行列の行列式は、

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \lambda_2 & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & * & \lambda_3 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & * & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & * & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & * & \ddots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

となることを用いると、ヤコビアンは、

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \boxed{⑲}$$

である。
よって、$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ の同時確率密度関数 $f_{Y_1,Y_2,\cdots,Y_n}$ は、

$$f_{Y_1,Y_2,\cdots,Y_n}(y_1, y_2, \cdots, y_n) = f_{X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\left|\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}\right|$$

$$= \boxed{⑳}\exp\left[-\boxed{㉑}\left\{\boxed{㉒}\right\}\right]$$

となる。
ここで、$X_{(n)}$ は、$Y_i\ (i = 1,2,\cdots,n)$ を用いて、

$$X_{(n)} = \boxed{㉓}$$

と書けることを用いると、$X_{(n)}$ の期待値 $E[X_{(n)}]$ と分散 $V[X_{(n)}]$ は、

$$E[X_{(n)}] = \boxed{㉔}$$

$$V[X_{(n)}] = \boxed{㉕}$$

となる。
したがって、$X_{(k)}$ と $X_{(l)}$ $(k < l)$ の相関係数 $\rho(X_{(k)}, X_{(l)})$ は、

$$\rho(X_{(k)}, X_{(l)}) = \boxed{㉖}$$

となる。

［①～④、⑦、⑧の選択肢］

（A） 1　（B） $n-1$　（C） n　（D） $N-n-1$

（E） $N-n$　（F） N　（G） $\dfrac{n-1}{N-1}$　（H） $\dfrac{n}{N+1}$

（I） $\dfrac{n+1}{N+1}$　（J） $\dfrac{N-n+1}{N+1}$　（K） $\dfrac{(n-1)(N-n)}{(N-1)N}$

（L） $\dfrac{(n-1)(N-n)}{(N-1)^2N}$　（M） $\dfrac{n(N-n+1)}{(N+1)(N+2)}$　（N） $\dfrac{n(N-n+1)}{(N+1)^2(N+2)}$

（O） $\dfrac{(n+1)(N-n)}{(N+1)(N+2)}$　（P） $\dfrac{(n+1)(N-n)}{(N+1)^2(N+2)}$　（Q） $\dfrac{N!}{(n-1)!\,(N-n)!}$

（R） $\dfrac{N!}{(n-1)!\,(N-n+1)!}$　（S） $\dfrac{N!}{n!\,(N-n-1)!}$　（T） $\dfrac{N!}{n!\,(N-n)!}$

［⑤、⑥の選択肢］

（A） ${x_n}^{n-1}$　（B） ${x_n}^{n}$　（C） ${x_n}^{N-n}$　（D） ${x_n}^{N-n+1}$

（E） $(1-x_n)^{n-1}$　（F） $(1-x_n)^{N-n-1}$　（G） $(1-x_n)^{N-n}$　（H） $(1-x_n)^{N-n+1}$

［⑨の選択肢］

（A） $\dfrac{N!}{(k-1)!\,(l-k-1)!\,(N-l)!}$　（B） $\dfrac{N!}{(k-1)!\,(l-k)!\,(N-l-1)!}$

（C） $\dfrac{N!}{(k-1)!\,(l-k)!\,(N-l)!}$　（D） $\dfrac{N!}{k!\,(l-k-1)!\,(N-l-1)!}$

（E） $\dfrac{N!}{k!\,(l-k-1)!\,(N-l)!}$　（F） $\dfrac{N!}{k!\,(l-k)!\,(N-l-1)!}$　（G） $\dfrac{N!}{k!\,(l-k)!\,(N-l)!}$

［⑩～⑫の選択肢］

（A） ${x_k}^{k-1}$　（B） ${x_k}^{k}$　（C） ${x_l}^{N-l-1}$　（D） ${x_l}^{N-l}$

（E） $(1-x_k)^{k-1}$　（F） $(1-x_k)^{k}$　（G） $(1-x_l)^{N-l-1}$　（H） $(1-x_l)^{N-l}$

（I） $(x_l-x_k)^{l-k-1}$　（J） $(x_l-x_k)^{l-k}$　（K） $(x_l-x_k)^{l-k+1}$

［⑬の選択肢］

（A）$\dfrac{k(N-l)}{(N+1)^2(N+2)}$　（B）$\dfrac{k(N-l)}{(N+2)^2(N+3)}$　（C）$\dfrac{k(N-l+1)}{(N+1)^2(N+2)}$

（D）$\dfrac{k(N-l+1)}{(N+2)^2(N+3)}$　（E）$\dfrac{(k+1)(N-l)}{(N+1)^2(N+2)}$　（F）$\dfrac{(k+1)(N-l)}{(N+2)^2(N+3)}$

（G）$\dfrac{(k+1)(N-l+1)}{(N+1)^2(N+2)}$　（H）$\dfrac{(k+1)(N-l+1)}{(N+2)^2(N+3)}$

［⑭の選択肢］

（A）$\sqrt{\dfrac{k(N-k+1)}{l(N-l+1)}}$　（B）$\sqrt{\dfrac{k(N-l+1)}{l(N-k+1)}}$　（C）$\sqrt{\dfrac{l(N-k+1)}{k(N-l+1)}}$

（D）$\sqrt{\dfrac{l(N-l+1)}{k(N-k+1)}}$　（E）$\sqrt{\dfrac{(k+1)(N-k)}{(l+1)(N-l)}}$　（F）$\sqrt{\dfrac{(k+1)(N-l)}{(l+1)(N-k)}}$

（G）$\sqrt{\dfrac{(l+1)(N-k)}{(k+1)(N-l)}}$　（H）$\sqrt{\dfrac{(l+1)(N-l)}{(k+1)(N-k)}}$　（I）$\sqrt{\dfrac{(k+1)(N-k+1)}{(l+1)(N-l+1)}}$

（J）$\sqrt{\dfrac{(k+1)(N-l+1)}{(l+1)(N-k+1)}}$　（K）$\sqrt{\dfrac{(l+1)(N-k+1)}{(k+1)(N-l+1)}}$　（L）$\sqrt{\dfrac{(l+1)(N-l+1)}{(k+1)(N-k+1)}}$

［⑮～⑯、⑲～㉑の選択肢］

（A）1　（B）$\dfrac{1}{\theta}$　（C）$\left(\dfrac{1}{\theta}\right)^n$　（D）$\left(\dfrac{1}{\theta}\right)^N$

（E）$\left(\dfrac{n}{\theta}\right)^n$　（F）$n!$　（G）$\dfrac{(N-1)!}{(N-n-1)!}$　（H）$\dfrac{N!}{(N-n)!}$

（I）$\dfrac{N!}{(N-n+1)!}$　（J）$\dfrac{N!}{n^n(N-n)!}$　（K）$(N-n+1)\left(\dfrac{1}{\theta}\right)^n$

（L）$\dfrac{N}{N-n}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)^n$　（M）$n!\left(\dfrac{1}{\theta}\right)^n$　（N）$\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)^n$

（O）$\dfrac{N!}{(N-n)!}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)^n$　（P）$\dfrac{N!}{(N-n)!}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)^N$　（Q）$\dfrac{N!}{n!\,(N-n)!}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)^n$

［⑰の選択肢］

（A）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i$　（B）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$　（C）$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} x_i$　（D）$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

（E）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i + (N-n+1)x_{n-1}$　（F）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i + (N-n)x_n$

（G）$\displaystyle\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n-1} x_i + (N-n+1)x_{n-1}\right\}$　（H）$\displaystyle\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i + (N-n)x_n\right\}$

［⑱の選択肢］

（A）i　（B）$-i$　（C）$n-i$　（D）$n-i+1$

（E）$N-i$　（F）$N-i+1$　（G）$\dfrac{N-i+1}{n}$　（H）$\dfrac{N-i}{n}$

（I）$N+i-2n$　（J）$N-2i+n$　（K）$N+i-2n+1$　（L）$N-2i+n+1$

［㉒の選択肢］

（A）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i$　（B）$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{N-n+1}$　（C）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{N-i}$

（D）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{N-i+1}$　（E）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{ny_i}{N-i}$　（F）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{ny_i}{N-i+1}$

（G）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{(N-i+1)y_i}{N-i}$　（H）$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(N-i+1)y_i}{N-n+1}$

［㉓の選択肢］

（A）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$　（B）$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{N-n+1}$　（C）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{N-i}$

（D）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{N-i+1}$　（E）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{nY_i}{N-i}$　（F）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{nY_i}{N-i+1}$

（G）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{(N-i+1)Y_i}{N-i}$　（H）$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(N-i+1)Y_i}{N-n+1}$

［㉔の選択肢］

（A） $\dfrac{n\theta}{N-n}$　（B） $\dfrac{n\theta}{N-n+1}$　（C） $\dfrac{n\theta}{\sum_{i=N-n}^{N-1} i}$　（D） $\dfrac{n\theta}{\sum_{i=N-n+1}^{N} i}$

（E） $\displaystyle\sum_{i=N-n}^{N-1} \frac{\theta}{i}$　（F） $\displaystyle\sum_{i=N-n+1}^{N} \frac{\theta}{i}$　（G） $\displaystyle\sum_{i=N-n}^{N-1} \frac{n\theta}{i}$　（H） $\displaystyle\sum_{i=N-n+1}^{N} \frac{n\theta}{i}$

［㉕の選択肢］

（A） $\dfrac{n\theta^2}{N-n}$　（B） $\dfrac{n\theta^2}{N-n+1}$　（C） $\dfrac{n\theta^2}{(N-n)^2}$　（D） $\dfrac{n\theta^2}{(N-n+1)^2}$

（E） $\displaystyle\sum_{i=N-n}^{N-1} \frac{\theta^2}{i}$　（F） $\displaystyle\sum_{i=N-n+1}^{N} \frac{\theta^2}{i}$　（G） $\displaystyle\sum_{i=N-n}^{N-1} \frac{(n\theta)^2}{i}$　（H） $\displaystyle\sum_{i=N-n+1}^{N} \frac{(n\theta)^2}{i}$

（I） $\displaystyle\sum_{i=N-n}^{N-1} \frac{\theta^2}{i^2}$　（J） $\displaystyle\sum_{i=N-n+1}^{N} \frac{\theta^2}{i^2}$　（K） $\displaystyle\sum_{i=N-n}^{N-1} \frac{(n\theta)^2}{i^2}$　（L） $\displaystyle\sum_{i=N-n+1}^{N} \frac{(n\theta)^2}{i^2}$

［㉖の選択肢］

（A） $\sqrt{\dfrac{k}{l}}$　（B） $\sqrt{\dfrac{l}{k}}$　（C） $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=N-k}^{N-1} i^2}{\sum_{i=N-l}^{N-1} i^2}}$　（D） $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=N-k+1}^{N} i^2}{\sum_{i=N-l+1}^{N} i^2}}$

（E） $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=N-k}^{N-1} \frac{1}{i^2}}{\sum_{i=N-l}^{N-1} \frac{1}{i^2}}}$　（F） $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=N-k+1}^{N} \frac{1}{i^2}}{\sum_{i=N-l+1}^{N} \frac{1}{i^2}}}$　（G） $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=N-l}^{N-1} i^2}{\sum_{i=N-k}^{N-1} i^2}}$　（H） $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=N-l+1}^{N} i^2}{\sum_{i=N-k+1}^{N} i^2}}$

