損保数理（問題）

特に断りがないかぎり、消費税については考慮しないこととする。また、免責金額および支払限度額は１事故あたりのものであり、各クレームは独立であるものとする。

問題１． 次のⅠ～Ⅴの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。　各４点　（計２０点）

Ⅰ．ある自動車保険に関する過去４年間の事故件数は、次表のとおりであったとする。
車種Ｂの事故件数 y について、説明変数を車種Ａの事故件数 x とした回帰直線を最小二乗法により求めるとき、回帰式は、$y=$ $\boxed{①}$ $+$ $\boxed{②}$ x となる。また、y をこの回帰直線によって推定するときの誤差分散の不偏推定値は、$\boxed{③}$ となる。このとき、①～③に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちどれか。

	2017 年度	2018 年度	2019 年度	2020 年度
車種Ａ	60	62	64	66
車種Ｂ	52	57	53	58

【①の選択肢】
（Ａ）10.4　（Ｂ）10.9　（Ｃ）11.4　（Ｄ）11.9　（Ｅ）12.4
（Ｆ）12.9　（Ｇ）13.4　（Ｈ）13.9　（Ｉ）14.4　（Ｊ）14.9

【②の選択肢】
（Ａ）0.60　（Ｂ）0.62　（Ｃ）0.64　（Ｄ）0.66　（Ｅ）0.68
（Ｆ）0.70　（Ｇ）0.72　（Ｈ）0.74　（Ｉ）0.76　（Ｊ）0.78

【③の選択肢】
（Ａ）5.4　（Ｂ）5.7　（Ｃ）6.0　（Ｄ）6.3　（Ｅ）6.6
（Ｆ）6.9　（Ｇ）7.2　（Ｈ）7.5　（Ｉ）7.8　（Ｊ）8.1

Ⅱ．ある保険契約の損害額 X は、確率密度関数 $f(x)=\dfrac{1}{\beta}\exp\left(-\dfrac{1}{\beta}x\right)\quad(x\geq 0)$ の指数分布に従うことがわかっている。この保険契約はエクセス方式の免責金額として 2 が設定されており、過去 6 件の保険金の支払額が、次のとおり記録されている。

7　6　15　1　16　3

このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。なお、必要があれば $e=2.718$ 、$e^{\frac{1}{3}}=1.396$ 、$e^{\frac{1}{5}}=1.221$ を使用すること。

（１）過去 6 件の保険金の支払額を用いて指数分布のパラメータ β をモーメント法により推定した場合、推定値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）4　（Ｂ）5　（Ｃ）6　（Ｄ）7　（Ｅ）8
（Ｆ）9　（Ｇ）10　（Ｈ）11　（Ｉ）12　（Ｊ）13

（２）この保険契約の免責金額を廃止した場合、免責金額を廃止する前と比較した保険会社の支払保険金の期待値の増加率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、免責金額を廃止する前の保険会社の支払保険金の期待値は、保険金支払いとならない事故も含んだすべての契約に対する支払保険金の期待値とする。ただし、パラメータ β は（１）で選択した数値を用いることとする。

（Ａ）13%　（Ｂ）16%　（Ｃ）19%　（Ｄ）22%　（Ｅ）25%
（Ｆ）28%　（Ｇ）31%　（Ｈ）34%　（Ｉ）37%　（Ｊ）40%

Ⅲ．　Lundberg モデルにおいて、期首サープラスはu_0、クレーム件数は平均 10 のポアソン分布、個々のクレーム額の分布の確率密度関数は $f\left(x\right)=\dfrac{4}{\Gamma\left(3.5\right)}e^{-4x}\left(4x\right)^{2.5}$ $\left(x\geq 0\right)$に従うとき、Lundberg の不等式は、期首サープラスu_0、破産確率$\varepsilon\left(u_0\right)$、調整係数$R$を用いて下式のとおり表される。

$\varepsilon\left(u_0\right)<e^{-Ru_0}$

また、期間$[0,t]$で受け取る収入保険料総額は、当該期間でのクレーム累計額の期待値μ_tに安全割増率θを考慮した$P_t=(1+\theta)\mu_t$にて表されることとする。

$u_0=8$のとき、Lundberg の不等式を用いて保険会社にとって最も保守的に評価した破産確率をe^{-2}まで許容することとした場合、必要な安全割増率θに最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）0.10	（Ｂ）0.12	（Ｃ）0.14	（Ｄ）0.16	（Ｅ）0.18
（Ｆ）0.20	（Ｇ）0.22	（Ｈ）0.24	（Ｉ）0.26	（Ｊ）0.28

Ⅳ. ある保険会社の賠償責任保険は 1 事故あたりのクレーム額の分布が平均 1 億円の指数分布に従うことがわかっている。この保険会社は、出再割合 50%の比例再保険を特約再保険として手配しており、さらに保有部分に対してエクセスポイント 2 億円、カバーリミット 2 億円の超過損害額再保険を手配することとした。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。なお、必要があれば$e^{-1} = 0.368$を使用すること。

（1）元受保険金期待値に対する、両再保険からの再保険金回収期待値合計の割合に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）50.6%　（B）50.9%　（C）51.2%　（D）51.5%　（E）51.8%
（F）52.1%　（G）52.4%　（H）52.7%　（I）53.0%　（J）53.3%

（2）比例再保険がある場合の両再保険からの再保険金回収期待値合計に対する、比例再保険がない場合（超過損害額再保険のみ）の再保険からの再保険金回収期待値の割合に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）18.5%　（B）19.0%　（C）19.5%　（D）20.0%　（E）20.5%
（F）21.0%　（G）21.5%　（H）22.0%　（I）22.5%　（J）23.0%

V．コピュラにつき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）以下のイ～ハのうち、正しいものの組み合わせとして最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

イ．周辺分布が連続である場合、同時分布のコピュラは一意に定まる。

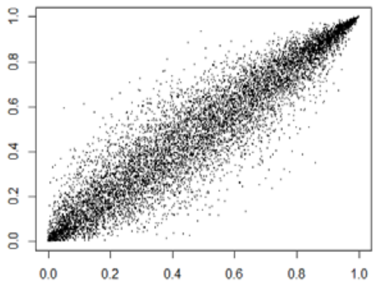
ロ．2 次元の場合、共単調コピュラ、反単調コピュラはそれぞれコピュラの上限、下限となる。3 次元以上の場合は、共単調コピュラはコピュラの上限となるが、反単調コピュラは存在しない。

ハ．ケンドールの τ は周辺分布に依存しない尺度であり、コピュラのみを用いて $4\int_0^1\int_0^1 C(u_1,u_2)\,dC(u_1,u_2)$ と表現することができる。

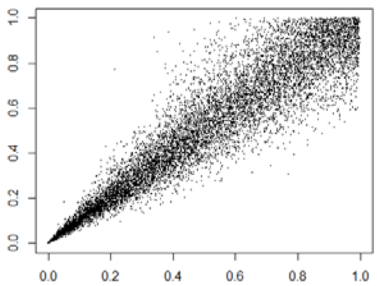
（A）全て正しい　　**（B）**イ、ロのみ正しい
（C）イ、ハのみ正しい　　**（D）**ロ、ハのみ正しい
（E）イのみ正しい　　**（F）**ロのみ正しい
（G）ハのみ正しい　　**（H）**全て誤り

（2）次の①～③はそれぞれ、ケンドールの τ が 0.8 となるアルキメデス型コピュラを持つ同時分布（周辺分布はいずれも[0,1]上の一様分布）から、10,000 個の標本をプロットしたものである。①～③のプロットに対応するコピュラとして最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

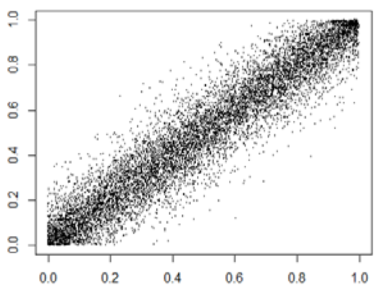
①



②



③



【①～③の選択肢】
（A）フランク・コピュラ
（B）グンベル・コピュラ
（C）クレイトン・コピュラ

問題２． 次のⅠ～Ⅴの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。　　　　　　　　　　　　Ⅰ、Ⅱ、Ⅳ、Ⅴ：各６点　Ⅲ：７点　（計３１点）

Ⅰ．ある事故の発生による入院日数に応じて、保険金を支払う保険商品があり、契約集団Ａに対して販売を行っている。契約集団Ａの入院日数 X_A は幾何分布 $f\left(x_A\right)=0.2\left(1-0.2\right)^{x_A-1}$ $\left(x_A=1,2,3,\cdots\right)$ に従うことがわかっており、保険金支払額は入院日数 X_A に応じて、$g\left(x_A\right)=40x_A$ $\left(x_A=1,2,3,\cdots\right)$ となっている。

この保険商品を新たに契約集団Ｂに対して販売することとなった。契約集団Ｂの入院日数 X_B は幾何分布 $f\left(x_B\right)=0.125\left(1-0.125\right)^{x_B-1}$ $\left(x_B=1,2,3,\cdots\right)$ に従うことがわかっており、平均入院日数が契約集団Ａよりも長いため、この保険商品に対して免責金額などを設定し、1 件あたりの保険金支払額の期待値を契約集団Ａ以下にすることを検討する。

このとき、次の（１）～（３）の各問に答えなさい。なお、必要があれば、$\log 2=0.693$、$\log 3=1.099$、$\log 5=1.609$、$\log 7=1.946$ を使用すること。

（１）契約集団Ｂに対して販売する保険商品の保険金支払額を $g\left(x_B\right)=40\alpha x_B$ $\left(x_B=1,2,3,\cdots、0\le\alpha\le 1\right)$ とする。保険金支払額の期待値を契約集団Ａ以下にするためには、α を $\boxed{\quad ① \quad}$ 以下にする必要がある。①に当てはまる数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、40α の値が整数となるように α を設定するものとする。

