年金数理（問題）

この年金数理の問題において特に説明がない限り、次のとおりとする。

- 「被保険者」とは、在職中の者をいう。
- 「年金受給権者」とは、年金受給中の者および受給待期中の者をいう。
- 「加入年齢方式」とは、「特定年齢方式」のことをいう。
- 「責任準備金」とは、給付現価から標準保険料収入現価を控除した額をいう。
- 「未積立債務」とは、責任準備金から積立金を控除した額をいう。
- 「Trowbridge モデルの年金制度」とは、定年退職者のみに対し、定年退職時より単位年金額の終身年金を年１回期初に支払う年金制度をいい、保険料の払い込みは年１回期初払いとする。なお、「Trowbridge モデルの年金制度」は必ずしも定常人口を仮定するものではない。

問題１． 次の（１）～（８）について、各問の指示に従い解答用紙の所定の欄にマークしなさい。

各５点（計４０点）

（１）x歳の被保険者数が次のとおり表される定常人口に達した年金制度において、新規加入者はa歳のみで加入するものとし、脱退時平均年齢は42歳とする。

$$l_x = 3a - x \quad (a \leq x \leq 3a)$$

あるときから新規加入者数が定常人口に達したときの新規加入者数の$b(0 < b < 1)$倍になったとする。新規加入者数が減少し始めてからa年後の平均年齢が、新規加入者数が減少し始める前の平均年齢より5歳上昇したとき、bとして最も近いものを選択肢の中から１つ選びなさい。

（A）0.30　（B）0.31　（C）0.32　（D）0.33　（E）0.34
（F）0.35　（G）0.36　（H）0.37　（I）0.38　（J）0.39

（２）A,B,Cを脱退事由とする三重脱退残存表がある。各脱退はそれぞれ独立にかつ1年を通じて一様に発生する。また三重脱退残存表から得られるx歳の在職中の被保険者の脱退事由A,B,Cによる予定脱退率をそれぞれq_x^A, q_x^B, q_x^Cとする。一方、脱退事由がA,B,Cそれぞれ単独の場合の、各々単独の脱退残存表から得られるx歳の在職中の被保険者の予定脱退率をそれぞれ$q_x^{A^*}, q_x^{B^*}, q_x^{C^*}$とする。
このとき、$q_x^{A^*}+q_x^{B^*}+q_x^{C^*}-(q_x^A+q_x^B+q_x^C)$を表す算式として最も適当なものを選択肢の中から１つ選びなさい。

（A） $\frac{1}{3}\left(q_x^{A^*}q_x^{B^*}+q_x^{A^*}q_x^{C^*}+q_x^{B^*}q_x^{C^*}\right)+\frac{1}{3}q_x^{A^*}q_x^{B^*}q_x^{C^*}$

（B） $\frac{1}{2}\left(q_x^{A^*}q_x^{B^*}+q_x^{A^*}q_x^{C^*}+q_x^{B^*}q_x^{C^*}\right)+\frac{1}{3}q_x^{A^*}q_x^{B^*}q_x^{C^*}$

（C） $\frac{1}{2}\left(q_x^{A^*}q_x^{B^*}+q_x^{A^*}q_x^{C^*}+q_x^{B^*}q_x^{C^*}\right)+\frac{1}{2}q_x^{A^*}q_x^{B^*}q_x^{C^*}$

（D） $\frac{1}{2}\left(q_x^{A^*}q_x^{B^*}+q_x^{A^*}q_x^{C^*}+q_x^{B^*}q_x^{C^*}\right)+q_x^{A^*}q_x^{B^*}q_x^{C^*}$

（E） $q_x^{A^*}q_x^{B^*}+q_x^{A^*}q_x^{C^*}+q_x^{B^*}q_x^{C^*}+q_x^{A^*}q_x^{B^*}q_x^{C^*}$

（F） $\frac{1}{3}\left(q_x^{A^*}q_x^{B^*}+q_x^{A^*}q_x^{C^*}+q_x^{B^*}q_x^{C^*}\right)-\frac{1}{3}q_x^{A^*}q_x^{B^*}q_x^{C^*}$

（G） $\frac{1}{2}\left(q_x^{A^*}q_x^{B^*}+q_x^{A^*}q_x^{C^*}+q_x^{B^*}q_x^{C^*}\right)-\frac{1}{3}q_x^{A^*}q_x^{B^*}q_x^{C^*}$

（H） $\frac{1}{2}\left(q_x^{A^*}q_x^{B^*}+q_x^{A^*}q_x^{C^*}+q_x^{B^*}q_x^{C^*}\right)-\frac{1}{2}q_x^{A^*}q_x^{B^*}q_x^{C^*}$

（I） $\frac{1}{2}\left(q_x^{A^*}q_x^{B^*}+q_x^{A^*}q_x^{C^*}+q_x^{B^*}q_x^{C^*}\right)-q_x^{A^*}q_x^{B^*}q_x^{C^*}$

（J） $q_x^{A^*}q_x^{B^*}+q_x^{A^*}q_x^{C^*}+q_x^{B^*}q_x^{C^*}-q_x^{A^*}q_x^{B^*}q_x^{C^*}$

（３）次の（A)、(B）の年金の60歳時点の現価が一致しているとする。

（A）60歳支給開始の年6回期末払い20年保証期間付終身年金（ただし、年金額は年額1とし、保証期間終了後に死亡した場合は死亡した日の属する月まで年金を支給する。）
（B）60歳支給開始の年6回期末払い10年確定年金（ただし、t 年目の年金額の年額は $K \times t$ とする。）

このとき、K の値として最も近いものを選択肢の中から1つ選びなさい。なお、必要であれば次の諸数値および基数表を使用しなさい。

＜諸数値＞
$v = 0.98039$ 、$v^{10} = 0.82035$ 、$v^{20} = 0.67297$ 、$v^{1/6} = 0.99671$

＜基数表＞

年齢(x)	D_x	N_x	S_x	$\bar{C}_x$	$\bar{M}_x$
60	38,634	776,332	10,501,012	210	23,645
80	19,435	181,448	1,251,768	737	16,035

（A）0.37　（B）0.39　（C）0.41　（D）0.43　（E）0.45
（F）0.47　（G）0.49　（H）0.51　（I）0.53　（J）0.55

（４）ある年度の期初における責任準備金が1,000、積立金が700である年金制度がある。当該年度において実際の運用利回りが年度を通して一様に年率マイナス10%となり利差損が発生したものの、その他は予定どおりに推移した結果、期末の未積立債務は340となった。その年度の保険料（年１回期央払い）のうち標準保険料は80、特別保険料は60、給付は年１回期末払いとすると、当該年金制度の予定利率は $\boxed{a}.\boxed{b}$ %となる。空欄aおよびbにそれぞれ当てはまる数字を解答欄にマークしなさい。なお、計算結果は%単位で小数点以下第２位を四捨五入して求めるものとし、計算結果が1%未満となる場合はaに０をマークしなさい。