（I） $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=N-l}^{N-1} \frac{1}{i^2}}{\sum_{i=N-k}^{N-1} \frac{1}{i^2}}}$　（J） $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=N-l+1}^{N} \frac{1}{i^2}}{\sum_{i=N-k+1}^{N} \frac{1}{i^2}}}$

以　上

(付表)

Ⅰ.標準正規分布表

$P(x > 0.25) = 0.4013$

上側ε点 $u(\varepsilon)$ から確率εを求める表

$u(\varepsilon)\rightarrow\varepsilon$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.0*	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1*	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2*	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3*	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4*	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5*	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6*	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7*	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8*	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9*	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0*	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1*	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2*	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3*	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4*	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5*	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6*	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7*	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8*	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9*	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0*	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1*	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2*	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3*	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4*	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5*	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6*	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7*	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8*	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9*	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

$$P(x > 1.9600) = 0.025$$

確率εから上側ε点 u(ε) を求める表

$\varepsilon \to u(\varepsilon)$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.00*	∞	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656
0.01*	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749
0.02*	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957
0.03*	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624
0.04*	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546
0.05*	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632
0.06*	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833
0.07*	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118
0.08*	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469
0.09*	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873
0.10*	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319
0.11*	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800
0.12*	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311
0.13*	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848
0.14*	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0450	1.0407
0.15*	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986
0.16*	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581
0.17*	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192
0.18*	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816
0.19*	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452
0.20*	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099
0.21*	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756
0.22*	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421
0.23*	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095
0.24*	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776
0.25*	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464
0.26*	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158
0.27*	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858
0.28*	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563
0.29*	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273
0.30*	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987
0.31*	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705
0.32*	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427
0.33*	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152
0.34*	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880
0.35*	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611
0.36*	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345
0.37*	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081
0.38*	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819
0.39*	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559
0.40*	0.2533	0.2508	0.2482	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301
0.41*	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045
0.42*	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789
0.43*	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535
0.44*	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282
0.45*	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030
0.46*	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778
0.47*	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527
0.48*	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276
0.49*	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025

Ⅱ.自由度φのχ^2分布の上側ε点： $\chi^2_\varphi(\varepsilon)$

$\varphi \setminus \varepsilon$	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010
1	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	0.4549	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349
2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	1.3863	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103
3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	2.3660	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449
4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	3.3567	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767
5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	4.3515	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863
6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	5.3481	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
7	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	6.3458	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	7.3441	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	8.3428	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
10	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	9.3418	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	10.3410	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250
12	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	11.3403	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
13	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	12.3398	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	13.3393	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
15	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	14.3389	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779
16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	15.3385	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999
17	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	16.3382	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
18	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	17.3379	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053
19	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	18.3377	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909
20	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	19.3374	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662
21	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	20.3372	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
22	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	21.3370	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894
23	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	22.3369	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384
24	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	23.3367	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
25	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	24.3366	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141
26	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	25.3365	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417
27	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	26.3363	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629
28	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	27.3362	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782
29	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	28.3361	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879
30	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	29.3360	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922
31	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	30.3359	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914
32	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	31.3359	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858
33	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	32.3358	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755
34	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	33.3357	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609
35	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	34.3356	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421
36	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	35.3356	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192
37	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	36.3355	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925
38	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	37.3355	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621
39	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	38.3354	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281
40	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	39.3353	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907
41	22.9056	25.2145	27.3256	29.9071	40.3353	52.9485	56.9424	60.5606	64.9501
42	23.6501	25.9987	28.1440	30.7654	41.3352	54.0902	58.1240	61.7768	66.2062
43	24.3976	26.7854	28.9647	31.6255	42.3352	55.2302	59.3035	62.9904	67.4593
44	25.1480	27.5746	29.7875	32.4871	43.3352	56.3685	60.4809	64.2015	68.7095
45	25.9013	28.3662	30.6123	33.3504	44.3351	57.5053	61.6562	65.4102	69.9568
46	26.6572	29.1601	31.4390	34.2152	45.3351	58.6405	62.8296	66.6165	71.2014
47	27.4158	29.9562	32.2676	35.0814	46.3350	59.7743	64.0011	67.8206	72.4433
48	28.1770	30.7545	33.0981	35.9491	47.3350	60.9066	65.1708	69.0226	73.6826
49	28.9406	31.5549	33.9303	36.8182	48.3350	62.0375	66.3386	70.2224	74.9195
50	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	49.3349	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539

Ⅲ．分母の自由度n、分子の自由度mのF分布の上側 ε 点：$F_n^m(\varepsilon)$

$\varepsilon =$ 0.100

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.5263	9.0000	9.1618	9.2434	9.2926	9.3255	9.3491	9.3668	9.3805	9.3916
3	5.5383	5.4624	5.3908	5.3426	5.3092	5.2847	5.2662	5.2517	5.2400	5.2304
4	4.5448	4.3246	4.1909	4.1072	4.0506	4.0097	3.9790	3.9549	3.9357	3.9199
5	4.0604	3.7797	3.6195	3.5202	3.4530	3.4045	3.3679	3.3393	3.3163	3.2974
6	3.7759	3.4633	3.2888	3.1808	3.1075	3.0546	3.0145	2.9830	2.9577	2.9369
7	3.5894	3.2574	3.0741	2.9605	2.8833	2.8274	2.7849	2.7516	2.7247	2.7025
8	3.4579	3.1131	2.9238	2.8064	2.7264	2.6683	2.6241	2.5893	2.5612	2.5380
9	3.3603	3.0065	2.8129	2.6927	2.6106	2.5509	2.5053	2.4694	2.4403	2.4163
10	3.2850	2.9245	2.7277	2.6053	2.5216	2.4606	2.4140	2.3772	2.3473	2.3226

$\varepsilon =$ 0.050

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782

$\varepsilon =$ 0.025

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168

$\varepsilon =$ 0.010

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.3992
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.0510
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491

$\varepsilon =$ 0.005

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.5013	199.0000	199.1664	199.2497	199.2996	199.3330	199.3568	199.3746	199.3885	199.3996
3	55.5520	49.7993	47.4672	46.1946	45.3916	44.8385	44.4341	44.1256	43.8824	43.6858
4	31.3328	26.2843	24.2591	23.1545	22.4564	21.9746	21.6217	21.3520	21.1391	20.9667
5	22.7848	18.3138	16.5298	15.5561	14.9396	14.5133	14.2004	13.9610	13.7716	13.6182
6	18.6350	14.5441	12.9166	12.0275	11.4637	11.0730	10.7859	10.5658	10.3915	10.2500
7	16.2356	12.4040	10.8824	10.0505	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138	8.3803
8	14.6882	11.0424	9.5965	8.8051	8.3018	7.9520	7.6941	7.4959	7.3386	7.2106
9	13.6136	10.1067	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411	6.4172
10	12.8265	9.4270	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676	5.8467

Ⅳ．自由度φのt分布の上側ε点：$t_{\varphi}(\varepsilon)$

φ ＼ε	0.100	0.050	0.025
1	3.0777	6.3138	12.7062
2	1.8856	2.9200	4.3027
3	1.6377	2.3534	3.1824
4	1.5332	2.1318	2.7764
5	1.4759	2.0150	2.5706
6	1.4398	1.9432	2.4469
7	1.4149	1.8946	2.3646
8	1.3968	1.8595	2.3060
9	1.3830	1.8331	2.2622
10	1.3722	1.8125	2.2281
11	1.3634	1.7959	2.2010
12	1.3562	1.7823	2.1788
13	1.3502	1.7709	2.1604
14	1.3450	1.7613	2.1448
15	1.3406	1.7531	2.1314
16	1.3368	1.7459	2.1199
17	1.3334	1.7396	2.1098
18	1.3304	1.7341	2.1009
19	1.3277	1.7291	2.0930
20	1.3253	1.7247	2.0860
21	1.3232	1.7207	2.0796
22	1.3212	1.7171	2.0739
23	1.3195	1.7139	2.0687
24	1.3178	1.7109	2.0639
25	1.3163	1.7081	2.0595

Ⅴ．自然対数表

x	$\log x$
1.1	0.0953
1.2	0.1823
1.3	0.2624
1.4	0.3365
1.5	0.4055
1.6	0.4700
1.7	0.5306
1.8	0.5878
1.9	0.6419
2.0	0.6931
2.5	0.9163
3.0	1.0986
3.5	1.2528
4.0	1.3863
4.5	1.5041
5.0	1.6094
5.5	1.7047
6.0	1.7918
6.5	1.8718
7.0	1.9459
7.5	2.0149
8.0	2.0794
8.5	2.1401
9.0	2.1972
9.5	2.2513
10.0	2.3026

Ⅵ．指数関数表

x	$\exp(x)$
-2.00	0.1353
-1.50	0.2231
-1.00	0.3679
-0.50	0.6065
-0.10	0.9048
-0.09	0.9139
-0.08	0.9231
-0.07	0.9324
-0.06	0.9418
-0.05	0.9512
-0.04	0.9608
-0.03	0.9704
-0.02	0.9802
-0.01	0.9900
0.00	1.0000
0.01	1.0101
0.02	1.0202
0.03	1.0305
0.04	1.0408
0.05	1.0513
0.06	1.0618
0.07	1.0725
0.08	1.0833
0.09	1.0942
0.10	1.1052
0.50	1.6487
1.00	2.7183
1.50	4.4817
2.00	7.3891

以上

数学（解答例）

（講評）

アクチュアリー試験の数学科目では、教科書の基本的な事項を理解してそれを適切に使いこなすことが出来るかどうかといった、確率・統計・モデリングに関する基礎的な学力を総合的に評価することを念頭に置いて出題している。

今回の試験では、統計の基本的な事項などの教科書の理解不足や、問題演習が不足していると思われる受験者が散見された。また、三角関数の微分などの微積分の基本的な知識が不足していると思われる解答も多く見られた。

まず教科書をよく読んで定義や定理などを理解する。そして、教科書の例題や練習問題、指定の演習書などを使って実際に手を動かして問題を解くことで教科書の理解が深まり、知識が定着していくものである。

数学は、他のアクチュアリー試験科目の基礎となるだけでなく、アクチュアリーとして実務を行っていくうえでの土台になる。試験直前に過去問の解法の暗記に走るのではなく、本質的な理解をするように努めてほしい。

問題１.