（Ａ） 0.525　**（Ｂ）** 0.550　**（Ｃ）** 0.575　**（Ｄ）** 0.600　**（Ｅ）** 0.625
（Ｆ） 0.650　**（Ｇ）** 0.675　**（Ｈ）** 0.700　**（Ｉ）** 0.725　**（Ｊ）** 0.750

（２）（１）の代わりに、契約集団Ｂに対して販売する保険商品に対して、免責金額を設定することで、保険金支払額を以下のとおりとする。

$$g\left(x_B\right)=\begin{cases}0 & \left(x_B=1,2,\cdots,\beta\right)\\ 40\left(x_B-\beta\right) & \left(x_B=\beta+1,\beta+2,\cdots\right)\end{cases}$$

保険金支払額の期待値を契約集団Ａ以下にするためには、β を $\boxed{\quad ② \quad}$ 以上にする必要がある。②に当てはまる数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、保険金支払額の期待値の計算においては、保険会社の支払対象とならない事故についても<u>含める</u>ものとする。

（Ａ） 2　**（Ｂ）** 3　**（Ｃ）** 4　**（Ｄ）** 5　**（Ｅ）** 6
（Ｆ） 7　**（Ｇ）** 8　**（Ｈ）** 9　**（Ｉ）** 10　**（Ｊ）** 11

（３）（１）、（２）の代わりに、契約集団Ｂに対して販売する保険商品に対して、支払限度額を設定することで、保険金支払額を以下のとおりとする。

$$g\left(x_B\right)=\begin{cases}40x_B & \left(x_B=1,2,\cdots,\gamma\right)\\ 40\gamma & \left(x_B=\gamma+1,\gamma+2,\cdots\right)\end{cases}$$

保険金支払額の期待値を契約集団Ａ以下にするためには、γ を $\boxed{\quad ③ \quad}$ 以下にする必要がある。
③に当てはまる数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A） 2	**（B）** 3	**（C）** 4	**（D）** 5	**（E）** 6
（F） 7	**（G）** 8	**（H）** 9	**（I）** 10	**（J）** 11

Ⅱ．4 月 1 日から翌年 3 月 31 日までを事業年度としている保険会社がある。この保険会社が販売した 2021 年 11 月期央契約で満期返戻金 80、保険期間 5 年の年払積立保険について、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

なお、予定契約消滅率を考慮した現価率を 0.95 とする。

（１）2024 年 3 月事業年度末から第 3 保険年度末までの期間は（ $\boxed{\text{①}}$ ／ $\boxed{\text{②}}$ ）年となることから、平準式積立保険料を採用した場合、2024 年 3 月事業年度末の払戻積立金は $\boxed{\text{③}}$ となる。①、②のそれぞれに当てはまる 1 桁の数字を解答用紙の所定の欄にマークしなさい。また、③に当てはまる数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

【③の選択肢】

（A）43.1	（B）43.3	（C）43.5	（D）43.7	（E）43.9
（F）44.1	（G）44.3	（H）44.5	（I）44.7	（J）44.9

（２）チルメル式積立保険料を採用した場合、第 3 保険年度末の払戻積立金が、（１）で求めた払戻積立金（平準式積立保険金を採用した場合の 2024 年 3 月事業年度末の払戻積立金）と等しくなった。このとき、初年度のチルメル式積立保険料に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）11.1	（B）11.3	（C）11.5	（D）11.7	（E）11.9
（F）12.1	（G）12.3	（H）12.5	（I）12.7	（J）12.9

余白ページ

Ⅲ．危険標識を性別（男性か女性か）および運転免許証区分（ゴールドかゴールド以外か）の 2 区分で設定している自動車保険があり、その実績クレーム単価のデータが下表のとおりであったとする。

<クレーム単価>

	ゴールド	ゴールド以外
男性	a	b
女性	c	d

ここで(a,b,c,d)はそれぞれ整数であり、以下の関係が成り立つことがわかっている。

$a:b=1:3$
$a:c=1:1$
$a:d=1:2$

性別・運転免許証区分別のクレーム単価 $Y_i\ \left(i=1,2,3,4\right)$ を一般化線形モデル、すなわち、Y_iの従う

指数型分布族をガンマ分布 $f(y_i;\mu_i,\phi)=\dfrac{y_i^{-1}}{\Gamma(1/\phi)}\left(\dfrac{y_i}{\mu_i\phi}\right)^{\frac{1}{\phi}}\exp\left(-\dfrac{y_i}{\mu_i\phi}\right)$ $\left(\mu_i=E(Y_i),0<\phi<\infty\right)$、リン

ク関数を$g(x)=\log(x)$とし、次のとおり定義される説明変数x_{ij} $\left(i=1,2,3,4\ ,\ j=1,2,3\right)$を用いて、

$\mu_i=g^{-1}\left(\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\beta_3x_{i3}\right)$と表されるモデルを用いて分析する。

$$x_{i1}=\begin{cases}1\ （男性の場合）\\0\ （女性の場合）\end{cases}\qquad x_{i2}=\begin{cases}1\ （女性の場合）\\0\ （男性の場合）\end{cases}\qquad x_{i3}=\begin{cases}1\ \qquad（ゴールドの場合）\\0\ （ゴールド以外の場合）\end{cases}$$

ここでβ_1,β_2,β_3はパラメータであり、最尤法で推定する。このとき、次の（1）～（3）の各問に答えなさい。

（1）パラメータβ_1,β_2,β_3が満たす連立方程式として、以下の式の①～④に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。ここで、以下の式のlは対数尤度関数である。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

$$\phi\frac{\partial l}{\partial\beta_1}=\frac{a}{\boxed{①}}+\frac{b}{\boxed{②}}-2=0$$

$$\phi\frac{\partial l}{\partial\beta_2}=\frac{c}{\boxed{③}}+\frac{d}{\boxed{④}}-2=0$$

$$\phi\frac{\partial l}{\partial\beta_3}=\frac{a}{\boxed{①}}+\frac{c}{\boxed{③}}-2=0$$

（A） e^{β_1}　（B） e^{β_2}　（C） e^{β_3}　（D） $e^{\beta_1+\beta_2}$　（E） $e^{\beta_1+\beta_3}$
（F） $e^{\beta_2+\beta_3}$　（G） $e^{\beta_1\beta_2}$　（H） $e^{\beta_1\beta_3}$　（I） $e^{\beta_2\beta_3}$
（J）いずれにも該当しない

（2）表のクレーム単価を用いて一般化線形モデルで計算した場合、「男性かつゴールド」のクレーム単価の期待値が 300 となった。このとき、クレーム単価「a」の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）260　（B）265　（C）270　（D）275　（E）280
（F）285　（G）290　（H）295　（I）300　（J）305

（3）タリフ理論に関する以下のイ～ハのうち、正しいものの組み合わせとして最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

イ．Bailey-Simon 法では、一般的にパラメータの区間推定や検定などを確率的・統計的に行うことはできない。

ロ．Bailey-Simon 法の問題点の一つとして、部分リスク集団のウェイト n_{ij} が大きすぎると、相対クレームコスト指数 r_{ij} が大きく変動することがあり、それが結果に大きく影響を与えうる点が挙げられる。

ハ．複合分類リスクの構造が乗法型の場合、Jung 法を用いた結果と Minimum Bias 法を用いた結果は一致する。

（A）全て正しい　（B）イ、ロのみ正しい
（C）イ、ハのみ正しい　（D）ロ、ハのみ正しい
（E）イのみ正しい　（F）ロのみ正しい
（G）ハのみ正しい　（H）全て誤り

Ⅳ. 事故年度から翌々年度までに保険金支払が完了する保険商品について、次の実績データを基に 2020 年度末の支払備金（普通支払備金＋ＩＢＮＲ備金）を累計発生保険金により見積もることとする。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

＜事故年度別　経過年度別累計発生保険金の推移＞

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2018	6,450	7,140	7,340
2019	6,780	7,360	
2020	7,300		

＜事故年度別　既経過保険料と 2020 年度末累計支払保険金＞

事故年度	既経過保険料	2020 年度末累計支払保険金
2018	12,900	7,340
2019	13,500	7,030
2020	14,300	6,850

ただし、累計発生保険金のロスディベロップメントファクターの予測値には、既知の対応する事故年度別ロスディベロップメントファクターを単純平均した値を用いることとする。また、インフレ率は考慮しないものとする。なお、計算の途中において、保険金・支払備金については全て小数点以下第 1 位を四捨五入して整数値を用い、ロスディベロップメントファクターについては小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位までの数値を用いることとする。

（1）ボーンヒュッターファーガソン法により推定した 2020 年度末支払備金に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。ただし、最終累計発生保険金の当初予測値は、事故年度別既経過保険料に予定損害率（各年度とも 60%とする。）を乗じた値を使用することとする。

（Ａ）1,789　（Ｂ）1,819　（Ｃ）1,849　（Ｄ）1,879　（Ｅ）1,909
（Ｆ）1,939　（Ｇ）1,969　（Ｈ）1,999　（Ｉ）2,029　（Ｊ）2,059

（2）ベンクテンダー法により推定した 2020 年度末支払備金に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。ただし、最終累計発生保険金の当初予測値は、事故年度別既経過保険料に予定損害率（各年度とも 60%とする。）を乗じた値を使用し、信頼係数には 2020 年度末における保険金出現割合（チェインラダー法により推定した事故年度別の最終累計発生保険金に対する 2020 年度末累計発生保険金の割合）を使用することとする。なお、信頼係数および保険金出現割合については全て小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位までの数値を用いることとする。