（5）次の**（A）**から**（E）**までの記載のうち、下線部の内容が誤っているものをすべて選びなさい。なお、誤っているものがない場合は**（F）**をマークしなさい。また、各記号の意味は次のとおりとする。

S^p：年金受給権者の給付現価、

S^a：在職中の被保険者の給付現価、

S^a_{PS}：在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価、

G^a：在職中の被保険者の給与現価、

${}^{P}C$：賦課方式の保険料、

${}^{T}C$：退職時年金現価積立方式の保険料、

${}^{U}C$：単位積立方式の保険料、

${}^{In}C$：加入時積立方式の保険料、

i：予定利率、$d = \frac{i}{1+i}$

（A）Trowbridge モデルの年金制度で定常状態のとき、$S^a = ({}^{T}C - {}^{In}C)/\,i$が成立する。

（B）Trowbridge モデルの年金制度で定常状態のとき、$S^p + S^a_{PS} = ({}^{P}C - {}^{U}C)/\,d$が成立する。

（C）保険料は各年度の給与の一定割合、年金給付の額は最終（退職時）給与の一定割合として定める年金制度を考える。この年金制度は定年退職者に対してのみ給付があり、財政方式は加入年齢方式とし、給与指数をb^A_xとした場合の加入年齢x_e歳による標準保険料率を$P^A_{x_e}$、給与指数をb^B_xとした場合の加入年齢x_e歳による標準保険料率を$P^B_{x_e}$とする。このとき、$x_e \leq x_T \leq x_r$なるx_Tが存在しb^A_x、b^B_xについて以下の＜関係式＞を満たすとき、$P^B_{x_e} < P^A_{x_e}$となる。なお、給与指数以外の計算基礎率は$P^A_{x_e}$および$P^B_{x_e}$の算定において同一であるとし、定年までの残存者は存在するものとする。

＜関係式＞

$b^A_x < b^A_{x+1}$　$(x_e \leq x \leq x_r - 1)$

$b^A_x < b^B_x$　$(x_e \leq x \leq x_r - 1)$

$b^B_x = b^A_{x_r}$　$(x_T \leq x \leq x_r)$

（D）（平均給与月額）×（加入月数）× α　（αは定数）を年金額として生存を条件にx_r歳から支給を開始する年金制度を考える。この年金制度の財政方式が開放基金方式の場合、財政再計算において予定脱退率および給与指数を変更しても後発過去勤務債務は発生しない。なお、予定脱退率および給与指数以外の計算基礎率は財政再計算前後で同一であるとする。

（E）ある年金制度の財政方式は加入年齢方式であり、財政再計算において加入年齢以外の計算基礎率は変わらなかったが、加入年齢だけがx_Nからx'_Nに変動し、標準保険料率はP_{x_N}から$P_{x'_N}$へと変動した。このとき過去勤務債務の増加額は$\left(P_{x_N} - P_{x'_N}\right) \times G^a$となる。

（６）2つの年金制度A、Bの統合を考える。このとき、「財政方式を加入年齢方式とした場合の統合初年度の標準保険料と特別保険料の合計額」÷「財政方式を開放基金方式とした場合の統合初年度の標準保険料と特別保険料の合計額」の値として最も近いものを選択肢の中から1つ選びなさい。

なお、いずれの財政方式の場合も未積立債務を10年間で均等に償却するものとし、特別保険料は給与比例で、償却期間中の給与合計は計算基準日の額から変動しないものとして算定するものとする。統合後の年金制度は、年金制度Bの給付設計と同一とし、予定利率、予定脱退率および予定昇給率は見直さないものとする。受給権者の給付水準は変更しない。加入年齢および定年年齢は統合前と統合後で同一とする。

また、計算の過程において、保険料率は％単位で小数点以下第2位を四捨五入したものを使用することとし、保険料の額は小数点以下第1位を四捨五入したものを使用することとする。

年金制度A、Bの概要および諸数値は次のとおりとし、必要であれば、$\ddot{a}_{\overline{10|}} = 8.97087$を使用しなさい。

＜年金制度A、Bの概要＞

・年金制度Aは退職時給与の α 倍を年金として支払う制度である
・年金制度Bは退職時給与の 2α 倍を年金として支払う制度である
・年金制度A、Bの予定脱退率および予定昇給率は同一のものを使用している
・年金制度A、Bともに未積立債務はない
・年金制度Aの財政方式は加入年齢方式、年金制度Bの財政方式は開放基金方式である
・保険料、給付はともに年１回期初払いである
・保険料は標準保険料および特別保険料ともに給与比例である

＜諸数値＞

項目		年金制度A	年金制度B
i	予定利率	2.5%	2.5%
LB	被保険者の給与合計	1,220	1,122
S^P	年金受給権者の給付現価	1,000	1,500
S^a_{PS}	在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価	1,500	2,400
S^a_{FS}	在職中の被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価	2,500	4,000
S^f	将来加入が見込まれる被保険者の給付現価	3,000	6,000
G^a	在職中の被保険者の給与現価	20,000	16,000
G^f	将来加入が見込まれる被保険者の給与現価	30,000	30,000
F	積立金	3,000	3,918

（Ａ）0.90　（Ｂ）0.95　（Ｃ）1.00　（Ｄ）1.05　（Ｅ）1.10
（Ｆ）1.15　（Ｇ）1.20　（Ｈ）1.25　（Ｉ）1.30　（Ｊ）1.35

（７）X 年度末に定常状態に達している年金制度において、$X+1$年度以降の積立金の運用利回りが予定利率どおり推移しなかったため、$X+2$年度以降は各年度において「前年度末の未積立債務の10%」を特別保険料として払い込むことにした。その結果、$X+$ $\boxed{a}$ $\boxed{b}$年度末の積立金がX年度末の積立金の80%を初めて下回った。空欄 a および b に当てはまる数字を解答欄にマークしなさい。なお、計算結果が10未満となる場合は a に 0 をマークしなさい。また、計算の前提は次のとおりとする。