（１）k 回目のじゃんけんでＡが勝つ確率を p_k^A、Ｂが勝つ確率を p_k^B とおく。

まず、最初の１回目のじゃんけんでＡが勝つ確率 p_1^A およびＢが勝つ確率 p_1^B は、ルール１より

$$p_1^A = p_1^B = \left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

である。

つぎに、k 回目にＡが勝った場合、Ｂが勝った場合およびあいこであった場合の、$k+1$ 回目のＡとＢの手の出し方の組合せを書き下すと以下のとおりとなる。

＜k 回目にＡが勝った場合＞

k 回目にＡが出した手	$k+1$ 回目にＡが出せる手	$k+1$ 回目にＢが出せる手
グー	チョキ、パー	グー、パー
チョキ	グー、パー	グー、チョキ
パー	グー、チョキ	チョキ、パー

＜k 回目にＢが勝った場合またはあいこであった場合＞

k 回目にＡが出した手	$k+1$ 回目にＡが出せる手	$k+1$ 回目にＢが出せる手
グー	チョキ、パー	グー、チョキ、パー
チョキ	グー、パー	グー、チョキ、パー
パー	グー、チョキ	グー、チョキ、パー

Ａ、Ｂは出せる手の中で無作為に出す手を選ぶことに注意して、$k+1$ 回目のじゃんけんにおいてＡが勝つ確率 p_{k+1}^A およびＢが勝つ確率 p_{k+1}^B を p_k^A, p_k^B を用いて表すと、

$$p_{k+1}^A = p_k^A \times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)+(1-p_k^A)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)$$

$$p_{k+1}^A = \frac{1}{6}p_k^A+\frac{1}{3} \quad ――①$$

$$p_{k+1}^B = p_k^A \times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\right)+(1-p_k^A)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)$$

$$p_{k+1}^B = -\frac{1}{12}p_k^A+\frac{1}{3} \quad ――②$$

となる。

①式を変形すると、

$$p_{k+1}^A = \frac{1}{6}p_k^A+\frac{1}{3}$$

$$p_{k+1}^A-\frac{2}{5} = \frac{1}{6}\left(p_k^A-\frac{2}{5}\right)$$

となるため、この式を繰り返し適用することで、

$$p_n^A-\frac{2}{5}=\frac{1}{6}\left(p_{n-1}^A-\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\left(p_{n-2}^A-\frac{2}{5}\right)=\cdots=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(p_1^A-\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\right)=-\frac{1}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ p_n^A=\frac{2}{5}-\frac{1}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\ (n=1,2,\cdots)$$

2 回目にＡが勝つ確率は、$n=2$ を代入して、

$$\therefore\ p_2^A=\frac{2}{5}-\frac{1}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^{1}=\frac{7}{18}$$

また②式より、求める確率 p_n^B は、

$$p_n^B=-\frac{1}{12}p_{n-1}^A+\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}\left\{\frac{2}{5}-\frac{1}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2}\right\}+\frac{1}{3}=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n}\ (n=1,2,\cdots)$$

となる（$n=1$ のときも成立）。

よって、解答は　①（Ｆ）　②（Ｆ）

（２）コインを表が出るまで投げ、初めて表が出るまでコインを投げた回数を表す確率変数 $X_A,\ X_B,\ X_C$ は互いに独立であり、確率分布 $P(X=k)=p(1-p)^{k-1}\ \ (k=1,2,\cdots)$ に従う。

ＡとＢにそれぞれ初めて表が出るまでコインを投げるとき、2 人のコインを投げた回数の合計が $k\ (\ k=2,3,\cdots)$ である確率は、

$$
\begin{aligned}
P(X_A+X_B=k)&=\sum_{i+j=k}P(X_A=i)\cdot P(X_B=j)\\
&=\sum_{i+j=k}p(1-p)^{i-1}p(1-p)^{j-1}\\
&=\sum_{i+j=k}p^2(1-p)^{i+j-2}\\
&=(k-1)p^2(1-p)^{k-2}
\end{aligned}
$$

である。

また、Ａ、Ｂ、Ｃにそれぞれ初めて表が出るまでコインを投げるとき、3 人のコインを投げた回数の合計が $k\ (\ k=3,4,\cdots)$ である確率は、

$$
\begin{aligned}
P(X_A+X_B+X_C=k)&=\sum_{i+j<k}P(X_A=i)\cdot P(X_B=j)\cdot P(X_C=k-i-j)\\
&=\sum_{i+j<k}p(1-p)^{i-1}p(1-p)^{j-1}p(1-p)^{k-i-j-1}\\
&=\sum_{i+j<k}p^3(1-p)^{k-3}\\
&=\binom{k-1}{2}p^3(1-p)^{k-3}\\
&=\frac{(k-1)(k-2)}{2}p^3(1-p)^{k-3}
\end{aligned}
$$

であり、3 人のコインを投げた回数の合計が $k\ (k=3,4,\cdots)$ であるという条件の下、Ａに初めて表が出るまでコインを投げた回数が $j\ (\ j=1,2,\cdots,k-2)$ である条件付き確率は、

$$
P(X_A=j\,|\,X_A+X_B+X_C=k)=\frac{P(X_A=j\ ,\ X_A+X_B+X_C=k)}{P(X_A+X_B+X_C=k)}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
P(X_A=j\ ,\ X_A+X_B+X_C=k)&=P(X_A=j\ ,X_B+X_C=k-j)\\
&=P(X_A=j)\cdot P(X_B+X_C=k-j)\\
&=P(X_A=j)\cdot\sum_{i=1}^{k-j-1}P(X_B=i,\ X_C=k-j-i)\\
&=p(1-p)^{j-1}\cdot(k-j-1)p^2(1-p)^{k-j-2}\\
&=(k-j-1)p^3(1-p)^{k-3}
\end{aligned}
$$

したがって、

$$P(X_A = j \mid X_A + X_B + X_C = k) = \frac{(k-j-1)p^3(1-p)^{k-3}}{\frac{(k-1)(k-2)}{2}p^3(1-p)^{k-3}} = \frac{2(k-j-1)}{(k-1)(k-2)}$$

よって、<u>解答は　③　**（F）**　④　**（H）**　⑤　**（G）**</u>

（３）問題文より、当たりを引いた回数 X は、1 回で当たりを引く確率が $3/n$ の二項分布

$$P_n(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{3}{n}\right)^k\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n-k} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

に従う。

確率変数 X の積率母関数 $\phi_n(\theta)$ は、

$$\begin{aligned}\phi_n(\theta) &= \sum_{k=0}^{n} e^{k\theta}\cdot P_n(X=k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{k\theta}\cdot\binom{n}{k}\left(\frac{3}{n}\right)^k\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{3}{n}e^{\theta}\right)^k\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n-k}\\ &= \left\{\frac{3}{n}e^{\theta}+\left(1-\frac{3}{n}\right)\right\}^n \qquad (\because \text{二項定理})\end{aligned}$$

極限 $n\to\infty$ をとると、

$$\phi(\theta) = \lim_{n\to\infty}\phi_n(\theta) = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3}{n}e^{\theta}+\left(1-\frac{3}{n}\right)\right\}^n = \lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{3(e^{\theta}-1)}{n}\right\}^n$$

ここで、 $x = 3(e^{\theta}-1)/n$ とおくと、$\theta \neq 0$ かつ $n\to\infty$ のとき $x\to 0$ であることから、

$$\phi(\theta) = \lim_{n\to\infty}\phi_n(\theta) = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3(e^{\theta}-1)}{x}} = \lim_{x\to 0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^{3(e^{\theta}-1)}$$

$$\therefore\ \phi(\theta) = \exp\{3(e^{\theta}-1)\}$$

なお、上式は $\theta = 0$ のときも成り立つ。

上記から、二項分布

$$P_n(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{3}{n}\right)^k\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n-k} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

の極限分布は、平均 3 のポアソン分布

$$P(X=k) = \lim_{n\to\infty}P_n(X=k) = e^{-3}\frac{3^k}{k!} \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

になることがわかる。

つぎに、問題文より、$n = 1{,}000$ が十分大きい数字であるとみなせば、求める確率は

$$P_{1,000}(X=2) \cong e^{-3}\frac{3^2}{2!}$$

と近似できる。付表より指数関数の値を用いて計算すれば、

$$P_{1,000}(X=2) \cong e^{-3}\frac{3^2}{2!} = e^{-2}\cdot e^{-1}\cdot\frac{9}{2} = 0.1353\cdot 0.3679\cdot 4.5 \cong 0.2240$$

となる。

よって、解答は ⑥ （**B**） ⑦ （**D**） ⑧ （**J**）

（参考）

ポアソン分布による近似を用いずに直接計算した場合、

$$P_{1,000}(X=2)\ =\ \binom{1,000}{2}\left(\frac{3}{1,000}\right)^2\left(1-\frac{3}{1,000}\right)^{998}\ =\ 0.224154\ldots$$

であり、小数点以下第 3 位まで一致していることが確認できる。

（４）20 回ゲームを行った後の得点が 1,000,000 ポイント以上となるためには、20 回中 k 回以上勝たなくてはならないとすると、

$$1.50^k \times 0.70^{20-k} \geq 1{,}000{,}000 \div 1{,}000 = 1{,}000$$

$$\begin{aligned} k &\geq \frac{\log(1{,}000) - 20\log 0.70}{\log 1.5 - \log 0.70} \\ &= \frac{3\log 10 - 20 \times (\log 7 - \log 10)}{\log 1.5 - (\log 7 - \log 10)} \\ &= \frac{3 \times 2.3026 - 20 \times (1.9459 - 2.3026)}{0.4055 - (1.9459 - 2.3026)} \\ &= 18.4227\cdots \end{aligned}$$

となるため、

$$k \geq 19$$

よって、n 回ゲームをした結果、勝つ回数を X_n 回とすると、各ゲームで勝つ確率が 0.70 である二項分布

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} 0.70^k \times 0.30^{n-k} \qquad (k = 0,1,2,\cdots,n)$$

に従う。X_{20} の期待値と分散は、

$$E[X_{20}] = 20 \times 0.70 = 14$$
$$V[X_{20}] = 20 \times 0.70 \times 0.30 = 4.2$$

であるから、ゲーム回数が十分大きいとき、中心極限定理より $\dfrac{X_{20} - 14}{\sqrt{4.2}}$ の確率分布は標準正規分布で近似できるので、付表より、

$$P(X_{20} \geq 19) = P\left(\frac{X_{20} - 14}{\sqrt{4.2}} \geq \frac{19 - 14}{\sqrt{4.2}}\right) = P\left(\frac{X_{20} - 14}{\sqrt{4.2}} \geq 2.44\right) = 0.0073$$

となる。

次に、n 回ゲームを実施した結果、得点が 1,000,000 ポイント以上となるためには、n 回中 k 回以上勝たなくてはならないとすると、

$$1.50^k \times 0.70^{n-k} \geq 1{,}000{,}000 \div 1{,}000 = 1{,}000$$

$$\begin{aligned} k &\geq \frac{\log(1{,}000) - n\log 0.70}{\log 1.5 - \log 0.70} \\ &= \frac{3\log 10 - n \times (\log 7 - \log 10)}{\log 1.5 - (\log 7 - \log 10)} \\ &= \frac{3 \times 2.3026 - n \times (1.9459 - 2.3026)}{0.4055 - (1.9459 - 2.3026)} \\ &= 9.0630 + 0.4680n \end{aligned}$$

さらに、X_n の期待値と分散は、

$$E[X_n] = n \times 0.70 = 0.70n$$
$$V[X_n] = n \times 0.70 \times 0.30 = 0.21n$$