（Ａ）1,802　（Ｂ）1,832　（Ｃ）1,862　（Ｄ）1,892　（Ｅ）1,922
（Ｆ）1,952　（Ｇ）1,982　（Ｈ）2,012　（Ｉ）2,042　（Ｊ）2,072

Ⅴ．ある保険会社は、次のような出再保険特約を有している。

再保険特約名	出再限度額（億円）	ライン数	出再できる種目
第一次 超過額再保険特約	80	16	すべての火災・動産総合
第二次 超過額再保険特約	50	10	すべての火災・動産総合

さらに、保有部分に対する超過損害額再保険特約（1 事故単位で発動する）を次のとおり有している。

エクセスポイント	カバーリミット
1 億円	9 億円

また、この保険会社は次の保有規定に基づいて保有・出再額を決めている。

種目	保有限度額
火災	5 億円
動産総合	3 億円

さて、この保険会社は次のような 3 件の大口契約を引き受けた。

契約	種目	保険金額（千円）	保険料（円）
A	火災	2,000,000	2,000,000
B	動産総合	6,000,000	7,200,000
C	火災	12,500,000	10,000,000

1 事故でこれらの契約それぞれに、次のような損害が発生したとする。

契約	元受保険金（円）
A	500,000,000
B	500,000,000
C	1,000,000,000

このとき、この保険会社の立場に立って、次の（1）～（3）の各問に答えなさい。ただし、次の条件を仮定する。

①保有額は、限度額いっぱいまで必ず保有するものとする。また、第一次超過額再保険特約にも限度額いっぱいまで必ず保有するものとし、第一次超過額再保険特約がいっぱいになったらはじめて、第二次超過額再保険特約に出再するものとする。

②AからCまでの各契約は、保険金額をベースにして保有・出再を決定し、特にリスク状況などは考慮しなくてもよいものとする。

（1）第二次超過額再保険特約に出再された再保険料の合計に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）4,080,000 円　（B）4,180,000 円　（C）4,280,000 円
（D）4,380,000 円　（E）4,480,000 円　（F）4,580,000 円
（G）4,680,000 円　（H）4,780,000 円　（I）4,880,000 円
（J）4,980,000 円

（2）第一次超過額再保険特約から回収した再保険金の合計に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）1,405,000,000 円　（B）1,415,000,000 円　（C）1,425,000,000 円
（D）1,435,000,000 円　（E）1,445,000,000 円　（F）1,455,000,000 円
（G）1,465,000,000 円　（H）1,475,000,000 円　（I）1,485,000,000 円
（J）1,495,000,000 円

（3）超過損害額再保険特約から回収した再保険金に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）10,000,000 円　（B）20,000,000 円　（C）30,000,000 円
（D）40,000,000 円　（E）50,000,000 円　（F）60,000,000 円
（G）70,000,000 円　（H）80,000,000 円　（I）90,000,000 円
（J）100,000,000 円

問題３． 次のⅠ～Ⅵの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。　　　　　　　　Ⅰ：６点　Ⅱ：7 点、Ⅲ～Ⅵ：各９点　（計４９点）

Ⅰ．効用関数が、べき効用 $u(x)=x^{1/2}\ (x>0)$ に従う集団を考える。この集団内の人は、各々、事故発生率が 10%で、事故発生時に 300 の損失となるリスク X を抱えているものとする。このとき、次の（１)、(２）の各問に答えなさい。

（１）この集団のうち、期初の富が 500 の人を考える。この人がリスク X を移転するために支払う保険料の上限に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）30　（Ｂ）31　（Ｃ）32　（Ｄ）33　（Ｅ）34
（Ｆ）35　（Ｇ）36　（Ｈ）37　（Ｉ）38　（Ｊ）39

（２）この集団では、期初の富は人によって異なり、その分布は一様分布 $U(400,1200)$ に従う。ある保険会社がこの集団のリスク X に対する保険の販売を検討しており、保険料は契約者によらず一律の保険料 P として定める。

集団内の人はそれぞれ自らの期初の富と効用関数に基づき、保険料 P がリスク X を移転するために支払う保険料の上限以下であった場合に、保険に必ず加入するものとする。

この前提で、1 契約あたりの利益を $P-E(X)$ としたとき、保険会社の利益総額（加入者数×1 契約あたりの利益）が最大となるよう保険料 P を定めることとする。このとき、保険料 P に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。ただし、保険料 P は 1 契約あたりの利益がマイナスとならないよう定めるものとする。

（Ａ）30　（Ｂ）31　（Ｃ）32　（Ｄ）33　（Ｅ）34
（Ｆ）35　（Ｇ）36　（Ｈ）37　（Ｉ）38　（Ｊ）39

Ⅱ．ある保険商品では、保険期間１年間の事故の有無により翌年度契約の保険料が割増または割引となる等級制度を導入している。具体的には、等級１（保険料割増率 30%）、等級２（保険料割増引率 0%）、等級３ （保険料割引率 20%）の ３つの等級から構成され、１年間クレーム請求の無かった契約者の等級は１つ上がり、クレーム請求があった契約者の等級は１つ下がる。なお、等級１でクレーム請求があった場合の翌年度契約の等級は1、等級３でクレーム請求が無かった場合の翌年度契約の等級は3であるとする。

また、１契約者あたりの年間クレーム件数 N は、等級によらず１年間に事故が起きない確率は0.7、事故が１件起こる確率は0.3であり、1年間で事故が２件以上起こることはないことがわかっている。

1件あたりのクレーム額 X は、確率密度関数が、

$$f(x)=\frac{1}{20}e^{-\frac{1}{20}x}$$

の指数分布に従うものとし、年間クレーム件数と独立であるとする。この契約集団の契約者数が常に一定（つまり、新規契約の流入、既存契約の流出が発生しない）で、正の数であるものとする。このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）この契約集団が定常状態（つまり、契約者分布の増減がない状態）に達したとき、収支バランスが 5%の収入超過の状態となるよう保険料を設定した場合、最も契約件数が大きい等級の保険料に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）4.94　**（B）**5.09　**（C）**5.24　**（D）**5.39　**（E）**5.54
（F）5.69　**（G）**5.84　**（H）**5.99　**（I）**6.14　**（J）**6.29

（２）この契約集団が定常状態に達したとき、あるパラメータ h に基づき等級２の保険料をエッシャー原理 $P(S)=\dfrac{E\left(Se^{hS}\right)}{E\left(e^{hS}\right)}$ $(h>0)$ で設定した場合、契約集団全体で収支相等となった。このとき、h の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、S は保険期間１年間に支払われる１契約者あたりの保険金総額を表す。

（A）0.0022　**（B）**0.0027　**（C）**0.0032　**（D）**0.0037　**（E）**0.0042
（F）0.0047　**（G）**0.0052　**（H）**0.0057　**（I）**0.0062　**（J）**0.0067

Ⅲ．　ある保険商品の自動車保険の契約者 400 人について、今年度のクレーム件数を調べたところ、以下のデータが得られた。

今年度のクレーム件数	契約件数
0 件	302
1 件	83
2 件	9
3 件	5
4 件	1

ここで、1 契約者あたりのクレーム件数はパラメータ Θ のポアソン分布に従い、また Θ の確率密度関数が以下のとおりであることがわかっている。

$$g_{\Theta}(\mu)=\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta\mu}(\beta\mu)^{\alpha-1}\quad(\mu\geq 0)$$

このとき、次の（1）～（3）の各問に答えなさい。

（1）クレーム件数 N の積率母関数 $M_N(z)$ として最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

（A） $\left(\frac{\beta}{\beta-z}\right)^{\alpha}$　（B） $\left(\frac{\beta}{\beta+1-z}\right)^{\alpha}$　（C） $\left(\frac{\beta}{\beta-1-z}\right)^{\alpha}$

（D） $\left(\frac{\beta}{\beta+z}\right)^{\alpha}$　（E） $\left(\frac{\beta}{\beta+1+z}\right)^{\alpha}$　（F） $\left(\frac{\beta}{\beta-1+z}\right)^{\alpha}$

（G） $\left(\frac{\beta}{\beta-e^{z}}\right)^{\alpha}$　（H） $\left(\frac{\beta}{\beta+1-e^{z}}\right)^{\alpha}$　（I） $\left(\frac{\beta}{\beta-1-e^{z}}\right)^{\alpha}$

（J） $\left(\frac{\beta}{\beta+e^{z}}\right)^{\alpha}$　（K） $\left(\frac{\beta}{\beta+1+e^{z}}\right)^{\alpha}$　（L） $\left(\frac{\beta}{\beta-1+e^{z}}\right)^{\alpha}$

（M）いずれにも該当しない

（2）今年度のクレーム件数のデータを用いてモーメント法よりパラメータαおよびβを推定した場合、それぞれの推定値は、$\alpha=$ $\boxed{①}$ 、$\beta=$ $\boxed{②}$ となる。①、②に当てはまる数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

【①の選択肢】

（A）1.0	（B）1.1	（C）1.2	（D）1.3	（E）1.4
（F）1.5	（G）1.6	（H）1.7	（I）1.8	（J）1.9

【②の選択肢】

（A）5.0	（B） 5.1	（C）5.2	（D）5.3	（E）5.4
（F）5.5	（G） 5.6	（H）5.7	（I）5.8	（J）5.9

（3）ある契約者の今年度のクレーム件数が 3 件であったとき、翌年度のクレーム件数をベイズ方法論を用いて推定した場合、翌年度のクレーム件数の期待値に最も近いものは、選択肢のうちどれか。なお、α,βの値には（2）で選択した数値を用いることとする。

（A）0.50	（B）0.55	（C）0.60	（D）0.65	（E）0.70
（F）0.75	（G）0.80	（H）0.85	（I）0.90	（J）0.95

Ⅳ．以下の条件を満たすクレーム総額過程$\{S_t\}$における連続時間型モデルの破産確率を考える。

・個々のクレーム額$X_1, X_2, \cdots$および期間$[0,t]$において発生するクレーム件数N_tは、互いに独立である。

・個々のクレーム額$X_1, X_2, \cdots$は平均μの指数分布に従う。

・$\{N_t\}$は非斉時ポアソン過程に従い、強度関数は以下のとおり表される。

$$\lambda(t) = \begin{cases} 1 & (0 \le t < 3) \\ \dfrac{1}{2} & (t \ge 3) \end{cases}$$