＜計算の前提＞

- 財政方式は加入年齢方式を採用
- 保険料および給付は年１回期初払い
- 積立金の運用利回りが予定利率どおり推移しなかったこと以外は、計算基礎率どおり推移したものとする
- X+$2n-1$年度の積立金の運用利回りはマイナス5.0%、X+$2n$年度の積立金の運用利回りはプラス5.0%（n は自然数）
- 予定利率は2.0%

（８）脱退・昇給・保険料の払い込み・給付の支払いが連続的に起こる年金制度を考える。この年金制度の標準保険料率として最も近いものを選択肢の中から１つ選びなさい。なお、計算の前提を次のとおりとし、必要であれば次の諸数値を使用しなさい。

＜計算の前提＞
・財政方式は加入年齢方式を採用
・標準保険料は被保険者の給与に対する一定割合として設定する
・加入年齢から定年年齢までの期間は40年とする
・給付は加入期間が 20年以上で脱退した場合に支払うものとし、中途退職による脱退時には脱退時給与を3倍した金額を脱退時に一時金として支給し、定年退職による脱退時には脱退時給与を3倍した金額を年金額として脱退時から10年確定年金を支給する
・利力 δ は $\delta = 0.02$とする
・年齢 x 歳における脱退力 μ_x は$\mu_x = 0.06$（年齢に依らず一定）とする
・年齢 x 歳における給与指数をb_xとする
・年齢 x 歳における昇給力 λ_x は$\lambda_x = \frac{d(\log b_x)}{dx} = 0.03$（年齢に依らず一定）とする

＜諸数値＞
$e^{0.2} = 1.2214$、$e^{0.4} = 1.4918$、$e^{0.6} = 1.8221$、$e^{0.8} = 2.2255$、$e = 2.7183$

（A）0.06　（B）0.11　（C）0.16　（D）0.21　（E）0.26
（F）0.31　（G）0.36　（H）0.41　（I）0.46　（J）0.51

余白ページ

問題２． 次の（１）～（４）について、各問の指示に従い解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
各７点（計２８点）

（１）定年退職者に対して、退職した翌年度から「加入年数×1」を年金額とする10年保証期間付終身年金（年１回期初払い）を支給する年金制度を考える。このとき、次の①および②の各問に答えなさい。なお、計算の前提は次のとおりとし、必要であれば次の年１回期初払い確定年金現価率および基数表の数値を用いなさい。

＜計算の前提＞
- 財政方式は加入年齢方式を採用
- 加入年齢は50歳、定年年齢は60歳
- 新規加入、保険料の払い込みは年１回期初に発生し、その順は「新規加入→保険料の払い込み」とする
- 保険料の払い込みは50歳から「定年年齢−1」歳まで発生する
- 死亡による脱退は年１回期央、定年退職による脱退は年１回期末に発生する
- 定年退職以外に生存退職は発生しない
- 期初に「定年年齢−1」歳の被保険者は、期央の死亡による退職と期末の定年年齢到達により脱退する
- 予定利率は2.0%

＜年１回期初払い確定年金現価率＞

n	$\ddot{a}_{\overline{n}\vert}$
5	4.81
10	9.16

＜基数表＞

年齢(x)	D_x	N_x
50	37.15	870.01
55	31.97	694.90
60	27.43	544.38
65	23.46	415.37
70	20.00	305.16
75	16.98	211.35

① この年金制度の計算の前提において定まる標準保険料率をP、計算の前提のうち定年年齢を65歳に変更したときの標準保険料率をP'とする。$P/_{P'}$に最も近いものを選択肢の中から1つ選びなさい。

（A）1.07　（B）1.09　（C）1.11　（D）1.13　（E）1.15
（F）1.17　（G）1.19　（H）1.21　（I）1.23　（J）1.25

② 制度変更を行い、各制度における標準保険料率P_1, P_2, P_3を算定する。$P_1 = P_2$、$P_2 = 1.44P_3$を満たすとき、βの値として最も近いものを選択肢の中から1つ選びなさい。なお、制度変更（計算の前提の変更）の内容は次のとおりとする。

＜制度変更（計算の前提の変更）の内容＞

項番	制度変更（計算の前提の変更）の内容	標準保険料率
1	・定年年齢を65歳に変更 ・年金額を20に変更	P_1
2	・年金額を$1.03^5 \times \alpha$に変更 ・年金の支給開始年齢を65歳に変更 ※定年年齢は60歳のままとし、60歳～64歳で死亡した場合には、定年退職から5年後より、遺族に10年確定年金を支給するものとする	P_2
3	・定年年齢を65歳に変更 ・保証期間を5年に変更 ・保証期間中の年金額をβ、保証期間終了後の年金額をαに変更	P_3

（A）18　（B）19　（C）20　（D）21　（E）22
（F）23　（G）24　（H）25　（I）26　（J）27

（２）ある企業はX年度初に、定年退職者に対し退職時に一時金 100 を支払う制度を発足させることにした。このとき、次の①～③の各問に答えなさい。なお、計算の前提および諸数値は次のとおりとする。

＜計算の前提＞

・財政方式は個人平準保険料方式を採用
・定年年齢は 60 歳
・新規加入、保険料の払い込みは年 1 回期初に発生し、その順は「新規加入→保険料の払い込み」とする
・$X+1$年度以降、毎年、50 歳の被保険者 200 人が新規加入する
・保険料の払い込みは 50 歳から 59 歳まで発生する
・中途退職（加入中の死亡を含む）による脱退は年 1 回期央、定年退職による脱退は年 1 回期末に発生する
・期初に 59 歳の被保険者は、期央の中途退職（加入中の死亡を含む）と期末の定年年齢到達により脱退する
・期初にx歳である被保険者の中途退職（加入中の死亡を含む）による予定脱退率は$\frac{1}{70-x}$である
・発足時に既に退職している者への給付は行わない
・制度発足時の積立金は 0
・予定利率は 2.5%
・発足後は計算基礎率どおりに推移するものとする

＜諸数値＞

年齢(x)	制度発足時 被保険者数	人数現価	給付現価
50	200	7.0437	39.0599
51	190	6.5208	42.1436
52	0	5.9732	45.5970
53	170	5.3974	49.4862
54	0	4.7891	53.8936
55	150	4.1427	58.9236
56	0	3.4514	64.7108
57	130	2.7059	71.4307
58	0	1.8943	79.3179
59	110	1.0000	88.6918