であることから、n 回ゲームを実施した結果、k 回以上勝つ確率が 95% 以上となるので、

$$P(X_n \geq k) = P\left(\frac{X_n - 0.70n}{\sqrt{0.21n}} \geq \frac{k - 0.70n}{\sqrt{0.21n}}\right) \geq 0.95$$

n が十分大きいとき、中心極限定理より $\dfrac{X_n - 0.70n}{\sqrt{0.21n}}$ の確率分布は標準正規分布で近似できるので

$$\frac{k - 0.70n}{\sqrt{0.21n}} \leq -u(0.05)$$

であればよい。

ここで、付表から $u(0.05) = 1.6449$ であるから、

$$k \leq 0.7n - u(0.05)\sqrt{0.21n} = 0.7n - 0.7538\sqrt{n}$$

したがって、

$$9.0630 + 0.4680n \leq 0.7n - 0.7538\sqrt{n}$$

であればよい。

これを $\sqrt{n}$ について解くと、$\sqrt{n} \geq 0$ であるから、

$$\sqrt{n} \geq 8.0824$$

したがって、

$$n \geq 65.3252$$

以上から、求める最小のゲーム回数 n は 66 である。

よって、解答は　⑨　（A）　⑩　（H）

（５）確率変数 X の期待値 $E[X]$ は、

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{6} \exp\left(-\left|\frac{x}{3}-\theta\right|\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{3\theta} \frac{x}{6} \exp\left(\frac{x}{3}-\theta\right) dx + \int_{3\theta}^{\infty} \frac{x}{6} \exp\left(-\frac{x}{3}+\theta\right) dx \\
&= \left[\frac{x}{2} \exp\left(\frac{x}{3}-\theta\right)\right]_{-\infty}^{3\theta} - \int_{-\infty}^{3\theta} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{x}{3}-\theta\right) dx + \left[-\frac{x}{2} \exp\left(-\frac{x}{3}+\theta\right)\right]_{3\theta}^{\infty} + \int_{3\theta}^{\infty} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x}{3}+\theta\right) dx \\
&= \frac{3\theta}{2} - \left[\frac{3}{2} \exp\left(\frac{x}{3}-\theta\right)\right]_{-\infty}^{3\theta} + \frac{3\theta}{2} + \left[-\frac{3}{2} \exp\left(-\frac{x}{3}+\theta\right)\right]_{3\theta}^{\infty} \\
&= 3\theta - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \\
&= 3\theta
\end{aligned}
$$

であり、仮定より、$E[X_1] = E[X_2] = E[X] = 3\theta$ である。

統計量 S の不偏性から、

$$E[S] = E\left[\alpha X_1 + \frac{1}{4} X_2\right] = 3\theta\left(\alpha + \frac{1}{4}\right) = \theta$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{12}$$

また、統計量 $T = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$ が θ の不偏推定量であるための必要十分条件は、

$$E[T] = E[\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2] = 3\theta(\beta_1 + \beta_2) = \theta$$

$$\therefore \beta_1 + \beta_2 = \frac{1}{3} \quad \cdots ①$$

であるから、①の条件の下で統計量 T の分散 $V[T]$ が最小となる β_1 、β_2 の組を見つければよい。仮定より、$V[X_1] = V[X_2] = V[X]$ に留意して、

$$V[T] = V[\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2] = V[X](\beta_1^2 + \beta_2^2)$$

①を $\beta_2 = \frac{1}{3} - \beta_1$ と変形して代入すると、

$$V[T] = V[X]\left\{\left(\frac{1}{3} - \beta_1\right)^2 + \beta_1^2\right\} = V[X]\left(2\beta_1^2 - \frac{2}{3}\beta_1 + \frac{1}{9}\right) = V[X]\left\{2\left(\beta_1 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{18}\right\}$$

したがって、$V[T]$ は $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{6}$ のとき最小値をとる。

よって、解答は　⑪ （Ｅ）　⑫ （Ｅ）　⑬ （Ｅ）

（注意）解答では、$V[X]$ を求めなかったが、$V[T]$ の最小性の証明には、本来は $V[X] \neq 0$ であることの確認が必要。実際、$V[X] = 18$ である。

（６）標本変量の従う分布は、

$$f(x;\theta)=\frac{1}{2\theta} \qquad (0\le x\le 2\theta)$$

であり、尤度関数は、$0\le x_1,x_2,\ldots,x_n\le 2\theta$ であるため、

$$L(\theta)=\left(\frac{1}{2\theta}\right)^n\le\left(\frac{1}{\mathrm{Max}(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\right)^n$$

で与えられる。

したがって、θ の最尤推定量 $T(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)$ は、$\mathrm{Max}(X_1,X_2,\cdots,X_n)/2$ であり、

問題文中の実現値 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ が得られた場合の θ の最尤推定値は、0.65 である。

次に、$\mathrm{Max}(X_1,X_2,\cdots,X_n)/2$ の確率密度関数 $g(x)$ を求める。

$$P\left(\frac{\mathrm{Max}(X_1,X_2,\cdots,X_n)}{2}\le x\right)=P(X_1\le 2x,X_2\le 2x,\cdots,X_n\le 2x)=\left(\frac{x}{\theta}\right)^n$$

より、

$$g(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\theta}\right)^n=\frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}$$

である。

次に、θ'_{L} を求める。

$$P\left(\theta'_{\mathrm{L}}<\frac{\mathrm{Max}(X_1,X_2,\cdots,X_n)}{2}<\theta'_{\mathrm{U}}\right)=\alpha$$

$$\Leftrightarrow\int_{\theta'_{\mathrm{L}}}^{\theta'_{\mathrm{U}}}g(x)\,dx=\alpha$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\theta'_{\mathrm{U}}}{\theta}\right)^n-\left(\frac{\theta'_{\mathrm{L}}}{\theta}\right)^n=\alpha$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\theta'_{\mathrm{L}}}{\theta}\right)^n=\left(\frac{\theta'_{\mathrm{U}}}{\theta}\right)^n-\alpha$$

$$\Leftrightarrow\theta'_{\mathrm{L}}=\theta\cdot\left(\left(\frac{\theta'_{\mathrm{U}}}{\theta}\right)^n-\alpha\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Leftrightarrow\theta'_{\mathrm{L}}=\theta\cdot(1-\alpha)^{1/n} \qquad (\because \theta'_{\mathrm{U}}=\theta\,)$$

このとき、

$$P\left(\theta'_{\mathrm{L}}<\frac{\mathrm{Max}(X_1,X_2,\cdots,X_n)}{2}<\theta'_{\mathrm{U}}\right)=P\left(\frac{\mathrm{Max}(X_1,X_2,\cdots,X_n)}{2}<\theta<\frac{\mathrm{Max}(X_1,X_2,\cdots,X_n)}{2\cdot(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}}\right)$$

であるから、

信頼区間の下限は、

$$\frac{\mathrm{Max}(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{2}=\frac{1.3}{2}=0.65$$

信頼区間の上限は、

$$\frac{\mathrm{Max}(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{2\cdot(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1.3}{2\cdot(1-0.95)^{\frac{1}{8}}} = 0.945\cdots$$

よって、解答は　⑭　（Ｑ）　⑮　（Ｑ）　⑯　（ＡＣ）

問題２.

（１）まず、等分散性の検定を行う。

Ａ組の不偏分散を u_x 、Ｂ組の不偏分散を u_y 、$F = u_y/u_x$ とおく。

仮定より、Ｂ組の不偏分散は、

$$u_y = n_y s_y^2/(n_y - 1) = 73.14285 \text{（cm）}$$

である。

$F = u_y/u_x > 1$ のとき、検定統計量は F であり、

棄却域は $F > F_{10-1}^{8-1}(0.05/2) = F_9^7(0.05/2) = 4.1970$ であるから、

$$u_y/u_x > 4.1970\ (> 1)$$

$$\therefore u_x < u_y/4.1970 = 17.42741 \text{（cm）}$$

$u_x = n_x s_x^2/(n_x - 1)$ より、

$$s_x^2 < 17.42741 \times \frac{n_x - 1}{n_x} = 15.68 \text{（cm}^2\text{）}$$

一方、$F = u_y/u_x < 1$ のとき、検定統計量は $1/F = u_x/u_y$ であり、

棄却域は $1/F > F_{8-1}^{10-1}(0.05/2) = F_7^9(0.05/2) = 4.8232$ であるから、

$$u_x/u_y > 4.8232\ (> 1)$$

$$\therefore u_x > u_y \times 4.8232 = 352.78259 \text{（cm）}$$

$u_x = n_x s_x^2/(n_x - 1)$ より、

$$s_x^2 > 352.78259 \times \frac{n_x - 1}{n_x} = 317.50 \text{（cm}^2\text{）}$$

次に、ウェルチの検定について考える。仮定より、$s_x^2 = 15.68 - 0.50 = 15.18$（cm²）である。

$$\text{検定統計量 } T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{s_x^2}{n_x - 1} + \dfrac{s_y^2}{n_y - 1}}} = 0.5470$$

棄却域を求めるために、まずは検定に用いる t 分布の自由度 φ を計算する。

$$c = \frac{\dfrac{s_x^2}{n_x - 1}}{\dfrac{s_x^2}{n_x - 1} + \dfrac{s_y^2}{n_y - 1}} = 0.15575$$

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{c^2}{n_x - 1} + \frac{(1 - c)^2}{n_y - 1} = 0.10452$$

$$\therefore\ \varphi = 9.56755 \fallingdotseq 10$$

したがって、棄却域は $|T| > t_{10}(0.05/2) = 2.2281$ であるから、帰無仮説 H_0' は採択される。

よって、<u>解答は　①（**G**）　②（**I**）　③（**F**）　④（**A**）　⑤（**A**）</u>

（２）問題文の表を、$P(X = x|\, H_0)$ に対して、昇順に並び替えると下表のとおりとなる。

x	1	7	3	5	9	4	8	10	6	2
$P(X = x \mid H_0)$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.09	0.11	0.52
$P(X = x \mid H_1)$	0.55	0.02	0.05	0.03	0.06	0.08	0.09	0.04	0.07	0.01

第 1 種の誤りの起こる確率 $P(X \in W|H_0)$ が 0.10 である棄却域 W は、

$$\begin{aligned} 0.10 &= 0.01 + 0.02 + 0.03 + 0.04 \\ &= 0.01 + 0.02 + 0.07 \\ &= 0.01 + 0.03 + 0.06 \\ &= 0.01 + 0.04 + 0.05 \\ &= 0.01 + 0.09 \\ &= 0.02 + 0.03 + 0.05 \\ &= 0.03 + 0.07 \\ &= 0.04 + 0.06 \end{aligned}$$

より、$\{1,7,3,5\}, \{1,7,8\}, \{1,3,4\}, \{1,5,9\}, \{1,10\}, \{7,3,9\}, \{3,8\}, \{5,4\}$ の8個である。
それぞれの第 2 種の誤りの起こる確率 $P(X \notin W|H_1)$ は 0.35, 0.34, 0.32, 0.36, 0.41,0.87,0.86,0.89 となり、その中での最小値は、0.32 である。