・期間$[0,t]$の累計収入保険料$c(t)$は、強度関数と安全割増率θを用いて以下のとおり表される。

$$c(t) = (1+\theta)\mu\int_0^t \lambda(s)ds$$

このとき、サープラスの推移$U(t)$は、

$U(t) = u_0 + c(t) - S_t$　（u_0：期首サープラス）

と表される。

$\mu = 100$、$\theta = 0.5$、$u_0 = 200$のとき、次の（1）～（3）の各問に答えなさい。なお、必要があれば$e^{-1} = 0.368$を使用すること。

（1）期間$[0,5]$において発生するクレーム件数が 1 件である確率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.033　（B）0.053　（C）0.073　（D）0.093　（E）0.113
（F）0.133　（G）0.153　（H）0.173　（I）0.193　（J）0.213

（2）期間$[0,3]$において 1 回目のクレームが生じ、かつその時点でサープラスが負になる確率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.042　（B）0.044　（C）0.046　（D）0.048　（E）0.050
（F）0.052　（G）0.054　（H）0.056　（I）0.058　（J）0.060

（３）３回目のクレームが発生する時刻をT_3と定義し、T_3の期待値を$k=E(T_3)$とする。

$t=k$におけるサープラスの期待値$E\left[U(k)\right]$の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）363	（Ｂ）367	（Ｃ）371	（Ｄ）375	（Ｅ）379
（Ｆ）383	（Ｇ）387	（Ｈ）391	（Ｉ）395	（Ｊ）399

Ｖ．ある保険会社において、商品Ａと商品Ｂの販売を開始する。商品Ａの年間支払保険金 X と、商品Ｂの年間支払保険金 Y は、下表のとおりであることがわかっている。

年間支払保険金 X	5	10	15
発生確率	0.5	0.3	0.2

年間支払保険金 Y	10	20	30
発生確率	0.4	0.3	0.3

このとき、次の（１）～（３）の各問に答えなさい。

（１）販売当初は商品Ａと商品Ｂに関係性が存在するかわからなかったため、確率変数 (X,Y) のコピュラを積コピュラと想定した。このとき、$CTE_{75\%}(X+Y)$ の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）35　（Ｂ）36　（Ｃ）37　（Ｄ）38　（Ｅ）39
（Ｆ）40　（Ｇ）41　（Ｈ）42　（Ｉ）43　（Ｊ）44

（２）販売してから 10 年間の事業年度 i の商品Ａの年間支払保険金 x_i と、商品Ｂの年間支払保険金 y_i は、下表のとおりであった。

事業年度 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
商品Ａの 年間支払保険金 x_i	5	15	10	5	10	5	15	5	5	10
商品Ｂの 年間支払保険金 y_i	10	30	20	10	30	20	10	20	10	30

この 10 年間のデータから確率変数 (X,Y) の経験コピュラ $\tilde{C}(u_x,u_y)$ を求めるとき、$\tilde{C}(0.5,0.5)$ に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、経験コピュラは下式により表現される。ここで、T は観測データの数、$x_n^{(t_n)}$ は $\{x_n^t\}$ $(t=1,\cdots,T)$ を昇順に並び替えた中で t_n 番目のデータを表す。

$$\tilde{C}\left(\frac{t_1}{T},\cdots,\frac{t_N}{T}\right)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}1_{\left[x_1^t\le x_1^{(t_1)},\cdots,x_N^t\le x_N^{(t_N)}\right]}$$

（Ａ）0.05　（Ｂ）0.10　（Ｃ）0.15　（Ｄ）0.20　（Ｅ）0.25
（Ｆ）0.30　（Ｇ）0.35　（Ｈ）0.40　（Ｉ）0.45　（Ｊ）0.50

（3）10 年間のデータから算出した経験コピュラ$\tilde{C}\left(u_x,u_y\right)$をもとに、商品Ｂに対して出再率$\alpha$の比例再保険を手配することを検討する。「比例再保険を手配しない場合の積コピュラをもとに算出した$TVaR_{75\%}\left(X+Y\right)$」が、「比例再保険を手配した場合の経験コピュラ$\tilde{C}\left(u_x,u_y\right)$をもとに算出した$TVaR_{75\%}\left(X+\left(1-\alpha\right)Y\right)$と、比例再保険の再保険料の和」と等しくなるように比例再保険を手配した場合、出再率αの値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、再保険料は純保険料法により算出し、経費や手数料等は考慮しないものとする。また、出再率αのとり得る値は$0\leq\alpha\leq0.5$とする。

（Ａ）0.205	（Ｂ）0.215	（Ｃ）0.225	（Ｄ）0.235	（Ｅ）0.245
（Ｆ）0.255	（Ｇ）0.265	（Ｈ）0.275	（Ｉ）0.285	（Ｊ）0.295

VI. ある保険商品には2種類のリスクファクターR_1、R_2が存在しており、これらに以下の関係が成り立つことを仮定する。

・(R_1, R_2)は2変量正規分布に従う。
・R_1の平均は80、標準偏差は7であり、R_2の平均は50、標準偏差は10である。
・R_1とR_2の相関係数（ピアソンの積率相関係数）は0.6である。

この保険商品のリスク量Lがリスクファクターの線形結合によって$L = 0.4R_1 + 0.6R_2$と表されるとき、次の（1）～（3）の各問に答えなさい。

（1）$R_1^* = \dfrac{R_1 - 80}{7}$、$R_2^* = \dfrac{R_2 - 50}{10}$および実数$k$を用いて、確率変数$X$を$X = R_2^* - kR_1^*$と定義したとき、$X$と$R_1$が独立となるような$k$の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

ヒント：

・正規分布に従う2つの確率変数の和は、2変数が独立でない場合も正規分布に従う。
・正規分布に従う2つの確率変数について、2変数が独立であることと、2変数の共分散が0であることは同値である。

（A）0.1　（B）0.2　（C）0.3　（D）0.4　（E）0.5
（F）0.6　（G）0.7　（H）0.8　（I）0.9　（J）1.0

（2）R_1が80である条件下でLが65以上となる確率$P\left(L \geq 65 \middle| R_1 = 80\right)$に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば下表（標準正規分布の上側ε点）の数値（表に記載のない数値は直線補間により算出された数値）を使用すること。

＜表＞標準正規分布の上側ε点：$u(\varepsilon)$

ε	0.500	0.401	0.309	0.227	0.159	0.106	0.067
$u(\varepsilon)$	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50

（A）0.27　（B）0.28　（C）0.29　（D）0.30　（E）0.31
（F）0.32　（G）0.33　（H）0.34　（I）0.35　（J）0.36

（3） R_1 が 80 以上である条件下での L の期待値 $E\left(L \middle| R_1 \geq 80\right)$ に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば円周率 $\pi = 3.142$ を使用すること。

（A）64.7	（B）65.0	（C）65.3	（D）65.6	（E）65.9
（F）66.2	（G）66.5	（H）66.8	（I）67.1	（J）67.4

以上

損保数理（解答例）

問題１

Ⅰ.

①（**Ｂ**）　②（**Ｆ**）（①、②は完答）　③（**Ｊ**）　［①②２点　③２点］

（１）

車種Ａ、Ｂの 2017,⋯,2020 年度の事故件数を、それぞれ$(x_1, y_1), \cdots, (x_4, y_4)$、回帰式を$y = \alpha + \beta x$とする。

ここで、$\overline{x} = 63$、$\overline{y} = 55$を用いて、αとβを最小二乗法により推定すると、

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \overline{x})^2} = 0.70$$

$$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\overline{x} = 10.9$$

となる。

また、誤差分散の不偏推定値を$\hat{\sigma}^2$とすると、

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{4-2}\sum_{i=1}^{4}\left\{y_i - \left(\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i\right)\right\}^2$$

$$= 8.1$$

となる。

Ⅱ．

（１）**（Ｅ）**　（２）**（Ｆ）**　［別解］（１）**（Ｇ）**　（２）**（Ｄ）**

［（１）２点　（２）２点 ］

（１）

与えられた保険金支払額の平均値は$(7+6+15+1+16+3)\div 6=8$となる。

また、指数分布の性質$P(X\geq x+a\,|\,X\geq a)=P(X\geq x)$を踏まえると、エクセス方式の免責金額がある場合における、保険金支払いとならない事故を<u>含まない</u>支払保険金の期待値は、免責金額がない場合の支払保険金の期待値βと一致する。

このことから、モーメント法により$\beta=8$となる。

（２）

免責金額廃止後の支払保険金の期待値は、（１）の結果より 8 となる。

免責金額廃止前の支払保険金の期待値は、

$$\int_2^{\infty}\frac{x-2}{8}e^{-\frac{x}{8}}dx$$

$$=\left[-(x-2)e^{-\frac{x}{8}}-8e^{-\frac{x}{8}}\right]_2^{\infty}$$

$$=8e^{-\frac{1}{4}}$$

となる。

したがって、免責廃止による増加率は、

$$\frac{8}{8e^{-\frac{1}{4}}}-1=e^{\frac{1}{4}}-1=28\%$$

となる。

［別解］

保険金の支払額は、「ゼロとなる場合を含まない（上記解答）」捉え方のほかに「損害額が免責金額以下となり、保険金がゼロとなる場合も含む」捉え方もあり、この場合も正解として取り扱った。

（１）$E(X-\min(X,2))=8$という条件からβを推定すると、推定値に最も近い選択肢は$\beta=10$、（２）22% となる。

Ⅲ.