※給付現価および人数現価は被保険者 1 人あたりの数値である。

① $X+2$年度に払い込む保険料の総額として最も近いものを選択肢の中から１つ選びなさい。

（A） 9,200　（B） 9,400　（C） 9,600　（D） 9,800　（E）10,000
（F）10,200　（G）10,400　（H）10,600　（I）10,800　（J）11,000

② $X+4$年度初（新規加入発生前）に財政方式を加入年齢方式に変更する場合を考える。加入年齢方式における加入年齢を 50 歳としたとき、財政方式を変更することにより発生する未積立債務として最も近いものを選択肢の中から１つ選びなさい。

（A）2,800　（B）3,000　（C）3,200　（D）3,400　（E）3,600
（F）3,800　（G）4,000　（H）4,200　（I）4,400　（J）4,600

③ 次の２つの場合を考える。

Ⅰ．$X+4$年度初（新規加入発生前）に財政方式を加入年齢方式（加入年齢を 50 歳とする）に変更し、財政方式を変更することにより発生する未積立債務を一括で払い込みした場合

Ⅱ．$X+4$年度初（新規加入発生前）以降も個人平準保険料方式のまま変更しなかった場合

このとき、ⅠとⅡの積立金が等しくなる時期は$X+$ $\boxed{a}$ $\boxed{b}$年度期初（新規加入発生後・保険料払い込み後）である。空欄 a および b に当てはまる数字を解答欄にマークしなさい。なお、計算結果が 10 未満となる場合は a に 0 をマークしなさい。

（３）Trowbridge モデルの年金制度について、次の①～③の各問に答えなさい。
なお、本問では以下のとおり記号を定義する。

x_e：加入年齢

x_r：定年年齢

ω：生存最終年齢

$i(i > 0)$：予定利率（$v = \frac{1}{1+i}$ 、$d = 1 - v$）

a_{x_r}：x_r歳における期末払い終身年金現価率

e_{x_r}：x_r歳における略算平均余命とし、以下の算式で表される

$$e_{x_r} = \sum_{t=1}^{\omega - x_r} \frac{l_{x_r+t}}{l_{x_r}}$$

① ある年金制度は定常人口にある被保険者集団に対し、事前積立方式により運営され、定常状態になっているものとする。この制度において、X年度から保険料をそれまでの$\alpha(\alpha > 1)$倍に変更し、$n(n > 0)$年間その保険料を継続することにより積立金を増やしていくこととした。そして、その上で$X + n$年度以降は完全積立方式により運営され、定常状態になるようにしたい。
このとき

$$\alpha = \frac{\boxed{a}}{\boxed{b} - \boxed{c}}$$

となる。a、b、cとして最も適切なものをそれぞれ選択肢の中から一つずつ選びなさい。なお、解答にあたり同じ選択肢を複数回選択してもよい。

② ある年金制度は定常人口にある被保険者集団に対し、加入時積立方式により運営され、定常状態になっているものとする。この制度において、X年度から保険料をそれまでの$\alpha(\alpha < 1)$倍に変更し、$n(n > x_r - x_e)$年間その保険料を継続することにより積立金を減らしていくこととした。そして、その上で$X + n$年度以降は単位積立方式により運営され、定常状態になるようにしたい。
このとき

$$\alpha = \frac{\boxed{a}}{\boxed{b} - \boxed{c}} \cdot \left(1 - \frac{\boxed{d} \cdot \left(\boxed{e} - \boxed{f}\right)}{\boxed{g} \cdot \boxed{h}}\right)$$

となる。d、e、f、g、hとして最も適切なものをそれぞれ選択肢の中から一つずつ選びなさい。なお、解答にあたり同じ選択肢を複数回選択してもよい。（gとhの解答は順不同）

③ ある年金制度は定常人口にある被保険者集団に対し、加入時積立方式により運営され、定常状態になっているものとする。この制度において、X年度から$n(n > 0)$年間の保険料を0とし、積立金を減らしていくこととした。そして、その上で$X + n - 1$年度中に積立金を枯渇させることとする。
このとき

$$n = \left\lceil \boxed{i} + \log\left(\frac{\boxed{j}}{\boxed{k}}\right) \cdot \frac{1}{\log\left(\boxed{l}\right)} \right\rceil$$

となる。i、j、k、lとして最も適切なものをそれぞれ選択肢の中から一つずつ選びなさい。
（$\lceil x \rceil$はx以上の最小の整数を表す。）なお、解答にあたり同じ選択肢を複数回選択してもよい。

［選択肢］

(A) 1	(B) d	(C) $1+i$	(D) $(1+i)^{x_r-x_e}$
(E) $(1+i)^{x_r-x_e-1}$	(F) $(1+i)^{x_r-x_e+1}$	(G) v^n	(H) v^{n+1}
(I) $v^{x_r-x_e-1}$	(J) $v^{x_r-x_e}$	(K) $v^{x_r-x_e+1}$	(L) x_r-x_e-1
(M) x_r-x_e	(N) x_r-x_e+1	(O) e_{x_r}	(P) $e_{x_r}+1$
(Q) a_{x_r}	(R) $a_{x_r}+1$	(S) $l_{x_e}^{(T)}$	(T) l_{x_r}

（4）加入期間が3年以上の中途退職者および定年退職者に対し、年度末に「脱退時給与×支給率」の額の一時金を支給する制度のX年度財政決算を行った。X年度では計算基礎率どおり推移しなかったことから損益が発生した。なお、計算の前提および損益の発生要因は次のとおりとする。このとき、次の①および②の各問に答えなさい。

＜計算の前提＞
・財政方式は加入年齢方式を採用
・予定利率は2%
・標準保険料は給与に比例し標準保険料率は3%であり、特別保険料は$X-3$年度初時点の未積立債務を$X-3$年度初から10年で元利均等償却（定額）を行うよう設定している
・新規加入、保険料の払い込みは年１回期初に発生し、その順は「新規加入→保険料の払い込み」とする
・給付は年１回期末払いで、X年度の給付額は 2,000千円
・脱退と昇給は年１回期末に発生し、その順は「脱退→昇給」とする
・期初積立金は33,000千円（保険料払い込み前）
・期初責任準備金は35,000千円（新規加入者の加入前）
・期初給与総額は80,000千円（新規加入者の加入前）
・X年度初（新規加入者の加入前）において、積立金の額と、責任準備金から特別保険料収入現価を控除した額は等しい

＜損益の発生要因＞
・利差：予定利率が2%であるのに対し、実際の運用利回りは5%であった
・新規加入者：予定加入年齢を25歳としているが、年度初に年齢30歳で新規に4名加入した
なお、当該加入者の加入時給与は1名あたり150千円、期初責任準備金率（給与1円あたりの責任準備金）は0.1であった
・昇給差：全加入者一律に、年度末の実際の昇給後給与が予定の昇給後給与の1.1倍であった
※上記以外の要因による損益は発生していない