よって、解答は　⑥ （**H**）　⑦ （**E**）

（３）平均 2 のポアソン分布に従う確率変数を X とすると、

$$P(X=k)=e^{-2}\times\frac{2^k}{k!}\qquad(k=0,1,2,\cdots)$$

である。これを踏まえて以下の表を作成する。

受付件数	日数	ポアソン確率の値	理論的期待値	―	―	―
k	f_k	$p_k=P(X=k)$	$100p_k$	f_k-100p_k	$(f_k-100p_k)^2$	$\frac{(f_k-100p_k)^2}{100p_k}$
0	7	0.1353	13.53	−6.53	42.6409	3.15158
1	23	0.2706	27.06	−4.06	16.4836	0.60915
2	25	0.2706	27.06	−2.06	4.2436	0.15682
3	26	0.1804	18.04	7.96	63.3616	3.51228
4	14	0.0902	9.02	4.98	24.8004	2.74949
5～	5	0.0529	5.29	−0.29	0.0841	0.01590
計	100	1.0000	100	―	―	10.19522

ここで、すべての k に対して $f_k\geq 5$、$100p_k\geq 5$ であることから、階級をプールする必要がないこと、および未知母数が存在しないことを確認する。
したがって、帰無仮説 H_0 を「1 日のクレーム受付件数は平均 2 件のポアソン分布に従っている」として適合度の検定を行う場合、自由度 $6-1=5$ の χ^2 分布値と、検定統計量

$$T=\sum_{k=0}^{5}\frac{(f_k-100p_k)^2}{100p_k}=10.19522\fallingdotseq 10.2$$

を比較すればよい。したがって、

・有意水準 2.5% のとき、$\chi_5^2(0.025)=12.8325>10.2$ より、帰無仮説 H_0 は採択される。
・有意水準 5% のとき、$\chi_5^2(0.05)=11.0705>10.2$ より、帰無仮説 H_0 は採択される。
・有意水準 10% のとき、$\chi_5^2(0.10)=9.2364<10.2$ より、帰無仮説 H_0 は棄却される。

よって、解答は　⑧（**G**）　⑨（**A**）　⑩（**A**）　⑪（**B**）

（4）指数関数モデルにおいて、α および β を推定するため、$y' = \log y$ と変数変換することによって、$y' = \log\alpha + \beta x$ という線形モデルに変換して考える。

i	1	2	3	4
x	4.1	23.0	84.8	120.2
y	13.0	9.0	2.5	1.3
y'	2.565	2.1972	0.9163	0.2624

$\bar{x} = 58.025$ 、$\overline{y'} = 1.485225$ であるから、最小二乗法による回帰係数 α および β の推定値を求めると、

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})\left(y'_i - \overline{y'}\right)}{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2} = -0.02001$$

$$\log\hat{\alpha} = \overline{y'} - \hat{\beta}\bar{x} = 2.6463$$

$$\therefore\ \hat{\alpha} = e^{2.6463}$$

よって、解答は　⑫　**（C）**　⑬　**（H）**

（５）自己回帰移動平均モデル $ARMA(2,2)$

$$Y_t = 2 + aY_{t-1} + 0.1Y_{t-2} + \varepsilon_t - 0.1\varepsilon_{t-1} - b\varepsilon_{t-2}$$

をラグ作用素 L を用いて表すと、

$$\varphi(L)Y_t = 2 + \theta(L)\varepsilon_t$$

ここで、

$$\varphi(L) = 1 - aL - 0.1L^2, \quad \theta(L) = 1 - 0.1L - bL^2$$

である。

定常性を持つためには、特性方程式

$$\varphi(x) = 1 - ax - 0.1x^2 = 0$$

の解の絶対値がすべて 1 より大きければよい。

いま、$\varphi(x) = 0$ は判別式 $a^2 + 4 \times 0.1 > 0$ より常に 2 つの実数解を持つ。

$$\varphi(x) = 1 - ax - 0.1x^2 = -0.1(x + 5a)^2 + 1 + 2.5a^2$$

であることから、頂点の x 座標は、$-5a$ となる。

$\varphi(x)$ は上に凸な放物線であり、2 つの実数解をもつため、以下の（ア）（イ）（ウ）のいずれかを満たせばよい。

（ア）$\varphi(x) = 0$ の解がともに -1 より小さいとき、

$$\begin{cases} -5a < -1 \\ \varphi(-1) = 1 + a - 0.1 < 0 \end{cases}$$

これを解くと、$a < -0.9$ かつ $a > 0.2$ となり、これを満たす a は存在しない。

（イ）$\varphi(x) = 0$ の解のうち、一方は 1 より大きく、もう一方が -1 より小さいとき、

$$\begin{cases} \varphi(1) = 1 - a - 0.1 > 0 \\ \varphi(-1) = 1 + a - 0.1 > 0 \end{cases}$$

これを解くと、$-0.9 < a < 0.9$ となる。

（ウ）$\varphi(x) = 0$ の解がともに 1 より大きいとき、

$$\begin{cases} -5a > 1 \\ \varphi(1) = 1 - a - 0.1 < 0 \end{cases}$$

これを解くと、$a < -0.2$ かつ $a > 0.9$ となり、これを満たす a は存在しない。

したがって、定常性を持つための定数 a の範囲は、

$$-0.9 < a < 0.9 \quad ・・・（ア）$$

である。

反転可能であるためには、特性方程式

$$\theta(x) = 1 - 0.1x - bx^2 = 0$$

の解の絶対値がすべて 1 より大きければよい。

$b = 0$ のとき

$$\theta(x) = 1 - 0.1x = 0$$

を解くと、$x = 10 > 1$ となる。

以下、$b \neq 0$ のときを考える。

$$\theta(x) = -b\left(x + \frac{0.05}{b}\right)^2 + 1 + \frac{0.0025}{b}$$

であることから、頂点の x 座標は、$-0.05/b$ となる。

いま、題意より、$b \geq -0.0025$ であることより $\theta(x)=0$ は判別式 $0.1^2+4b \geq 0$ となることから、常に実数解を持つ。

$b=-0.0025$ のとき、実数解は１つであり、$\theta(x)=0$ を解くと、$x=20>1$ となる。

以下では、$b>-0.0025$ 、実数解が２つの場合を考える。

・$b>0$ のとき

$\theta(x)$ は上に凸な放物線となり、かつ頂点の x 座標は負値となるので、以下の（ア）または（イ）を満たせばよい。

（ア）$\theta(x)=0$ の解がともに -1 より小さいとき、

$$\begin{cases} -\dfrac{0.05}{b} < -1 \\ \theta(-1) = 1+0.1-b < 0 \end{cases}$$

これを解くと、$b<0.05$ かつ $b>1.1$ となり、これを満たす b は存在しない。

（イ）$\theta(x)=0$ の解のうち、一方は 1 より大きく、もう一方が -1 より小さいとき、

$$\begin{cases} \theta(1) = 1-0.1-b > 0 \\ \theta(-1) = 1+0.1-b > 0 \end{cases}$$

$b>0$ であることを踏まえてこれを解くと、$0<b<0.9$ となる。

・$b<0$ のとき

$\theta(x)$ は下に凸な放物線となり、$\theta(x)$ の頂点の x 座標は 20 より大きくなるため、$\theta(x)=0$ の解が 1 より大きくなるための条件は、

$$\theta(1) = 1-0.1-b > 0$$

$b<0$ であることを踏まえてこれを解くと、$-0.0025<b<0$ となる。

したがって、反転可能であるための定数 b の範囲は、

$$-0.0025 \leq b < 0.9 \quad ・・・（イ）$$

である。

最後に $a=0.9,\ b=0.2$ のとき、このモデルが識別可能であるかどうかを調べる。

$a=0.9$ のとき、

$$\varphi(x) = 1-0.9x-0.1x^2 = 0$$

より、$x=-10, 1$

$b=0.2$ のとき、

$$\theta(x) = 1-0.1x-0.2x^2 = 0$$

より、$x=-5/2, 2$

したがって、$\theta(x)=0$ の解の絶対値はすべて 1 以上であり、$\varphi(x)$ との共通解を持たないため、識別可能である。

以上から、「b は（イ）の範囲を満たしており、$\theta(x)=0$ が $\varphi(x)=0$ と共通解を持たないことから、識別可能である。」

よって、解答は　⑭（**B**）　⑮（**G**）　⑯（**A**）　⑰（**S**）　⑱（**J**）　⑲（**S**）　⑳（**E**）

（6）$\{N_t\}_{t\geq 0}$ は強度 λ のポアソン過程であることから、$t>0$ のとき、N_t はパラメータ λt のポアソン分布に従うため、

$$P(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \quad (t>0)$$

を満たす。問題文より、$0 \leq N_{3t} \leq N_{4t} = 1$ であることから、$k=0,1$ に対し、

$$\begin{aligned}
P(N_{3t} = k \mid N_{4t} = 1) &= \frac{P(N_{3t} = k \cap N_{4t} = 1)}{P(N_{4t} = 1)} \\
&= \frac{P(N_{3t} = k \cap N_{4t} - N_{3t} = 1-k)}{P(N_{4t} = 1)} \quad (\because \text{ポアソン過程の独立増分性}) \\
&= \frac{P(N_{3t} = k)P(N_{4t} - N_{3t} = 1-k)}{P(N_{4t} = 1)} \\
&= \frac{\frac{(3\lambda t)^k}{k!}e^{-3\lambda t} \cdot \frac{\{\lambda t\}^{1-k}}{(1-k)!}e^{-\lambda t}}{\frac{(4\lambda t)^1}{1!}e^{-4\lambda t}} \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{1-k} \quad (k=0,1)
\end{aligned}$$

よって、求める条件付き期待値 $E[N_{3t}|N_{4t}=1]$ は、

$$E[N_{3t}|N_{4t}=1] = \sum_{k=0}^{1} k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{1-k} = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

次に、確率変数 T_1, T_2 を $T_1 = X_1$、$T_2 = X_1 + X_2$ とおく。
$t>0$ に対し、

$$P(X_1 \leq t) = 1 - P(X_1 > t) = 1 - P(N_t = 0) = 1 - e^{-\lambda t}$$

より、X_1 は平均 $1/\lambda$ の指数分布に従うことが分かる。
また、ポアソン過程の独立増分性と定常性を用いると、$t>s>0$ に対し、

$$\begin{aligned}
P(X_2 \leq t|X_1 = s) &= 1 - P(X_2 > t|X_1 = s) \\
&= 1 - P(N_{t+s} - N_s = 0|X_1 = s) \\
&= 1 - P(N_{t+s} - N_s = 0) \\
&= 1 - P(N_t = 0) \\
&= 1 - e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

したがって、X_2 は X_1 と独立であり、平均 $1/\lambda$ の指数分布に従うことが分かる。

さて、$P(T_2 > 4T_1)$ について、X_2 と X_1 が独立であることを用いて、

$$\begin{aligned}
P(T_2 > 4T_1) &= P(T_2 - T_1 > 3T_1) \\
&= E[P(X_2 > 3X_1 \mid X_1)] \\
&= E\left[e^{-3\lambda X_1}\right] \\
&= \int_0^\infty e^{-3\lambda t} \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt
\end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-4\lambda t}\,dt$$

$$= \lambda \cdot \frac{1}{4\lambda}$$

$$= \frac{1}{4}$$

となる。

よって、解答は　㉑　**（C）**　㉒　**（B）**

問題３.