（D）　［４点］

Lundberg の不等式 $\varepsilon(u_0) < e^{-Ru_0}$ と題意より、$u_0 = 8$ のとき $e^{-8R} = e^{-2}$ となることから、調整係数 $R = 0.25$ となるような安全割増率 θ を求めればよい。

クレーム額 X の積率母関数を $M_X(r)$ とすると、

$$M_X(r) = \int_0^\infty \frac{4}{\Gamma(3.5)} e^{-4x}(4x)^{2.5} e^{rx} dx$$

$$= \frac{4^{3.5}}{\Gamma(3.5)} \int_0^\infty e^{-(4-r)x} x^{2.5} dx$$

$$= \frac{4^{3.5}}{\Gamma(3.5)} \times \frac{\Gamma(3.5)}{(4-r)^{3.5}}$$

$$= \left(\frac{4}{4-r}\right)^{3.5} \quad (r < 4)$$

したがって、Lundberg モデルにおける調整係数の満たす方程式 $M_X(r) = 1 + (1+\theta)\mu r$ に

$\mu = E(X) = \dfrac{3.5}{4} = 0.875$、$M_X(r) = \left(\dfrac{4}{4-r}\right)^{3.5}$、$r = 0.25$ を代入すると、

$$\theta = \left(\left(\frac{4}{3.75}\right)^{3.5} - 1\right) \div (0.875 \times 0.25) - 1 = 0.16$$

となる。

Ⅳ.

（１）（**B**）　（２）（**J**）　　［（１）２点　（２）２点］

（１）

比例再保険からの再保険金回収期待値をα、事故発生率の期待値をλとすると、

$\alpha = \lambda \times 0.5 \times 1 = 0.5\lambda$ 億円

となる。

また、比例再保険を手配した後の保有部分$Y = 0.5X$ が従う確率密度関数を$h(y)$とすると、$x = 2y$ より、$h(y) = f(x = 2y)\left|\dfrac{dx}{dy}\right| = 2e^{-2y}\ (y \geq 0)$となる。

保有部分Yについてエクセスポイント 2 億円、カバーリミット 2 億円のとき、超過損害額再保険からの再保険金回収期待値をβとすると、

$$\beta = \lambda \times \left\{ \int_2^4 (y-2)h(y)dy + 2\int_4^\infty h(y)dy \right\}$$
$$= \lambda \times \left\{ \int_2^4 (y-2)2e^{-2y}dy + 2\int_4^\infty 2e^{-2y}dy \right\}$$
$$= \lambda \times \left(\left[-(y-2)e^{-2y} \right]_2^4 + \left[-\frac{1}{2}e^{-2y} \right]_2^4 + 2\left[-e^{-2y} \right]_4^\infty \right)$$
$$= \lambda \times \left(-2e^{-8} - \frac{1}{2}e^{-8} + \frac{1}{2}e^{-4} + 2e^{-8} \right)$$
$$= \frac{1}{2}\lambda \times \left(e^{-4} - e^{-8} \right)$$
$$= 0.5\lambda \times 0.0180 \text{億円}$$

となる。

したがって、求める割合は、

$$\frac{\alpha + \beta}{\lambda} = \frac{0.5\lambda + 0.5\lambda \times 0.0180}{\lambda} = 50.9\%$$

となる。

（２）

比例再保険がない場合（超過損害額再保険のみ）の再保険からの再保険金回収期待値をγとすると、

$$\begin{aligned}
\gamma &= \lambda \times \left\{ \int_2^4 (x-2) e^{-x} dx + 2\int_4^\infty e^{-x} dx \right\} \\
&= \lambda \times \left(\left[-(x-2) e^{-x} \right]_2^4 + \left[-e^{-x} \right]_2^4 + 2\left[-e^{-x} \right]_4^\infty \right) \\
&= \lambda \times \left(-2e^{-4} + e^{-2} - e^{-4} + 2e^{-4} \right) \\
&= \lambda \times \left(e^{-2} - e^{-4} \right) \\
&= \lambda \times 0.1171 \text{億円}
\end{aligned}$$

となる。

したがって、求める割合は、

$$\frac{\gamma}{\alpha+\beta} = \frac{0.1171\lambda}{0.5090\lambda} = 23.0\%$$

となる。

Ｖ.

（１）**（Ｂ）**　（２）①**（Ｂ）**②**（Ｃ）**③**（Ａ）**（①～③は完答）　［（１）２点　（２）２点］

（１）

イ　正しい（テキスト 10-30）

ロ　正しい（テキスト 10-32）

ハ　ケンドールの τ をコピュラで表すと、$4\int_0^1\int_0^1 C(u_1,u_2)dC(u_1,u_2)\underline{-1}$ である。（テキスト 10-36）

（２）

テキスト 10-35 のとおり。

問題２

Ⅰ．

（１）（Ｅ）　（２）（Ｃ）　（３）（Ｆ）　　　［（１）２点　（２）２点　（３）２点］

（１）

契約集団Ａに対する保険金支払額の期待値$E\left(g\left(X_A\right)\right)=\sum_{x_A=1}^{\infty}40x_A\cdot 0.2(1-0.2)^{x_A-1}$は、

$\sum_{x_A=1}^{\infty}x_A\cdot 0.2(1-0.2)^{x_A-1}=\frac{1}{0.2}=5$であることから、$E\left(g\left(X_A\right)\right)=200$となる。

同様にして計算すると、契約集団Ｂに対する保険金支払額の期待値$E\left(g\left(X_B\right)\right)$は、

$E\left(g\left(X_B\right)\right)=\sum_{x_B=1}^{\infty}40\alpha x_B\cdot 0.125(1-0.125)^{x_B-1}=320\alpha$となる。

したがって$E\left(g\left(X_A\right)\right)\geq E\left(g\left(X_B\right)\right)$となる$\alpha$の条件は、

$200\geq 320\alpha$
$\alpha\leq 0.625$

（２）

契約集団Ｂに対する保険金支払額の期待値$E\left(g\left(X_B\right)\right)$は、

$$
\begin{aligned}
&E\left(g\left(X_B\right)\right)\\
&=\sum_{x_B=\beta+1}^{\infty}40\left(x_B-\beta\right)\cdot 0.125(1-0.125)^{x_B-1}\\
&=40\cdot 0.875^{\beta}\sum_{x_B=1}^{\infty}x_B\cdot 0.125\cdot 0.875^{x_B-1}\\
&=320\cdot 0.875^{\beta}
\end{aligned}
$$

となるので、$E\left(g\left(X_A\right)\right)\geq E\left(g\left(X_B\right)\right)$となる$\beta$の条件は、

$$
\begin{aligned}
&200\geq 320\cdot 0.875^{\beta}\\
&0.875^{\beta}\leq 0.625\\
&\beta\log 0.875\leq\log 0.625\\
&\beta(1.946-3\times 0.693)\leq(1.609-3\times 0.693)\\
&\beta\geq\frac{0.470}{0.133}
\end{aligned}
$$

これを満たす最小の整数は$\beta=4$となる。

（３）

契約集団Ｂに対する保険金支払額の期待値$E\left(g\left(X_B\right)\right)$は、

$$
\begin{aligned}
&E\left(g\left(X_B\right)\right)\\
&=\sum_{x_B=1}^{\gamma} 40x_B \cdot 0.125\left(1-0.125\right)^{x_B-1}+\sum_{x_B=\gamma+1}^{\infty} 40\gamma \cdot 0.125\left(1-0.125\right)^{x_B-1}\\
&=40\cdot\left(\frac{1-0.875^{\gamma}}{0.125}-\gamma\cdot 0.875^{\gamma}\right)+40\gamma\cdot 0.875^{\gamma}\\
&=320\cdot\left(1-0.875^{\gamma}\right)
\end{aligned}
$$

となるので、$E\left(g\left(X_A\right)\right)\geq E\left(g\left(X_B\right)\right)$となる$\gamma$の条件は、

$$
\begin{aligned}
&200\geq 320\cdot\left(1-0.875^{\gamma}\right)\\
&0.875^{\gamma}\geq 0.375\\
&\gamma\log 0.875\geq\log 0.375\\
&\gamma\left(1.946-3\times 0.693\right)\geq\left(1.099-3\times 0.693\right)\\
&\gamma\leq\frac{0.980}{0.133}
\end{aligned}
$$

これを満たす最大の整数は$\gamma=7$となる。

【別解】

（１）は$g\left(x_B\right)=40\alpha x_B \quad \left(x_B=1,2,\cdots\right)$・・・①

（２）は$g\left(x_B\right)=\begin{cases}0 & \left(x_B=1,2,\cdots,\beta\right)\\ 40\left(x_B-\beta\right) & \left(x_B=\beta+1,\beta+2,\cdots\right)\end{cases}$・・・②

であることから、$\alpha=1$、$\beta=\gamma$とし、①－②とすると、

$$
g\left(x_B\right)=\begin{cases}40x_B & \left(x_B=1,2,\cdots,\gamma\right)\\ 40\gamma & \left(x_B=\gamma+1,\gamma+2,\cdots\right)\end{cases}
$$

となり、（３）の状況と一致する。
したがって、

$$
E\left(g\left(X_B\right)\right)=320-320\cdot 0.875^{\gamma}
$$

となる。

Ⅱ.