① X年度の保険料総額として最も近いものを選択肢の中から１つ選びなさい。

（A）2,670千円　（B）2,680千円　（C）2,690千円　（D）2,700千円　（E）2,710千円
（F）2,720千円　（G）2,730千円　（H）2,740千円　（I）2,750千円　（J）2,760千円

② 発生した損益の合計額として最も近いものを選択肢の中から１つ選びなさい。なお、計算過程において、損失は正値、利益は負値として扱いなさい。

（Ａ）2,610千円　（Ｂ）2,620千円　（Ｃ）2,630千円　（Ｄ）2,640千円　（Ｅ）2,650千円
（Ｆ）2,660千円　（Ｇ）2,670千円　（Ｈ）2,680千円　（Ｉ）2,690千円　（Ｊ）2,700千円

問題３． キャッシュバランス制度の年金制度について考察を行う。制度内容、記号および計算の前提を次のとおりとするとき、次の（１）および（２）の①～㉖について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。ただし、⑤と⑥、⑦と⑧、⑱と⑲、⑳と㉑の解答は順不同とする。なお、解答にあたり同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（１６点）

＜制度内容＞

項目	内容
加入時期	年１回期初加入
給付内容	＜中途退職による脱退の場合＞ 加入時から脱退時までの毎期初の給与に、脱退時までは年利率 i_1、脱退時から x_r 歳までは年利率 i_2 で複利で付利した額の合計額を、 x_r 歳到達時に一時金として支給する。 ＜定年退職による脱退の場合＞ 加入時から脱退時までの毎期初の給与に、脱退時までは年利率 i_1 で複利で付利した額の合計額を、年利率 i_3 の年１回期初払い n 年確定年金現価率で除した額を、年金として x_r 歳から年１回期初払いで生死に関わらず n 年間支給する。
脱退時期	中途退職による脱退は年１回期末、定年退職による脱退は年１回期末に発生する。 つまり、期初に x_r-1 歳の被保険者は、期末の中途退職と期末の定年年齢到達により脱退する。なお、加入中の死亡者は発生しないものとする。
財政方式	加入年齢方式
保険料	年１回期初に「期初時点の加入者の給与総額×標準保険料率 ${}^{E}P$」を払い込む。

＜記号＞

・x_e ：加入年齢、x_r ：定年年齢（年金支給開始年齢）

・b_x ：給与指数、B_x ：x 歳の被保険者の１人あたりの給与

・i ：予定利率、 $v=\frac{1}{1+i}$ 、 $\ddot{a}_{\overline{n|}}(i)$ ：利率 i の年１回期初払い n 年確定年金現価率

＜計算の前提＞

・計算基数（D_x、C_x）は x_r 歳未満において期末の生存脱退のみを考慮したものである。

・x_r 歳未満の死亡は一切考慮しないものとする。

・期初の保険料の払い込み等が発生する順は「昇給→新規加入者の加入→保険料の払い込みおよび給与の付与」とし、期末の給付の支払い等の発生する順は「年利率 i_1 および年利率 i_2 での付利→中途退職による脱退および一時金の支払い→定年退職による脱退」とする。

（１）x_e 歳で加入した被保険者が給与指数どおりに昇給した場合の x 歳時点の給付現価および給与現価について考える。

当該被保険者が期初に $y\ (x \leqq y \leqq x_r - 1)$ 歳である年度に中途退職により脱退した場合に x_r 歳時点で支払われる一時金の額は

$\boxed{①} \times \boxed{②}$

と表すことができる。また、定年退職により脱退した場合に x_r 歳から支払われる年金の額は

$\boxed{③} \times \boxed{④}$

と表すことができる。したがって、x 歳の被保険者 1 人あたりの期初（新規加入者加入後、保険料払い込み前）における給付現価を S_x 、給与現価を G_x とすると

$$S_x = \sum_{y=x}^{x_r-1} \left\{ \boxed{⑤} \times \left(\boxed{①} \times \boxed{②} \right) \times \boxed{⑥} \right\} + \boxed{⑦} \times \left(\boxed{③} \times \boxed{④} \right) \times \boxed{⑧}$$

と表すことができる。

ここで、$i_1 = i_2 = i_3 = i$ であるとすると、

$$S_x = \frac{1}{v^x \times l_x} \times \left\{ \sum_{y=x}^{x_r-1} \left\{ \left(\boxed{⑨} - \boxed{⑩} \right) \times \boxed{⑪} \right\} + \boxed{⑫} \times \boxed{⑬} \right\}$$

$$= \frac{1}{D_x} \times \left(l_x \times \boxed{⑭} + \boxed{⑮} \right)$$

$$G_x = \frac{1}{D_x} \times \boxed{⑯}$$

である。したがって、当該年金制度の標準保険料率 ${}^{E}P$ は、${}^{E}P = \dfrac{S_{x_e}}{G_{x_e}} = \boxed{⑰}$ となる。

［①、③、⑪、⑬の選択肢］

（A） $\displaystyle\sum_{t=x_e}^{y} \frac{B_x}{b_x} b_t$

（B） $\displaystyle\sum_{t=x_e}^{x_r-1} \frac{B_x}{b_x} b_t$

（C） $\displaystyle\sum_{t=x_e}^{y} \frac{B_x}{b_x} b_t\, v^t$

（D） $\displaystyle\sum_{t=x_e}^{x_r-1} \frac{B_x}{b_x} b_t\, v^t$

（E） $\displaystyle\sum_{t=x_e}^{y} \frac{B_x}{b_x} b_t\, v^{y-t}$

（F） $\displaystyle\sum_{t=x_e}^{x_r-1} \frac{B_x}{b_x} b_t\, v^{x_r-t}$

（G） $\displaystyle\sum_{t=x_e}^{y} \frac{B_x}{b_x} b_t\, (1+i_1)^t$

（H） $\displaystyle\sum_{t=x_e}^{x_r-1} \frac{B_x}{b_x} b_t\, (1+i_1)^{x_r}$

（I） $\displaystyle\sum_{t=x_e}^{y} \frac{B_x}{b_x} b_t\, (1+i_1)^{y-t+1}$

（J） $\displaystyle\sum_{t=x_e}^{x_r-1} \frac{B_x}{b_x} b_t\, (1+i_1)^{x_r-t}$

［②、④、⑤、⑥、⑦、⑧の選択肢］

（A） v^y　（B） v^{x_r-y-1}　（C） $(1+i)^y$　（D） $(1+i)^{x_r-y-1}$

（E） $(1+i_2)^y$　（F） $(1+i_2)^{x_r-y-1}$　（G） $\dfrac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}(i)}$　（H） $\dfrac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}(i_3)}$