（１）X, Y を標準正規分布に従う独立な確率変数とすると、X と Y の同時確率密度関数は、

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \quad (-\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty)$$

となる。

いま、点 (X,Y) の極座標を考え、

$$X=\sqrt{R}\cos\Theta$$
$$Y=\sqrt{R}\sin\Theta$$

とおく。R と Θ の同時確率密度関数を求めるために、変換

$$\begin{array}{l} x=\sqrt{r}\cos\theta \\ y=\sqrt{r}\sin\theta \end{array} \ (0\le r<\infty,\ 0\le\theta<2\pi)$$

を考える。この変換のヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{\cos\theta}{2\sqrt{r}} & -\sqrt{r}\sin\theta \\ \frac{\sin\theta}{2\sqrt{r}} & \sqrt{r}\cos\theta \end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

であるから、R と Θ の同時確率密度関数 $f_{R,\Theta}(r,\theta)$ は、

$$\begin{aligned} f_{R,\Theta}(r,\theta)&=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r}{2}}\cdot\frac{1}{2} \\ &=\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{r}{2}} \ (0\le r<\infty,\ 0\le\theta<2\pi) \end{aligned}$$

となる。

したがって、R と Θ の周辺確率密度関数をそれぞれ $f_R(r)$、$f_\Theta(\theta)$ とすると、

$$f_R(r)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{r}{2}}\,d\theta=\frac{1}{2}e^{-\frac{r}{2}} \ (0\le r<\infty)$$

$$f_\Theta(\theta)=\int_0^{\infty}\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{r}{2}}\,dr=\frac{1}{2\pi} \ (0\le\theta<2\pi)$$

である。

ゆえに、R は平均２の指数分布に従い、Θ は区間 $(0,2\pi)$ 上の一様分布に従う。

また、$f_{R,\Theta}(r,\theta)=f_R(r)f_\Theta(\theta)$ であるから、R と Θ が独立であることもわかる。

次に、U を区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従う確率変数とし、R と Θ と同じ確率分布に従う確率変数 S、T をそれぞれ逆関数法で求めると、

$$S=-2\log U$$
$$T=2\pi U$$

となる。

U_1 と U_2 を区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従う独立な確率変数とし、改めて R と Θ と同じ確率分布に従う確率変数 S、T をそれぞれ U_1 と U_2 および上式から求めると、

$$S=-2\log U_1$$
$$T=2\pi U_2$$

となる。U_1 と U_2 が独立であるから、S と T も独立となる。

したがって、極座標から直交座標への変換を考え、

$$X = \sqrt{S}\cos T = (-2\log U_1)^{\frac{1}{2}}\cos(2\pi U_2)$$
$$Y = \sqrt{S}\sin T = (-2\log U_1)^{\frac{1}{2}}\sin(2\pi U_2)$$

とすると、これらはともに標準正規分布に従う独立な確率変数となる。これを、ボックス・マーラーの変換式という。

よって、解答は　①（E）　②（H）　③（B）　④（A）　⑤（J）　⑥（B）　⑦（I）　⑧（J）　⑨（I）　⑩（B）

（2）まず、$U_i\ (i = 1, 2)$ がともに区間 $(0, 1)$ 上の一様分布に従う互いに独立な確率変数であるとき、$2U_i - 1$ は区間 $(-1, 1)$ 上の一様分布に従う互いに独立な確率変数である。

したがって、

$$V_1 = 2U_1 - 1$$
$$V_2 = 2U_2 - 1$$

とおけば、(V_1, V_2) は 原点 O を中心とする正方形の領域

$$A = \{(V_1, V_2) \mid -1 \le V_1 \le 1, -1 \le V_2 \le 1\}$$

の上で一様に分布する。

このうち、原点 O を中心とする半径 1 の円

$$C = \{(V_1, V_2) \mid 0 \le V_1^2 + V_2^2 \le 1\}$$

に含まれる (V_1, V_2) のみを採用すると、(V_1, V_2) は、C 内に一様に分布する。

ここで、$W = V_1^2 + V_2^2$ として、点 (V_1, V_2) の極座標を考え、

$$V_1 = \sqrt{W}\cos\bar{\Theta}$$
$$V_2 = \sqrt{W}\sin\bar{\Theta}$$

とする。

V_1 と V_2 は独立であり、(V_1, V_2) が C 内に一様に分布するから、W と $\bar{\Theta}$ も独立である。また、V_1 と V_2 の同時確率密度関数 $f_{V_1,V_2}(v_1, v_2)$ は、

$$f_{V_1,V_2}(v_1, v_2) = \frac{1}{\text{円}\, C\, \text{の面積}} = \frac{1}{\pi} \qquad \left((v_1, v_2) \in C\right)$$

である。$0 \le W \le 1$ であることを踏まえ、(1) と同様に変換

$$v_1 = \sqrt{w}\cos\bar{\theta}, \quad v_2 = \sqrt{w}\sin\bar{\theta} \qquad (0 \le w \le 1,\ 0 \le \bar{\theta} < 2\pi)$$

を考えると、ヤコビアンも (1) と同様に

$$\frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(w, \bar{\theta})} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial w} & \dfrac{\partial v_1}{\partial \bar{\theta}} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial w} & \dfrac{\partial v_2}{\partial \bar{\theta}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\cos\bar{\theta}}{2\sqrt{w}} & -\sqrt{w}\sin\bar{\theta} \\ \dfrac{\sin\bar{\theta}}{2\sqrt{w}} & \sqrt{w}\cos\bar{\theta} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

となる。したがって、W と $\bar{\Theta}$ の同時確率密度関数 $f_{W,\bar{\Theta}}(w, \bar{\theta})$ は、

$$f_{W,\bar{\Theta}}(w,\bar{\theta})=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\pi}\qquad(0\leq w\leq 1,\ 0\leq\bar{\theta}<2\pi)$$

である。ゆえに、W の周辺確率密度関数 $f_W(w)$ は、

$$f_W(w)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\,d\bar{\theta}=1\qquad(0\leq w\leq 1)$$

であるから、W は区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従う。よって、$-2\log W$ は平均 2 の指数分布に従う。

さらに、$W>0$ のとき、

$$\cos\bar{\Theta}=\frac{V_1}{\sqrt{W}}$$

$$\sin\bar{\Theta}=\frac{V_2}{\sqrt{W}}$$

であるから、極座標から直交座標への変換を考えると、

$$X=\begin{cases}(-2\log W)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{V_1}{\sqrt{W}}=\sqrt{\dfrac{-2\log W}{W}}V_1 & \left((V_1,V_2)\neq(0,0)\right)\\ 0 & \left((V_1,V_2)=(0,0)\right)\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}(-2\log W)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{V_2}{\sqrt{W}}=\sqrt{\dfrac{-2\log W}{W}}V_2 & \left((V_1,V_2)\neq(0,0)\right)\\ 0 & \left((V_1,V_2)=(0,0)\right)\end{cases}$$

が、ともに標準正規分布に従う独立な確率変数となる。この手法を、極座標法という。
極座標法では、正方形 A 内の任意の点が円 C 内に落ちる確率が

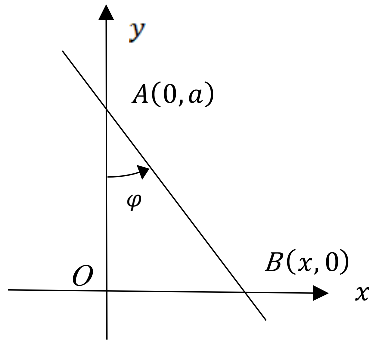
$$\frac{\text{円}\,C\,\text{の面積}}{\text{正方形}\,A\,\text{の面積}}=\frac{\pi}{4}$$

であるから、区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従う 2 つの独立な確率変数を 1 組生成する手順を平均 $4/\pi$ 回反復することにより、独立な標準正規分布に従う確率変数を 2 つ得ることになる。

よって、解答は　⑪　（Ｉ）　⑫　（Ｉ）　⑬　（Ｅ）

問題４.

（１）xy 座標軸上で点 $A(0,a)$, $(a>0)$ を通る直線を考える。この直線は、点 A を中心軸とした回転針のルーレットであり、針の止まる位置は回転の角度に関して一様であるとする。
このルーレットと x 軸との交点 B の x 座標 X の分布を求めたい。



点 O を xy 座標軸上の原点とし、針の位置は、y 軸と針がなす角 $\angle OAB$（rad）によって定まるとする。
針が y 軸から反時計回りに回転する方向を正、
時計回りに回転する方向を負とし、角 $\angle OAB$ を表す確率変数を φ（rad）とする。

φ を用いてルーレットと x 軸との交点の x 座標を表すと $X=a\tan\varphi$ である。
仮定から、φ は区間 $(-\pi/2,\pi/2)$ で一様に分布するので、$-\pi/2<\theta<\pi/2$ なる θ につき、

$$P\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi\leq\theta\right)=\frac{\theta+\frac{\pi}{2}}{\pi}=P(-\infty<X\leq a\tan\theta)$$

となる。
すなわち X の分布関数を F_X とすれば、

$$F_X(a\tan\theta)=\frac{\theta+\frac{\pi}{2}}{\pi}$$

となる。
両辺を θ で微分すれば、X の確率密度関数 f_X を用いて、

$$af_X(a\tan\theta)\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\pi}$$

が得られる。
したがって、$a\tan\theta=x$ とすると、X の確率密度関数 f_X は、

$$f_X(x)=\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}\quad\cdot\cdot\cdot(※)$$

と表される。
このことから、ルーレットと x 軸との交点のx 座標 X は確率密度関数（※）をもつことが分かる。（※）で $a=1$ とするとき、X は自由度１の t 分布に従う。

また、X が自由度１の t 分布に従うとき、$1/X$ が従う分布を考えると、

$$P\left(\frac{1}{X}\leq y\right)=P\left(\frac{1}{y}\leq X\right)=1-\int_{-\infty}^{\frac{1}{y}}\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx$$

より、

$$f_{\frac{1}{X}}(y)=\frac{d}{dy}P\left(\frac{1}{X}\leq y\right)=-\frac{1}{\pi\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}\times\left(-\frac{1}{y^2}\right)=\frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

となる。

次に、X^2 が従う分布を考える。$y>0$ とするとき、

$$P(X^2 \le y) = P\left(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\right) = 2P\left(0 \le X \le \sqrt{y}\right) = 2\int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{\pi(1+x^2)}dx$$

より、

$$f_{X^2}(y) = \frac{d}{dy}P(X^2 \le y) = \frac{2}{\pi(1+y)} \times \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\pi(1+y)\sqrt{y}}$$

となる。

したがって、$\frac{1}{X}$ は自由度1の t 分布に従い、X^2 は自由度 $(1,1)$ の F 分布に従うことが分かる。

よって、解答は　①（**C**）　②（**C**）　③（**H**）　④（**C**）　⑤（**B**）　⑥（**J**）　⑦（**E**）　⑧（**E**）　⑨（**F**）