（１）①　**５**　②　**８**（①、②は完答）　③**（Ｆ）**　（２）**（Ａ）**

［（１）①②１点　③２点　（２）３点］

（１）

2024 年 3 月事業年度末（第 3 事業年度末）から第 3 保険年度末（2024 年 11 月期央）までの期間は $7.5/12 = 5/8$ 年であるため、平準式積立保険料を採用した場合、2024 年 3 月事業年度末の払戻積立金は次のとおりとなる。(テキスト 6-21)

$$ {}_tV_m = W\left(1-\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\right)\phi^{\frac{2m+1}{24}} = 80\left(1-\frac{1-0.95^2}{1-0.95^5}\right)0.95^{\frac{5}{8}} = 44.1 $$

（２）

チルメル式積立保険料を採用した場合の第 3 保険年度末の払戻積立金が、（１）の払戻積立金と等しくなるので、

$$ W\left(1-\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\right)\phi^{\frac{2m+1}{24}} = W\left(1-\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\right)-\alpha\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}} $$

$$ \alpha\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}} = W\left(1-\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\right)\left(1-\phi^{\frac{2m+1}{24}}\right) $$

$$ \alpha\ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}} = W\left(\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}-\ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}\right)\left(1-\phi^{\frac{2m+1}{24}}\right) $$

$$ \alpha(1-0.95^2) = 80(0.95^2-0.95^5)\left(1-0.95^{\frac{5}{8}}\right) $$

これを解くと、$\alpha = 3.332\ldots$ となるので、初年度のチルメル式積立保険料は、

$$ \frac{\alpha+W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}-\alpha = \left(3.332+80\cdot 0.95^5\right)\left(\frac{1-0.95}{1-0.95^5}\right)-3.332 = 11.1 $$ となる。

Ⅲ.

（１）①（**E**）②（**A**）③（**F**）④（**B**）(①～④は完答)　（２）（**C**）　（３）（**C**）

［（１）２点　（２）３点　（３）２点］

（１）

与えられたガンマ分布のうち、パラメータ $\beta_1 \sim \beta_3$ を最尤推定するために必要な情報のみ抽出すると、

$$f\left(y_i;\mu_i,\phi\right) \propto \exp\left(-\frac{1}{\phi}\left(\frac{y_i}{\mu_i}+\log\left(\mu_i\right)\right)\right)$$ であるから、

対数尤度関数は $l=\sum_{i=1}^{4}\left(-\frac{1}{\phi}\left(\frac{y_i}{\mu_i}+\log\left(\mu_i\right)\right)\right)+C$

ただし、C は μ_i を含まない定数項とする。

ここで、$y_1=a$ (男性かつゴールド)、$y_2=b$ (男性かつゴールド以外)、$y_3=c$ (女性かつゴールド)、

$y_4=d$ (女性かつゴールド以外)とすると、

$$\mu_i=g^{-1}\left(\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\beta_3x_{i3}\right)=\exp\left(\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\beta_3x_{i3}\right)=\begin{cases} e^{\beta_1+\beta_3} & (i=1) \\ e^{\beta_1} & (i=2) \\ e^{\beta_2+\beta_3} & (i=3) \\ e^{\beta_2} & (i=4) \end{cases}$$

より、

$$l=-\frac{1}{\phi}\left(\frac{a}{e^{\beta_1+\beta_3}}+\beta_1+\beta_3\right)-\frac{1}{\phi}\left(\frac{b}{e^{\beta_1}}+\beta_1\right)-\frac{1}{\phi}\left(\frac{c}{e^{\beta_2+\beta_3}}+\beta_2+\beta_3\right)-\frac{1}{\phi}\left(\frac{d}{e^{\beta_2}}+\beta_2\right)+C$$

であるから、上式を β_1,β_2,β_3 でそれぞれ偏微分することにより以下を得る。

$$\phi\frac{\partial l}{\partial \beta_1}=\frac{a}{e^{\beta_1+\beta_3}}+\frac{b}{e^{\beta_1}}-2=0 \qquad ・・・①$$

$$\phi\frac{\partial l}{\partial \beta_2}=\frac{c}{e^{\beta_2+\beta_3}}+\frac{d}{e^{\beta_2}}-2=0 \qquad ・・・②$$

$$\phi\frac{\partial l}{\partial \beta_3}=\frac{a}{e^{\beta_1+\beta_3}}+\frac{c}{e^{\beta_2+\beta_3}}-2=0 \quad ・・・③$$

（２）

①、③より、

$$be^{\beta_2}=c\left(\frac{e^{\beta_1}}{e^{\beta_3}}\right)$$

②、③より、

$$ae^{\beta_2}=de^{\beta_1+\beta_3}$$

上 2 式から、$e^{\beta_3}=\sqrt{\frac{ac}{bd}}$ を得る。

これを（1）①に代入し、$e^{\beta_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{e^{\beta_3}}+b\right)$ を得ることから、次式を導くことができる。

$$e^{\beta_1+\beta_3}=300=\frac{1}{2}\left(a+b\sqrt{\frac{ac}{bd}}\right)$$

ここに、問題文の (a,b,c,d) に係る条件を代入すると、$a=270$ を得る。

（３）

イ　正しい（テキスト 4-18）

ロ　部分リスク集団のウェイト n_{ij} が小さすぎる場合、相対クレームコスト指数 r_{ij} が大きく変動することがある。（テキスト 4-14）

ハ　正しい（テキスト 4-13）

Ⅳ.

（１）（**G**）（２）（**E**）　［（１）①３点　（２）３点］

（１）

＜ロスディベロップメントファクター＞

事故年度	経過年度	
	1→2	2→3
2018	1.107	1.028
2019	1.086	1.028
2020	1.097	1.028

＜ボーンヒュッターファーガソン法による累計発生保険金の推定＞

事故年度	既経過 保険料	予定 損害率	当初 予測値	2020 年度末 累計発生保険金	B_i	$1/B_i$	最終発生 保険金
2018	12,900	60%	7,740	7,340	1.000	1.000	7,340
2019	13,500	60%	8,100	7,360	1.028	0.973	7,579
2020	14,300	60%	8,580	7,300	1.128	0.887	8,270

＜ボーンヒュッターファーガソン法による支払備金＞

事故年度	最終発生 保険金	2020 年度末 累計支払保険金	支払備金
2018	7,340	7,340	0
2019	7,579	7,030	549
2020	8,270	6,850	1,420
合計	23,189	21,220	**1,969**

（２）

まず、チェインラダー法により、各年度の 3 年度経過時累計発生保険金を求める。

＜チェインラダー法＞

事故年度	経過期間		
	1	2	3
2018	6,450	7,140	7,340
2019	6,780	7,360	7,566
2020	7,300	8,008	8,232

信頼係数には 2020 年度末における保険金出現割合を用いることとしているため、（１）の解答過程において算出した$1/B_i$を信頼係数として、各事故年度における最終発生保険金を推定する。

2018 年度：7,340

2019 年度：$7{,}566 \times 0.973 + 7{,}579 \times (1-0.973) = 7{,}566$

2020 年度：$8{,}232 \times 0.887 + 8{,}270 \times (1-0.887) = 8{,}236$

＜ベンクテンダー法による支払備金＞

事故年度	最終発生 保険金	2020 年度末 累計支払保険金	支払備金
2018	7,340	7,340	0
2019	7,566	7,030	536
2020	8,236	6,850	1,386
合計	23,142	21,220	**1,922**

Ｖ．

（１）（Ｃ）　（２）（Ｂ）　（２）（Ｉ）　　［（１）２点　（２）２点　（３）２点］

各契約の配分は、次のとおり。

単位：保険金額 千円

契約		元受	保有	1st	2nd
A	保有金額	2,000,000	500,000	1,500,000	0
	割合	100%	25%	75%	0%
B	保有金額	6,000,000	300,000	4,800,000	900,000
	割合	100%	5%	80%	15%
C	保有金額	12,500,000	500,000	8,000,000	4,000,000
	割合	100%	4%	64%	32%

（注）契約Ｂは、ライン数の制限に注意

この配分に従って保険料と保険金を計算すると、次のとおり。

【保険料】

単位：円

契約	元受	保有	1st	2nd
A	2,000,000	500,000	1,500,000	0
B	7,200,000	360,000	5,760,000	1,080,000
C	10,000,000	400,000	6,400,000	3,200,000
合計	19,200,000	1,260,000	13,660,000	4,280,000

【保険金】

単位：円

契約	元受	保有	1st	2nd
A	500,000,000	125,000,000	375,000,000	0
B	500,000,000	25,000,000	400,000,000	75,000,000
C	1,000,000,000	40,000,000	640,000,000	320,000,000
合計	2,000,000,000	190,000,000	1,415,000,000	395,000,000

（１）

上表より、4,280,000 円

（２）

上表より、1,415,000,000 円

（３）

保有部分に係る保険金が 190,000,000 円であるため、超過損害額再保険特約からの回収再保険金は、

$190,000,000 - 100,000,000 = 90,000,000$ 円

問題３
Ⅰ．
（１）**（G）**　（２）**（C）**　［（１）２点　（２）４点］

（１）
期初の富をW、保険料をPとすると、求める額は$W=500$において、保険を購入する場合の効用$u\left(W-P\right)$と保険を購入しない場合の期待効用$E\left(u\left(W-X\right)\right)$が一致する場合である。

すなわち、

$$u\left(W-P\right)=E\left(u\left(W-X\right)\right)$$
$$\left(W-P\right)^{1/2}=\frac{9}{10}W^{1/2}+\frac{1}{10}\left(W-300\right)^{1/2}$$
$$W-P=\frac{81}{100}W+\frac{1}{100}\left(W-300\right)+\frac{18}{100}\sqrt{W^2-300W}$$
$$P=3+\frac{18}{100}W-\frac{18}{100}\sqrt{W^2-300W} \qquad \cdots ①$$

ここに、$W=500$を代入すると、

$$P=3+90-18\sqrt{10}=36$$

（２）
①において、$W=400$となる場合のPをP_1、$W=1200$となる場合のPをP_2とすると、P_1、P_2はそれぞれ、$P_1=39$、$P_2=31.939$となる。
保険契約の加入者が 0 とならないために必要な条件を考える。
べき効用のリスク回避度は富の増大とともに減少することから、期初の富が小さいほど、高い保険料でも加入することとなる。与えられた期初の富の分布から、期初の富が最低値の 400 の人が保険契約に加入する最大の保険料は$P_1=39$となる。
すなわち、保険契約の加入者が 0 とならないためには、$P\le 39$であることが必要となる。