（I） $\ddot{a}_{\overline{n}|}(i)$　（J） $\ddot{a}_{\overline{n}|}(i_3)$　（K） $\dfrac{C_y}{D_x}$　（L） $\dfrac{D_{x_r}}{D_x}$

［⑨、⑩、⑫、⑭、⑮、⑯、⑰の選択肢］

（A） 1　（B） l_y　（C） l_{y+1}　（D） l_{x_r}

（E） $\dfrac{B_x}{b_x}b_y l_y$　（F） $\dfrac{B_x}{b_x}b_{x_r}l_{x_r}$　（G） $\displaystyle\sum_{t=x_e}^{x}\frac{B_x}{b_x}b_t\,v^t$　（H） $\displaystyle\sum_{t=x}^{x_r-1}\frac{B_x}{b_x}b_t\,v^t$

（I） $\displaystyle\sum_{t=x+1}^{x_r-1}\frac{B_x}{b_x}b_t\,v^t$　（J） $\displaystyle\sum_{t=x_e}^{x}\frac{B_x}{b_x}b_t\,D_t$　（K） $\displaystyle\sum_{t=x}^{x_r-1}\frac{B_x}{b_x}b_t\,D_t$　（L） $\displaystyle\sum_{t=x+1}^{x_r-1}\frac{B_x}{b_x}b_t\,D_t$

（２）ある年金制度がある期初に本問のキャッシュバランス制度へ変更する場合について考える。制度変更の直前に昇給があり、制度変更の直後に新規加入者が加入するものとし、制度変更時点で x 歳である被保険者の変更後の給付内容は次のとおりとする。

＜中途退職による脱退の場合＞

次の（ｉ）（ⅱ）の額の合計額（以下、「支給開始時仮想個人勘定残高（変更時保証付き）」という。）をx_r 歳到達時に一時金として支給する。

（ｉ）制度変更時保証額（A_x）を、制度変更時から脱退時までは年利率 i_1、脱退時から x_r 歳までは年利率 i_2 で複利で付利した額

（ⅱ）制度変更時から脱退時までの毎期初の給与に、脱退時までは年利率 i_1、脱退時から x_r 歳までは年利率 i_2 で複利で付利した額の合計額

＜定年退職による脱退の場合＞

定年退職による脱退の場合の支給開始時仮想個人勘定残高（変更時保証付き）を、年利率 i_3 の年 1 回期初払い n 年確定年金現価率で除した額を、年金として x_r 歳から年 1 回期初払いで生死に関わらず n 年間支払う。

（１）と同様に、制度変更時点で x 歳である被保険者 1 人あたりの制度変更時点での変更後の給付現価を S_x 、給与現価を G_x とすると

$$S_x = \sum_{y=x}^{x_r-1} \left\{ \boxed{⑤} \times \left(\boxed{⑱} + \boxed{⑲} \right) \times \boxed{②} \times \boxed{⑥} \right.$$

$$\left. + \boxed{⑦} \times \left(\boxed{⑳} + \boxed{㉑} \right) \times \boxed{④} \times \boxed{⑧} \right\}$$

と表すことができる。

ここで、$i_1 = i_2 = i_3 = i$ であるとすると、

$S_x = \dfrac{1}{D_x} \times \boxed{㉒} + \boxed{㉓}$、$G_x = \dfrac{1}{D_x} \times \boxed{㉔}$である。

変更後の年金制度における標準保険料率 ${}^{E}P$ は、（1）より ${}^{E}P = \boxed{⑰}$であるので、制度変更時点で x 歳である被保険者 1 人あたりの制度変更時点での変更後の責任準備金は

$V_x = \boxed{㉕}$

となる。

以上より、制度変更前の制度が定常状態であったとすると、各被保険者について制度変更に伴う剰余および不足が発生しないようにするためには、A_x を$\boxed{㉖}$とすればよいことが分かる。

［⑱、⑲、⑳、㉑、㉒、㉓、㉔、㉕の選択肢］

（A） 0

（B） A_x

（C） $A_x(1+i_1)^{y-x_e}$

（D） $A_x(1+i_1)^{y-x+1}$

（E） $A_x(1+i_1)^{x_r-x}$

（F） $\sum_{t=x}^{y} A_t (1+i_1)^{y-t}$

（G） $\sum_{t=x}^{y} A_t (1+i_1)^{y-t+1}$

（H） $\sum_{t=x}^{x_r-1} A_t (1+i_1)^{x_r-t}$

（I） $\sum_{t=x}^{y} \dfrac{B_x}{b_x} b_t$

（J） $\sum_{t=x}^{x_r-1} \dfrac{B_x}{b_x} b_t$

（K） $\sum_{t=x}^{y} \dfrac{B_x}{b_x} b_t (1+i_1)^{y-t+1}$

（L） $\sum_{t=x}^{x_r-1} \dfrac{B_x}{b_x} b_t (1+i_1)^{x_r-t}$

（M） $\sum_{t=x_e}^{x} \dfrac{B_x}{b_x} b_t D_t$

（N） $\sum_{t=x}^{x_r-1} \dfrac{B_x}{b_x} b_t D_t$

（O） $\sum_{t=x+1}^{x_r-1} \dfrac{B_x}{b_x} b_t D_t$

［㉖の選択肢］

（A）変更前の制度における責任準備金

（B）変更前の制度における責任準備金を定年年齢まで予定利率で複利で付利した額

（C）変更前の制度における給付現価

（D）変更前の制度における給付現価を定年年齢まで予定利率で複利で付利した額

（E）0

問題４． 年金制度A、Bは定年退職者に対して退職した翌年度から「加入年数×1」の年金額の 10 年確定年金（年１回期初払い）を支給し、中途退職者には給付を行わない。この年金制度の計算の前提および諸数値を次のとおりとするとき、次の（１）～（３）について、各問の指示に従い解答用紙の所定の欄にマークしなさい。

（１６点）

＜計算の前提（財政再計算前）＞

・年金制度Aの財政方式は加入年齢方式、年金制度Bの財政方式は開放基金方式とする
・加入年齢は 45 歳、定年年齢は 60 歳
・X年度末の時点で年金制度A、Bともに定常人口であり、財政上の過不足はなく、特別保険料の払い込みもない
・X年度以前の「毎年の実際の新規加入者数」、「毎年の新規加入者数の見込み」はともにl_0人である
・予定脱退率（加入中の死亡を含む）はすべての年齢で 3.0%
・新規加入、保険料の払い込みは年１回期初に発生し、その順は「新規加入→保険料の払い込み」とする
・中途退職（加入中の死亡を含む）による脱退は年１回期央、定年退職による脱退は年１回期末に発生する
・期初に 59 歳の被保険者は、期央の中途退職（加入中の死亡を含む）と期末の定年年齢到達により脱退する
・予定利率は 2.5%