（２）次に、（１）で求めた X の分布を活用し、

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

を計算する。

確率変数 Y,Z は互いに独立で、ともに確率密度関数（※）を持つとし、$a=1$ とする。（※）の X の確率密度関数 f_X を用いると、$|X|$ の分布関数は、$x>0$ に対し、

$$P(|X| \le x) = \int_0^x 2f_X(z)\,dz$$

と表せるから、$|Y|,|Z|$ の確率密度関数 $f_{|Y|}, f_{|Z|}$ は、

$$f_{|Y|}(x) = f_{|Z|}(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)} \qquad (x>0)$$

となる。ここで、

$$P(|Z|<|Y|) = \frac{1}{2}$$

である。

一方、$P(|Z|<|Y|)$ を積分形で表して変形すると、$0<z<y$ に対し、

$$P(|Z|<|Y|) = \iint_{0<z<y} f_{|Y|}(y)f_{|Z|}(z)\,dydz = \iint_{0<z<y} \frac{2}{\pi(1+y^2)}\frac{2}{\pi(1+z^2)}dydz = \frac{1}{2}$$

である。

左辺について、$z=uy$ と変数変換すると、$0<z<y$ であるため $0<u<1$ であり、$dz=ydu$ なので、

$$\frac{4}{\pi^2}\iint_{0<z<y}\frac{1}{(1+y^2)(1+z^2)}dydz = \frac{4}{\pi^2}\int_0^1\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+y^2)(1+u^2y^2)}ydydu$$

となる。
さらに、$y^2 = w$ と変数変換すると、$0 < y^2 < \infty$ であるため $0 < w < \infty$ であり、$2ydy = dw$ なので、

$$\frac{4}{\pi^2}\int_0^1\int_0^\infty \frac{1}{(1+y^2)(1+u^2y^2)}ydydu = \frac{2}{\pi^2}\int_0^1\int_0^\infty \frac{1}{(1+w)(1+u^2w)}dwdu$$

となる。
ここで、

$$\frac{1-u^2}{(1+w)(1+u^2w)} = \frac{1}{1+w} - \frac{u^2}{1+u^2w}$$

であるので、

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi^2}\int_0^1\int_0^\infty \frac{1}{(1+w)(1+u^2w)}dwdu &= \frac{2}{\pi^2}\int_0^1\int_0^\infty \frac{1}{1-u^2}\left(\frac{1}{1+w} - \frac{u^2}{1+u^2w}\right)dwdu \\ &= -\frac{2}{\pi^2}\int_0^1 \frac{1}{1-u^2}\left[\log\frac{1+u^2w}{1+w}\right]_0^\infty du \\ &= -\frac{4}{\pi^2}\int_0^1 \frac{\log u}{1-u^2}du\end{aligned}$$

となる。
ここで、一般に $0 < s < 1$ に対し、

$$\frac{1}{1-s} = \sum_{k=0}^\infty s^k$$

が成り立つので、$\log u = t$ と変数変換して式変形すると、$0 < u < 1$ であるため $-\infty < t < 0$ であり、$du = e^t dt$ なので

$$\int_0^1 \frac{\log u}{1-u^2}du = \int_0^1 \log u \sum_{k=0}^\infty u^{2k}\,du = \sum_{k=0}^\infty \int_{-\infty}^0 te^{(2k+1)t}\,dt$$

となる。ここで、

$$\int_{-\infty}^0 te^{(2k+1)t}\,dt = \left[\frac{te^{(2k+1)t}}{2k+1}\right]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \frac{e^{(2k+1)t}}{2k+1}dt = -\frac{1}{(2k+1)^2}\int_{-\infty}^0 e^t\,dt = -\frac{1}{(2k+1)^2}$$

なので、

$$\iint_{0<z<y} \frac{2}{\pi(1+y^2)}\frac{2}{\pi(1+z^2)}dydz = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{2}$$

より

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

となる。

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$$

であるので、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

が導出される。

よって、解答は　⑩（B）　⑪（J）　⑫（B）　⑬（I）　⑭（A）　⑮（K）　⑯（B）　⑰（F）　⑱（H）

（３）最後に、任意に互いに独立に選ばれた２つの自然数 a、b が互いに素となる確率を求める。

２つの自然数 a、b が互いに素である確率は、任意の素数 p に対し、a 、b の少なくとも一方が p の倍数でない確率と同値である。

a および b が 素数 p の倍数である確率は、それぞれ $1/p$ であるとする。

すると、求める確率 Pr は、

$$\mathrm{Pr} = \prod_{p:素数} \left\{1 - \frac{1}{p^2}\right\} = \frac{1}{\prod_{p:素数} \left\{\frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}}\right\}}$$

である。ここで、

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} = T$$

とする。両辺に $1/2^2$ をかけて辺々引くと、

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)T = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

となる。すなわち分母が２の倍数である項がすべて消去される。

さらにこの両辺に $1/3^2$ をかけると

$$\frac{1}{3^2}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)T = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{21^2} + \cdots$$

となるので辺々引くと

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)T = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots$$

となり、分母が３の倍数である項がすべて消去される。

以下、素数に関して同様の操作を繰り返すと、右辺は $1/1^2$ のみが残ることとなる。

したがって、

$$\prod_{p:素数} \left\{\frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}}\right\} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2}$$

と変形できるから、

$$\mathrm{Pr} = \frac{6}{\pi^2}$$

となる。

よって、解答は　⑲　**（C）**　⑳　**（A）**　㉑　**（I）**

問題５.

（１）生存時間 X が区間 $(0,1)$ 上の一様分布 $U(0,1)$ に従う場合を考える。

これは、例えば「1 時間以内に確実に死亡するがいつ死亡するかは不明」であるサンプルの生存時間と考えることができる。このサンプルの生存時間の測定値 $X_{(n)}$ の期待値と分散、$X_{(k)}$ と $X_{(l)}$ $(k<l)$ の相関係数を調べたい。

まず、$X_{(n)}$ の確率密度関数 $f_{X_{(n)}}$ を求める。微小量を dx で表すこととする。

$x_n \le X_{(n)} \le x_n + dx_n$ である事象の確率は、$X_1, X_2, \cdots, X_N$ のうち、$n-1$ 個が x_n より小、1 個が区間 (x_n, x_n+dx_n) に入り、残りの $N-n$ 個が x_n+dx_n より大、である事象の確率となる。

1 個が区間 (x_n, x_n+dx_n) に入る確率は $f(x_n)dx_n$ であるから、事象の確率は、

$$P\left(x_n \le X_{(n)} \le x_n + dx_n\right) = \frac{N!}{(n-1)!\,(N-n)!}\left\{\int_0^{x_n} f(x)dx\right\}^{n-1}\left\{\int_{x_n+dx_n}^{\infty} f(x)dx\right\}^{N-n} f(x_n)dx_n$$

と書ける。したがって $dx_n \to 0$ のとき、

$$f_{X_{(n)}}(x_n) = \frac{N!}{(n-1)!\,(N-n)!}\left\{\int_0^{x_n} f(x)dx\right\}^{n-1}\left\{\int_{x_n}^{\infty} f(x)dx\right\}^{N-n} f(x_n)$$

となる。母集団が一様分布 $U(0,1)$ に従う場合、

$$f_{X_{(n)}}(x_n) = \frac{N!}{(n-1)!\,(N-n)!}\, {x_n}^{n-1}(1-x_n)^{N-n} \qquad (0 < x_n < 1)$$

となるから、$X_{(n)}$ の期待値 $E\left[X_{(n)}\right]$ と分散 $V\left[X_{(n)}\right]$ を算出すると、

$$\begin{aligned}
E\left[X_{(n)}\right] &= \int_0^1 n\binom{N}{n}{x_n}^{n}(1-x_n)^{N-n}\,dx_n \\
&= n\binom{N}{n}B(n+1, N-n+1) \\
&= n\binom{N}{n}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(N-n+1)}{\Gamma(N+2)} \\
&= n\frac{N!}{n!\,(N-n)!}\frac{n!\,(N-n)!}{(N+1)!} \\
&= \frac{n}{N+1}
\end{aligned}$$

となる。同様にして $X_{(n)}$ の分散 $V\left[X_{(n)}\right]$ は、

$$V\left[X_{(n)}\right] = E\left[{X_{(n)}}^2\right] - E\left[X_{(n)}\right]^2$$

$$= \frac{n(n+1)}{(N+1)(N+2)} - \left(\frac{n}{N+1}\right)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(N+1) - n^2(N+2)}{(N+1)^2(N+2)}$$

$$= \frac{n(N-n+1)}{(N+1)^2(N+2)}$$

となる。

次に、$X_{(k)}$ と $X_{(l)}$ $(k < l)$ の同時確率密度関数 $f_{X_{(k)},X_{(l)}}$ について考える。
上記と同様にして考えると、

$$P\left(x_k \leq X_{(k)} \leq x_k + dx_k, x_l \leq X_{(l)} \leq x_l + dx_l\right)$$
$$= \frac{N!}{(k-1)!\,(l-k-1)!\,(N-l)!}\left\{\int_0^{x_k} f(x)dx\right\}^{k-1}\left\{\int_{x_k+dx_k}^{x_l} f(x)dx\right\}^{l-k-1}\left\{\int_{x_l+dx_l}^{\infty} f(x)dx\right\}^{n-l} f(x_k)dx_k$$
$$\times\ f(x_l)dx_l$$

と書けるので、$dx_k\ \to 0,\ dx_l\ \to 0$ のとき、

$$f_{X_{(k)},X_{(l)}}(x_k, x_l)$$
$$= \frac{N!}{(k-1)!\,(l-k-1)!\,(N-l)!}\left\{\int_0^{x_k} f(x)dx\right\}^{k-1}\left\{\int_{x_k}^{x_l} f(x)dx\right\}^{l-k-1}\left\{\int_{x_l}^{\infty} f(x)dx\right\}^{n-l} f(x_k)\ \times\ f(x_l)$$

となる。母集団が一様分布 $U(0,1)$ に従う場合、

$$f_{X_{(k)},X_{(l)}}(x_k, x_l) = \frac{N!}{(k-1)!\,(l-k-1)!\,(N-l)!}{x_k}^{k-1}(x_l - x_k)^{l-k-1}(1-x_l)^{N-l} \qquad (0 < x_k < x_l < 1)$$

となるから、$X_{(k)}X_{(l)}$ の期待値 $E\left[X_{(k)}X_{(l)}\right]$ は、

$$E\left[X_{(k)}X_{(l)}\right] = \iint_{0<x_k<x_l<1} \frac{N!}{(k-1)!\,(l-k-1)!\,(N-l)!}{x_k}^{k}x_l(x_l - x_k)^{l-k-1}(1-x_l)^{N-l}\,dx_k dx_l$$
$$= \frac{N!}{(k-1)!\,(l-k-1)!\,(N-l)!}\int_0^1 x_l(1-x_l)^{N-l}\left\{\int_0^{x_l} {x_k}^{k}(x_l - x_k)^{l-k-1}\,dx_k\right\}dx_l$$

ここで、$t = \dfrac{x_k}{x_l}$ と変数変換すると、$0 < x_k < x_l$ であるため、$0 < \dfrac{x_k}{x_l} = t < \dfrac{x_l}{x_l} = 1$ であり、