1 契約あたりの利益をSとすると、$E(X)=30$から、$S=P-30$と表せる。
また、問題文より 1 契約あたりの利益がマイナスとならないよう保険料を定めることから、$S\ge 0$となる。これと前述の$P\le 39$と合わせると、Sの範囲は$0\le S\le 9$となる。

①に $P=S+30$ を代入し、W について解くと、

$$S+30=3+\frac{18}{100}W-\frac{18}{100}\sqrt{W^2-300W}$$

$$W-150-\frac{100}{18}S=\sqrt{W^2-300W}$$

$$W^2-2W\left(150+\frac{100}{18}S\right)+\left(150+\frac{100}{18}S\right)^2=W^2-300W \quad (\because W\geq 400\text{より上式は両辺とも正})$$

$$\frac{100}{9}WS=\left(150+\frac{100}{18}S\right)^2$$

$$W=\frac{100}{36}\frac{(S+27)^2}{S}$$

と表すことができる。べき効用のリスク回避度は富の増大とともに減少することから、ある S を与えたとき、上記で求められた W 以下の期初の富を持つ人が保険契約に加入することとなる。

期初の富の分布を基に、集団内の人数を n としたとき利益総額を計算すると、$0\leq S\leq 9$ であることから、

$$\text{利益総額}=\begin{cases}\dfrac{\dfrac{100}{36}\dfrac{(S+27)^2}{S}-400}{800}\times n\times S & (P_2-30\leq S\leq 9) \quad \cdots② \\ n\times S & (0\leq S<P_2-30) \quad \cdots③\end{cases}$$

と表せる。

②を微分すると、$\dfrac{1}{800}\left(\dfrac{100}{36}(2S+54)-400\right)\times n$ となり、これは $P_2-30\leq S\leq 9$ の範囲において負であることから、利益総額は S の増加に対し、単調減少となる。

③は S の増加に対し、単調増加となる。

これらを踏まえると、利益総額が最大となるのは、$S=P_2-30=1.939$ となるときである。

このときの P は $P=30+1.939\fallingdotseq 32$ となる。

Ⅱ.

<u>（１）**（E）**（２）**（B）**</u>　［（１）３点、（２）４点］

（１）

問題より、推移行列は、$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$と表すことができる。

この契約集団が定常状態にあるときの等級iの契約構成割合をx_iとすると、次の式が成り立つ。

$$\begin{cases} x_1 = 0.3(x_1 + x_2) \\ x_2 = 0.7x_1 + 0.3x_3 \\ x_3 = 0.7(x_2 + x_3) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

これを解くと、各等級の契約構成割合は以下のとおりとなる。

$x_1 = 0.114$、$x_2 = 0.266$、$x_3 = 0.620$

このとき、定常状態における保険料と保険金の収支相等を考える。

①保険料収入

等級 2 の保険料をPとすると、定常状態におけるこの契約集団から得られる 1 契約者あたりの保険料の平均は、

$1.3P \times 0.114 + P \times 0.266 + 0.8P \times 0.620 = 0.9102P$

となる。

②保険金支出

1 件あたりのクレーム額の平均値は 20、年間クレーム件数の平均値は 0.3 となることから、1 契約者あたりの保険金の期待値は、20×0.3＝6 となる。

収支バランスが 5%の収入超過であることから、等級 2 の保険料は、

$0.9102P = 6 \times 1.05$

となり、$P = 6.922$が求まる。

最も契約構成割合が大きい等級は 3 等級なので、その保険料は、

$6.922 \times 0.8 = 5.54$

となる。

（２）

指数分布の積率母関数は、

$$M_X(t)=\int_0^\infty e^{tx}\frac{1}{20}e^{-\frac{1}{20}x}dx$$
$$=\frac{1}{1-20t}\quad\left(t<\frac{1}{20}\right)$$

となる。

年間クレーム件数の積率母関数は、

$M_N(t)=\sum_{n=0}^{1}e^{tn}0.3^n(1-0.3)^{1-n}=0.7+0.3e^t$ と表すことができる。

$M_S(t)=M_N(\log M_X(t))$ となるので、

$M_S(t)=0.7+0.3e^{\log\left(\frac{1}{1-20t}\right)}=0.7+0.3(1-20t)^{-1}$ より、

$$P(S)=\frac{E\left(Se^{hS}\right)}{E\left(e^{hS}\right)}=\frac{M'_S(h)}{M_S(h)}=\frac{0.3\cdot 20\cdot(1-20h)^{-2}}{0.7+0.3(1-20h)^{-1}}$$

となる。

ここで、等級 2 の保険料 P をエッシャー原理で設定した場合に契約集団全体で収支相等となったことから、

$0.9102P=6$ となり、$P=6.592$ が求まる。

したがって、

$\dfrac{0.3\cdot 20\cdot(1-20h)^{-2}}{0.7+0.3(1-20h)^{-1}}=6.592$ を h について解けばよい。

$x=1-20h\ (0<x<1)$ とおくと、

$$\frac{0.3\cdot 20\cdot x^{-2}}{0.7+0.3x^{-1}}=6.592$$
$$6.592\times 0.7x^2+6.592\times 0.3x-6=0$$
$$x=\frac{-6.592\times 0.3\pm\sqrt{(6.592\times 0.3)^2+4\times 6.592\times 0.7\times 6}}{2\times 6.592\times 0.7}$$

$0<x<1$ より、$x=0.946$ となることから、

$x=1-20h$ より、$h=0.0027$ となる。

Ⅲ．

（１）（Ｈ）　（２）①（Ｆ）②（Ａ）（①、②は完答）　（３）（Ｆ）

［（１）３点　（２）２点　（３）４点］

（１）

クレーム件数の従う確率関数は、

$$\int_0^\infty \left(\frac{\mu^n}{n!}e^{-\mu}\right)\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta\mu}\left(\beta\mu\right)^{\alpha-1}d\mu=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)n!}\int_0^\infty e^{-(\beta+1)\mu}\mu^{n+\alpha-1}d\mu$$

$$=\frac{\beta^\alpha}{(\alpha-1)!n!}\cdot\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\left(\beta+1\right)^{n+\alpha}}$$

$$=\binom{\alpha+n-1}{n}\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^\alpha\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^n$$

となるため、負の二項分布 $NB\left(\alpha,\dfrac{\beta}{\beta+1}\right)$ となる。

したがって、この場合の積率母関数は、

$$M(z)=\frac{\left(\dfrac{\beta}{\beta+1}\right)^\alpha}{\left(1-\dfrac{e^z}{\beta+1}\right)^\alpha}$$

$$=\left(\frac{\beta}{\beta+1-e^z}\right)^\alpha$$

となる。

（２）（１）よりクレーム件数 N は負の二項分布 $NB\left(\alpha,\dfrac{\beta}{\beta+1}\right)$ の確率変数であることから、

$E\left(N\right)=\dfrac{\alpha}{\beta}$、$V\left(N\right)=\dfrac{\alpha\left(\beta+1\right)}{\beta^2}$ となる。

また、今年度のクレーム件数のデータより、

標本平均は、$\left(0\times302+1\times83+2\times9+3\times5+4\times1\right)\div400=0.3$

標本分散は、$\left(0^2\times302+1^2\times83+2^2\times9+3^2\times5+4^2\times1\right)\div400-0.3^2=0.36$

したがって、$E\left(N\right)=\dfrac{\alpha}{\beta}=0.3$、$V\left(N\right)=\dfrac{\alpha\left(\beta+1\right)}{\beta^2}=0.36$ より、

$\alpha=1.5$、$\beta=5.0$ となる。

（３）

ある契約者の今年度のクレーム件数が n 件であったとき、事後分布の確率密度関数は、

$$\pi_{\theta|N}\left(\theta \mid N=n\right)=\frac{P\left(N=n \mid \theta\right)\pi\left(\theta\right)}{P\left(N=n\right)}$$

$$=\frac{\theta^{n}}{n!}\mathrm{e}^{-\theta}\cdot\frac{\beta^{\alpha}e^{-\beta\theta}\theta^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\div\left\{\frac{\Gamma\left(\alpha+n\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)n!}\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^{n}\right\}$$

$$=\frac{\left(\beta+1\right)^{\alpha+n}e^{-(\beta+1)\theta}\theta^{\alpha+n-1}}{\Gamma\left(\alpha+n\right)}$$

となるため、ガンマ分布$\Gamma\left(\alpha+n,\beta+1\right)$となる。

したがって、$n=3$のとき翌年度のクレーム件数の期待値は、

$$E\left(\theta \mid n=3\right)=\frac{\alpha+3}{\beta+1}=\frac{1.5+3}{5+1}=0.75$$

となる。

Ⅳ.