＜年金制度A、B共通の諸数値（X年度末（定年退職者脱退後かつ財政再計算前））＞

年金受給権者の給付現価	$486.008\ l_0$
在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価	$524.700\ l_0$
在職中の被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価	$471.509\ l_0$
将来の被保険者の給付現価	$2{,}412.280\ l_0$
在職中の被保険者の人数現価	$71.222\ l_0$
将来の被保険者の人数現価	$430.001\ l_0$
被保険者数	$11.225\ l_0$

$\ddot{a}_{\overline{10|}} = 8.97087$、$0.97^{15} = 0.63325$、$0.97^{20} = 0.54379$、$\left(\frac{1}{1.025}\right)^{15} = 0.69047$、$\left(\frac{1}{1.025}\right)^{20} = 0.61027$

（１）X年度末に年金制度Aの財政再計算を行い、次の＜計算の前提（財政再計算による変更点）＞のとおり変更した。＜計算の前提（財政再計算による変更点）＞に記載のない計算の前提については財政再計算前と同一とする。このとき、財政再計算後の被保険者１人あたりの標準保険料は $\boxed{①}$ 、年金制度A全体の責任準備金は $\boxed{②}$ 、１人あたりの特別保険料は $\boxed{③}$ である。このとき、空欄①～③に最も近いものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。なお、解答に至る計算過程においては、端数処理前の数値を用いること。また、③の解答にあたっては次の＜特別保険料の計算の前提＞を使用しなさい。

＜計算の前提（財政再計算による変更点）＞
・加入年齢は 40 歳とする
・40 歳から 44 歳までの予定脱退率（加入中の死亡を含む）についてはすべての年齢で 3.0%とする
・$X+1$年度以降の新規加入者数の見込みは$0.5\ l_0$人とする

＜特別保険料の計算の前提＞
・$X+1$年度から３年間、年１回期初払い
・特別保険料払い込み時の被保険者数の見込みおよび償却期間中の被保険者数の増減を見込んで、償却期間を通じて被保険者１人あたりの特別保険料が同額となるように設定する

［①の選択肢］

（A）4.720	（B）4.740	（C）4.760	（D）4.780	（E）4.800
（F）4.820	（G）4.840	（H）4.860	（I）4.880	（J）4.900

［②の選択肢］

（A）1,139 l_0	（B）1,142 l_0	（C）1,145 l_0	（D）1,148 l_0	（E）1,151 l_0
（F）1,154 l_0	（G）1,157 l_0	（H）1,160 l_0	（I）1,163 l_0	（J）1,166 l_0

［③の選択肢］

（A）0.000	（B）1.610	（C）1.640	（D）1.670	（E）1.700
（F）1.730	（G）1.760	（H）1.790	（I）1.820	（J）1.850

（２）X年度末に年金制度Bの財政再計算を行い、（１）の＜計算の前提（財政再計算による変更点）＞のとおり変更した。（１）の＜計算の前提（財政再計算による変更点）＞に記載のない計算の前提については財政再計算前と同一とする。このとき、財政再計算後の被保険者１人あたりの標準保険料は $\boxed{①}$ 、年金制度B全体の責任準備金は $\boxed{②}$ 、１人あたりの特別保険料は $\boxed{③}$ である。このとき、空欄①～③に最も近いものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。なお、解答に至る計算過程においては、端数処理前の数値を用いること。また、③の解答にあたっては（１）の＜特別保険料の計算の前提＞を使用しなさい。

［①の選択肢］

（A）5.000	（B）5.030	（C）5.060	（D）5.090	（E）5.120
（F）5.150	（G）5.180	（H）5.210	（I）5.240	（J）5.270

［②の選択肢］

（A）1,002 l_0	（B）1,005 l_0	（C）1,008 l_0	（D）1,011 l_0	（E）1,014 l_0
（F）1,017 l_0	（G）1,020 l_0	（H）1,023 l_0	（I）1,026 l_0	（J）1,029 l_0

［③の選択肢］

（A）0.000	（B）0.005	（C）0.010	（D）0.015	（E）0.020
（F）0.025	（G）0.030	（H）0.035	（I）0.040	（J）0.045

（３）（１）および（２）で算出した財政再計算後の標準保険料および特別保険料を$X+1$年度から適用することとする。また、年金制度A、Bともに、$X+1$年度の期初に 40 歳の被保険者が$0.4\ l_0$人、45 歳の被保険者が$0.3\ l_0$人加入した。新規加入が見込みと異なったこと以外は計算基礎率どおり推移したとき、$X+1$年度末の年金制度Aの積立金は［　①　］、年金制度Aの責任準備金は［　②　］、年金制度Bの積立金は［　③　］、年金制度Bの責任準備金は［　④　］となった。このとき、空欄①～④に最も近いものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。なお、１人あたりの標準保険料および特別保険料は<u>（１）①③および（２）①③の解答の過程で算定した端数処理前の値</u>を使用しなさい。

［①の選択肢］

（Ａ）$1{,}072\ l_0$　（Ｂ）$1{,}075\ l_0$　（Ｃ）$1{,}078\ l_0$　（Ｄ）$1{,}081\ l_0$　（Ｅ）$1{,}084\ l_0$
（Ｆ）$1{,}087\ l_0$　（Ｇ）$1{,}090\ l_0$　（Ｈ）$1{,}093\ l_0$　（Ｉ）$1{,}096\ l_0$　（Ｊ）$1{,}099\ l_0$

［②の選択肢］

（Ａ）$1{,}128\ l_0$　（Ｂ）$1{,}131\ l_0$　（Ｃ）$1{,}134\ l_0$　（Ｄ）$1{,}137\ l_0$　（Ｅ）$1{,}140\ l_0$
（Ｆ）$1{,}143\ l_0$　（Ｇ）$1{,}146\ l_0$　（Ｈ）$1{,}149\ l_0$　（Ｉ）$1{,}152\ l_0$　（Ｊ）$1{,}155\ l_0$

［③の選択肢］

（Ａ）$994\ l_0$　（Ｂ）$996\ l_0$　（Ｃ）$998\ l_0$　（Ｄ）$1{,}000\ l_0$　（Ｅ）$1{,}002\ l_0$
（Ｆ）$1{,}004\ l_0$　（Ｇ）$1{,}006\ l_0$　（Ｈ）$1{,}008\ l_0$　（Ｉ）$1{,}010\ l_0$　（Ｊ）$1{,}012\ l_0$

［④の選択肢］

（Ａ）$994\ l_0$　（Ｂ）$996\ l_0$　（Ｃ）$998\ l_0$　（Ｄ）$1{,}000\ l_0$　（Ｅ）$1{,}002\ l_0$
（Ｆ）$1{,}004\ l_0$　（Ｇ）$1{,}006\ l_0$　（Ｈ）$1{,}008\ l_0$　（Ｉ）$1{,}010\ l_0$　（Ｊ）$1{,}012\ l_0$

以上

年金数理（解答例）

問題１.