$dx_k = x_l dt$ なので、

$$E\left[X_{(k)}X_{(l)}\right] = \frac{N!}{(k-1)!\,(l-k-1)!\,(N-l)!}\int_0^1 x_l(1-x_l)^{N-l}\left\{\int_0^1 (tx_l)^k {x_l}^{l-k-1}(1-t)^{l-k-1}\,x_l dt\right\}dx_l$$

$$= \frac{N!}{(k-1)!\,(l-k-1)!\,(N-l)!}\int_0^1 x_l{}^{l+1}(1-x_l)^{N-l}\left\{\int_0^1 t^k(1-t)^{l-k-1}\,dt\right\}dx_l$$

$$= \frac{N!}{(k-1)!\,(l-k-1)!\,(N-l)!}\times B(l+2, N-l+1)\times B(k+1, l-k)$$

$$= \frac{N!}{(k-1)!\,(l-k-1)!\,(N-l)!}\times\frac{\Gamma(l+2)\Gamma(N-l+1)}{\Gamma(N+3)}\times\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(l-k)}{\Gamma(l+1)}$$

$$= \frac{N!}{(k-1)!\,(l-k-1)!\,(N-l)!}\times\frac{(l+1)!\,(N-l)!}{(N+2)!}\times\frac{k!\,(l-k-1)!}{l!}$$

$$= \frac{k(l+1)}{(N+1)(N+2)}$$

したがって、$X_{(k)}$ と $X_{(l)}$ の共分散は $\mathrm{Cov}\left(X_{(k)}, X_{(l)}\right)$ は、

$$\mathrm{Cov}\left(X_{(k)}, X_{(l)}\right) = E\left[X_{(k)}X_{(l)}\right] - E\left[X_{(k)}\right]E\left[X_{(l)}\right] = \frac{k(N-l+1)}{(N+1)^2(N+2)}$$

となる。

$X_{(k)}$ と $X_{(l)}$ の相関係数 $\rho\left(X_{(k)}, X_{(l)}\right)$ は、

$$\rho\left(X_{(k)}, X_{(l)}\right) = \frac{\mathrm{Cov}\left(X_{(k)}, X_{(l)}\right)}{\sqrt{V\left[X_{(k)}\right]}\sqrt{V\left[X_{(l)}\right]}} = \sqrt{\frac{k(N-l+1)}{l(N-k+1)}}$$

となる。

よって、解答は　①（**B**）　②（**A**）　③（**E**）　④（**Q**）　⑤（**A**）　⑥（**G**）　⑦（**H**）　⑧（**N**）　⑨（**A**）　⑩（**A**）　⑪（**I**）　⑫（**H**）　⑬（**C**）　⑭（**B**）　(⑤と⑥は順不同、⑩と⑪と⑫は順不同)

（２）次に、生存時間 X が平均 θ $(\theta > 0)$ の指数分布に従う場合を考える。

これは、例えば「劣化せず、死亡は偶然の事故によって発生する」サンプルの生存時間と考えることができる。このサンプルの生存時間の測定値 $X_{(n)}$ の期待値と分散、$X_{(k)}$ と $X_{(l)}$ $(k < l)$ の相関係数を調べたい。

$X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}$ の同時確率密度関数は、（１）の場合と同様に考えて、

$$f_{X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{N!}{(N-n)!}\left\{\exp\left(-\frac{x_n}{\theta}\right)\right\}^{N-n}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x_i}{\theta}\right)$$

$$= \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{1}{\theta}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{\theta}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i + (N-n)x_n\right\}\right]$$

となる。

ここで、

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i + (N-n)x_n$$

が成り立つように、$y_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ を

$$y_i = c_i(x_i - x_{i-1})$$

とおく。ただし、$x_0 = 0$ とする。

すると、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} y_i &= c_n(x_n - x_{n-1}) + c_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + c_1(x_1 - x_0)\\ &= c_n x_n + (c_{n-1} - c_n)x_{n-1} + \cdots + (c_1 - c_2)x_1\end{aligned}$$

であるから、

$$c_n = N-n+1, c_{n-1} = N-n+2, \cdots, c_1 = N$$

となるので、

$$c_i = N-i+1 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

となることが分かる。

いま、確率変数 $Y_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ を、

$$Y_i = (N-i+1)\left(X_{(i)} - X_{(i-1)}\right)$$

として定める。ただし、$X_{(0)} = 0$ とする。

対角線より右上の行列成分がすべて 0 である下三角行列の行列式は、

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \lambda_2 & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & * & \lambda_3 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & * & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & * & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & * & \ddots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

となることを用いると、ヤコビアンは、

$$\begin{aligned} \frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial y_3}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \frac{\partial y_n}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & (N-1) & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & (N-2) & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & (N-n+1) \end{vmatrix} \\ &= \frac{N!}{(N-n)!} \end{aligned}$$

である。
したがって、$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ の同時確率密度関数は、

$$\begin{aligned} f_{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n}(y_1, y_2, \cdots, y_n) &= f_{X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)} \right| \\ &= \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{\theta} \left\{ \sum_{i=1}^{n} y_i \right\} \right] \frac{(N-n)!}{N!} \\ &= \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{\theta} \left\{ \sum_{i=1}^{n} y_i \right\} \right] \\ &= \prod_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{y_i}{\theta} \right) \right\} \end{aligned}$$

となるから、$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ は互いに独立に平均 θ の指数分布に従うことが分かる。
ここで、$X_{(n)}$ は、$Y_i \ (i = 1,2, \cdots, n)$ を用いて、

$$X_{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{N-i+1}$$

と書けることを用いると、$X_{(n)}$ の期待値 $E\left[X_{(n)}\right]$ は、

$$E\left[X_{(n)}\right]= E\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{N-i+1}\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{E[Y_i]}{N-i+1}=\sum_{i=N-n+1}^{N}\frac{\theta}{i}$$

となる。

$X_{(n)}$ の分散 $V\left[X_{(n)}\right]$ は、

$$V\left[X_{(n)}\right]= V\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{N-i+1}\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{V[Y_i]}{(N-i+1)^2}=\sum_{i=N-n+1}^{N}\frac{\theta^2}{i^2}$$

となる。

また、$X_{(k)}$ と $X_{(l)}$ $(k<l)$ の共分散は、

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(X_{(k)},X_{(l)}\right)&= \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{Y_i}{N-i+1},\sum_{i=1}^{l}\frac{Y_i}{N-i+1}\right)\\&=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\mathrm{Cov}\left(\frac{Y_i}{N-i+1},\frac{Y_j}{N-j+1}\right)\end{aligned}$$

$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ は互いに独立であるから、上の式で $i\neq j$ の項の共分散はゼロである。
したがって、

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(X_{(k)},X_{(l)}\right)&=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Cov}\left(\frac{Y_i}{N-i+1},\frac{Y_i}{N-i+1}\right)\\&=\sum_{i=1}^{k}V\left[\frac{Y_i}{N-i+1}\right]\\&=\sum_{i=1}^{k}\frac{V[Y_i]}{(N-i+1)^2}\\&=\sum_{i=N-k+1}^{N}\frac{\theta^2}{i^2}\end{aligned}$$

となる。

$X_{(k)}$ と $X_{(l)}$ の相関係数 $\rho\left(X_{(k)},X_{(l)}\right)$ は、

$$\rho\left(X_{(k)},X_{(l)}\right)=\frac{\mathrm{Cov}\left(X_{(k)},X_{(l)}\right)}{\sqrt{V\left[X_{(k)}\right]}\sqrt{V\left[X_{(l)}\right]}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=N-k+1}^{N}\frac{1}{i^2}}{\sum_{i=N-l+1}^{N}\frac{1}{i^2}}}$$

となる。

よって、<u>解答は ⑮（Ｏ） ⑯（Ｂ） ⑰（Ｆ） ⑱（Ｆ） ⑲（Ｈ） ⑳（Ｃ） ㉑（Ｂ） ㉒（Ａ） ㉓（Ｄ） ㉔（Ｆ） ㉕（Ｊ） ㉖（Ｆ）</u>

問題１.

（1）	①	（F）	3 点	（4）	⑨	（A）	3 点
	②	（F）	2 点		⑩	（H）	2 点
（2）	③	（F）	2 点	（5）	⑪	（E）	3 点
	④	（H）	2 点		⑫	（E）	完答で 2 点
	⑤	（G）	1 点		⑬	（E）	
（3）	⑥	（B）	2 点	（6）	⑭	（Q）	3 点
	⑦	（D）	2 点		⑮	（Q）	1 点
	⑧	（J）	1 点		⑯	（A C）	1 点

問題２.

（1）	①	（G）	1 点	（4）	⑫	（C）	3 点
	②	（I）	1 点		⑬	（H）	2 点
	③	（F）	1 点	（5）	⑭	（B）	完答で 2 点
	④	（A）	1 点		⑮	（G）	
	⑤	（A）	1 点		⑯	（A）	完答で 1 点
（2）	⑥	（H）	2 点		⑰	（S）	
	⑦	（E）	3 点		⑱	（J）	完答で 1 点
（3）	⑧	（G）	3 点		⑲	（S）	
	⑨	（A）	完答で 2 点		⑳	（E）	1 点
	⑩	（A）		（6）	㉑	（C）	3 点
	⑪	（B）			㉒	（B）	2 点

問題３.

（1）	①	（E）	2 点	（1）	⑦	（I）	完答で 1 点
	②	（H）	1 点		⑧	（J）	
	③	（B）	1 点		⑨	（I）	
	④	（A）	1 点		⑩	（B）	
	⑤	（J）	1 点	（2）	⑪	（I）	完答で 1 点
	⑥	（B）	1 点		⑫	（I）	
					⑬	（E）	1 点

問題４.

（１）	①	（C）	１点	（２）	⑬	（I）	完答で１点
	②	（C）	完答で２点		⑭	（A）	
	③	（H）			⑮	（K）	
	④	（C）	１点		⑯	（B）	
	⑤	（B）	完答で２点		⑰	（F）	１点
	⑥	（J）			⑱	（H）	１点
	⑦	（E）	完答で１点	（３）	⑲	（C）	１点
	⑧	（E）			⑳	（A）	完答で１点
	⑨	（F）	１点		㉑	（I）	
（２）	⑩	（B）	完答で１点				
	⑪	（J）					
	⑫	（B）	１点				

問題５.

（１）	①	（B）	完答で２点	（２）	⑮	（O）	完答で１点
	②	（A）			⑯	（B）	
	③	（E）			⑰	（F）	
	④	（Q）	完答で２点 ⑤⑥は順不同		⑱	（F）	完答で１点
	⑤	（A）			⑲	（H）	
	⑥	（G）			⑳	（C）	
	⑦	（H）	２点		㉑	（B）	
	⑧	（N）	２点		㉒	（A）	
	⑨	（A）	完答で１点 ⑩⑪⑫は順不同		㉓	（D）	完答で１点
	⑩	（A）			㉔	（F）	
	⑪	（I）			㉕	（J）	
	⑫	（H）			㉖	（F）	１点
	⑬	（C）	１点				
	⑭	（B）	１点				

以上