（１）**（C）**　（２）**（G）**　（３）**（B）**　　　［（１）２点　（２）３点　（３）４点］

（１）

強度関数$\lambda(t)$を用いると、$P(N_t=n)=\dfrac{\left(\int_0^t \lambda(s)ds\right)^n}{n!}\exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right)$ $(n=0,1,2,\cdots)$が成り立つ。

期間$[0,5]$のとき、強度関数$\lambda(t)$は$1(0\le t<3)$、$\dfrac{1}{2}(3\le t\le 5)$であることから、

$$P(N_5=1)=\frac{\int_0^3 1ds+\int_3^5 \frac{1}{2}ds}{1!}\exp\left(-\left(\int_0^3 1ds+\int_3^5 \frac{1}{2}ds\right)\right)$$
$$=4\exp(-4)$$
$$=0.073$$

となる。

（２）

１回目のクレームが発生する時刻をT_1と定義する。
期間$[0,3]$における強度関数が$\lambda(t)=1$であることから、T_1は平均１の指数分布に従うことがわかる。
１回目のクレームが期間$[0,3]$に発生し、そのとき$u_0+c(T_1)-X_1<0$となる確率を考えればよいから、それは次のとおり計算ができる。

$$P(u_0+c(T_1)-X_1<0\ ,\ 0<T_1<3)$$
$$=\int_0^3 f_{T_1}(t)dt\int_{u_0+c(t)}^{\infty} f_{X_1}(x)dx$$
$$=\int_0^3 f_{T_1}(t)dt\int_{u_0+c(t)}^{\infty} \frac{1}{\mu}e^{-\frac{x}{\mu}}dx$$
$$=\int_0^3 e^{-\frac{u_0+c(t)}{\mu}} f_{T_1}(t)dt$$
$$=e^{-\frac{u_0}{\mu}}\int_0^3 e^{-\frac{c(t)}{\mu}}e^{-t}dt$$
$$=e^{-2}\int_0^3 e^{-1.5t}e^{-t}dt$$
$$=\frac{e^{-2}}{2.5}\left(1-e^{-7.5}\right)$$
$$=0.054$$

（3）
与えられた強度関数より、オペレーショナル・タイムは以下のとおりとなる。

$$\tau(t) = \begin{cases} t & (0 < t < 3) \\ \dfrac{t}{2} + \dfrac{3}{2} & (t \geq 3) \end{cases}$$

$N'_s = N_{\tau^{-1}(s)}$ はポアソン過程に従い、$\mathrm{P}(N'_s = n) = \dfrac{s^n}{n!} e^{-s}$ $(n = 0, 1, \cdots)$ が成り立つことから、$S_3 = \tau(T_3)$ は

ガンマ分布 $\Gamma(3,1)$ に従うため、

$$\begin{aligned} k &= E(T_3) \\ &= E\left(\tau^{-1}(S_3)\right) \\ &= \int_0^3 s \cdot \frac{s^2}{2} e^{-s} ds + \int_3^\infty (2s-3) \cdot \frac{s^2}{2} e^{-s} ds \\ &= \left[-\frac{1}{2} s^3 e^{-s} - \frac{3}{2} s^2 e^{-s} - 3se^{-s} - 3e^{-s} \right]_0^3 \\ &\qquad + \left[-\frac{1}{2}(2s^3 - 3s^2) e^{-s} - \frac{1}{2}(6s^2 - 6s) e^{-s} - \frac{1}{2}(12s - 6) e^{-s} - 6e^{-s} \right]_3^\infty \\ &= 3 + \frac{27}{2} e^{-3} \end{aligned}$$

となる。
したがって、

$$\begin{aligned} E[U(k)] &= u_0 + c(k) - E[S_k] \\ &= u_0 + (1+\theta)\mu \int_0^k \lambda(s) ds - E[N_k] \cdot E[X] \\ &= 200 + 150\left(\int_0^3 ds + \int_3^{3+\frac{27}{2}e^{-3}} \frac{1}{2} ds \right) - \left(\int_0^3 ds + \int_3^{3+\frac{27}{2}e^{-3}} \frac{1}{2} ds \right) \cdot 100 \\ &= 200 + 150\left(3 + \frac{27}{4} e^{-3}\right) - 100\left(3 + \frac{27}{4} e^{-3}\right) \\ &= 350 + 50 \cdot \frac{27}{4} e^{-3} \\ &= 367 \end{aligned}$$

となる。

V．

（１）**（H）**　（２）**（J）**　（３）**（F）**　［（１）３点　（２）２点　（３）４点］

（１）

積コピュラに基づいた場合、確率変数Xと確率変数Yは互いに独立であるため、発生確率は下表のとおりとなる。

	$Y=10$	$Y=20$	$Y=30$
$X=5$	$P(X=5,Y=10)=0.20$	$P(X=5,Y=20)=0.15$	$P(X=5,Y=30)=0.15$
$X=10$	$P(X=10,Y=10)=0.12$	$P(X=10,Y=20)=0.09$	$P(X=10,Y=30)=0.09$
$X=15$	$P(X=15,Y=10)=0.08$	$P(X=15,Y=20)=0.06$	$P(X=15,Y=30)=0.06$

このとき、下表のとおりとなるため、

$X+Y$	$P(X+Y)$
15	0.20
20	0.12
25	0.23
30	0.09
35	0.21
40	0.09
45	0.06

$$CTE_{75\%}(X+Y)=\frac{0.09\times 40+0.06\times 45}{0.09+0.06}=42$$

（２）

x_iを昇順に並べた場合の 5 番目のデータは 5 であり、y_iを昇順に並べた場合の 5 番目のデータは 20 である。x_iが 5 以下でかつy_iが 20 以下である年度は 5 回なので、題意より$\tilde{C}(0.5,0.5)=0.5$

（３）

経験コピュラに基づいた場合、発生確率は下表のとおりとなる。

	$Y=10$	$Y=20$	$Y=30$
$X=5$	$P(X=5,Y=10)=0.3$	$P(X=5,Y=20)=0.2$	$P(X=5,Y=30)=0.0$
$X=10$	$P(X=10,Y=10)=0.0$	$P(X=10,Y=20)=0.1$	$P(X=10,Y=30)=0.2$
$X=15$	$P(X=15,Y=10)=0.1$	$P(X=15,Y=20)=0.0$	$P(X=15,Y=30)=0.1$

これに対して、出再率αの比例再保険を手配した場合、年間支払保険金は$X+(1-\alpha)Y$となり、その分布は、昇順に並べると下表のとおりとなる

$X+(1-\alpha)Y$	$P(X+(1-\alpha)Y)$
$15-10\alpha$	0.3
$20-10\alpha$	0.0
$25-20\alpha$	0.2
$25-10\alpha$	0.1
$30-20\alpha$	0.1
$35-30\alpha$	0.0
$35-20\alpha$	0.0
$40-30\alpha$	0.2
$45-30\alpha$	0.1

したがって、比例再保険を手配した場合の経験コピュラをもとに算出した$TVaR_{75\%}(X+(1-\alpha)Y)$は

$$TVaR_{75\%}(X+(1-\alpha)Y)=\frac{0.15\times(40-30\alpha)+0.1\times(45-30\alpha)}{0.15+0.1}=42-30\alpha$$

比例再保険を手配しない場合の積コピュラをもとに算出した$TVaR_{75\%}(X+Y)$は、

$$TVaR_{75\%}(X+Y)=\frac{0.10\times35+0.09\times40+0.06\times45}{0.10+0.09+0.06}=39.2$$

比例再保険の再保険料は$(0.4\times10+0.3\times20+0.3\times30)\alpha=19\alpha$であることから、

$$(42-30\alpha)+19\alpha=39.2$$

これを解くと$\alpha=0.255$となる。

VI.

（１）（Ｆ）　（２）（Ａ）　（３）（Ｉ）　　［（１）３点 （２）３点 （３）３点］

（１）

R_1、R_2 をそれぞれ、$R_1^* = \dfrac{R_1 - 80}{7}$、$R_2^* = \dfrac{R_2 - 50}{10}$ と標準化すると、$\begin{pmatrix} R_1^* \\ R_2^* \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0.6 \\ 0.6 & 1 \end{pmatrix}\right)$ となる。$X = R_2^* - kR_1^*$ と R_1 が独立であることと、$Cov\left(X, R_1^*\right) = 0$ が成り立つことは同値であるから、

$$Cov\left(X, R_1^*\right) = Cov\left(R_2^*, R_1^*\right) - kV\left(R_1^*\right) = 0.6 - k \times 1 = 0$$

より、$k = 0.6$ が得られる。

（２）

$X = R_2^* - 0.6R_1^*$ の期待値と分散は、$E\left(X\right) = 0$、

$$V\left(X\right) = V\left(R_2^*\right) + 0.6^2 V\left(R_1^*\right) - 2 \times 0.6 \times Cov\left(R_1^*, R_2^*\right) = 1 + 0.6^2 - 2 \times 0.6 \times 0.6 = 0.64$$

である。よって、X は R_1 と独立に $N\left(0, 0.8^2\right)$ に従う。

$R_1 = 80$ のとき L は X を用いて

$L = 0.4R_1 + 0.6R_2 = 32 + 0.6\left(10X + 50\right) = 6X + 62$ と表せることから、

$$P\left(L \geq 65 \middle| R_1 = 80\right) = P\left(6X + 62 \geq 65 \middle| R_1 = 80\right) = P\left(6X + 62 \geq 65\right) = P\left(X \geq \frac{1}{2}\right)$$

$$= P\left(\frac{X}{0.8} \geq \frac{5}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(0.309 + 0.227\right) = 0.27$$

となる。

（３）

$X = R_2^* - 0.6R_1^*$ と R_1^* によって L は

$$L = 0.4R_1 + 0.6R_2 = 0.4\left(80 + 7R_1^*\right) + 0.6\left(50 + 10R_2^*\right) = 62 + 2.8R_1^* + 6R_2^*$$

$$= 62 + 2.8R_1^* + 6\left(X + 0.6R_1^*\right) = 62 + 6.4R_1^* + 6X$$

と表せる。X は R_1^* と独立に $N\left(0, 0.8^2\right)$ に従うことから、

$$E\left(L \middle| R_1 \geq 80\right) = 62 + 6.4E\left(R_1^* \middle| R_1^* \geq 0\right) + 6E\left(X \middle| R_1^* \geq 0\right) = 62 + 6.4E\left(R_1^* \middle| R_1^* \geq 0\right) + 0$$

が成り立つ。ここで、R_1^* は標準正規分布に従うことから、

$$E\left(R_1^* \middle| R_1^* \geq 0\right) = 2\int_0^\infty z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\right]_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

が成り立ち、

$$E\left(L \middle| R_1 \geq 80\right) = 62 + 6.4\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 67.1$$

となる。