（１）

脱退時平均年齢は次のとおりとなる。

$$a+\frac{T_a}{l_a}=a+\frac{\int_a^{3a}(3a-x)dx}{2a}=a+\frac{\left[3ax-\frac{1}{2}x^2\right]_a^{3a}}{2a}=2a=42$$

よって、$a=21$

また、新規加入者数の変更前の平均年齢は次のとおりとなる。

$$\frac{\int_a^{3a}\ x\cdot l_x dx}{\int_a^{3a}\ l_x\,dx}=\frac{\int_a^{3a}\ (3ax-x^2)dx}{\int_a^{3a}\ (3a-x)\,dx}=\frac{\left[\frac{3}{2}ax^2-\frac{1}{3}x^3\right]_a^{3a}}{\left[3ax-\frac{1}{2}x^2\right]_a^{3a}}=\frac{5}{3}a=35$$

次に、新規加入者数の変更後の平均年齢は次のとおりとなる。

$$\frac{b\cdot\int_a^{2a}\ x\cdot l_x dx+\int_{2a}^{3a}\ x\cdot l_x dx}{b\cdot\int_a^{2a}\ l_x\,dx+\int_{2a}^{3a}\ l_x\,dx}=\frac{b\cdot\int_a^{2a}\ (3ax-x^2)dx+\int_{2a}^{3a}\ (3ax-x^2)dx}{b\cdot\int_a^{2a}\ (3a-x)\,dx+\int_{2a}^{3a}\ (3a-x)\,dx}$$

$$=\frac{b\cdot\left[\frac{3}{2}ax^2-\frac{1}{3}x^3\right]_a^{2a}+\left[\frac{3}{2}ax^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{2a}^{3a}}{b\cdot\left[3ax-\frac{1}{2}x^2\right]_a^{2a}+\left[3ax-\frac{1}{2}x^2\right]_{2a}^{3a}}$$

$$=\frac{13b+7}{9b+3}\cdot a=40$$

したがって、$b=0.31034\ldots$

よって、解答は（B）

（２）

x歳の ${}_tq_x^{A*}$（ただし、$0 \le t \le 1$）は脱退力μ_x^Aを使って表すと、 ${}_tq_x^{A*} = \int_0^t (1 - {}_sq_x^{A*})\mu_{x+s}^A ds$である。

また、脱退の発生は一様に起こると仮定していることから、 ${}_tq_x^{A*} = tq_x^{A*}$となる。したがって、

$tq_x^{A*} = \int_0^t (1 - {}_sq_x^{A*})\mu_{x+s}^A ds$ である。

両辺をtで微分すると、$q_x^{A*} = (1 - {}_tq_x^{A*})\mu_{x+t}^A$となるため、$\mu_{x+t}^A = \frac{q_x^{A*}}{1-tq_x^{A*}}$

同様にして、$\mu_{x+t}^B = \frac{q_x^{B*}}{1-tq_x^{B*}}$、$\mu_{x+t}^C = \frac{q_x^{C*}}{1-tq_x^{C*}}$ と表せる。

一方、x歳のq_x^Aを脱退力を使って表すと、

$$q_x^A = \int_0^1 \exp\left\{-\int_0^t (\mu_{x+s}^A + \mu_{x+s}^B + \mu_{x+s}^C)\,ds\right\}\mu_{x+t}^A\,dt$$

$$= \int_0^1 \exp\left\{-\int_0^t \left(\frac{q_x^{A^*}}{1 - sq_x^{A^*}} + \frac{q_x^{B^*}}{1 - sq_x^{B^*}} + \frac{q_x^{C^*}}{1 - sq_x^{C^*}}\right)ds\right\}\frac{q_x^{A^*}}{1 - tq_x^{A^*}}\,dt$$

$$= \int_0^1 \exp\left\{\left[\log\left(1 - sq_x^{A^*}\right) + \log\left(1 - sq_x^{B^*}\right) + \log\left(1 - sq_x^{C^*}\right)\right]_0^t\right\}\frac{q_x^{A^*}}{1 - tq_x^{A^*}}\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(1 - tq_x^{A^*}\right)\left(1 - tq_x^{B^*}\right)\left(1 - tq_x^{C^*}\right)\frac{q_x^{A^*}}{1 - tq_x^{A^*}}\,dt$$

$$= q_x^{A^*}\int_0^1 \left(1 - tq_x^{B^*}\right)\left(1 - tq_x^{C^*}\right)dt$$

$$= q_x^{A^*}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(q_x^{B^*} + q_x^{C^*}\right) + \frac{1}{3}q_x^{B^*}q_x^{C^*}\right\}$$

$$= q_x^{A^*} - \frac{1}{2}\left(q_x^{A^*}q_x^{B^*} + q_x^{A^*}q_x^{C^*}\right) + \frac{1}{3}q_x^{A^*}q_x^{B^*}q_x^{C^*}$$

$$\leftrightarrow q_x^{A^*} - q_x^A = \frac{1}{2}\left(q_x^{A^*}q_x^{B^*} + q_x^{A^*}q_x^{C^*}\right) - \frac{1}{3}q_x^{A^*}q_x^{B^*}q_x^{C^*} \cdots (\text{i})$$

同様に、

$$q_x^{B^*} - q_x^B = \frac{1}{2}\left(q_x^{A^*}q_x^{B^*} + q_x^{B^*}q_x^{C^*}\right) - \frac{1}{3}q_x^{A^*}q_x^{B^*}q_x^{C^*} \cdots (\text{ii})$$

$$q_x^{C^*} - q_x^C = \frac{1}{2}\left(q_x^{A^*}q_x^{C^*} + q_x^{B^*}q_x^{C^*}\right) - \frac{1}{3}q_x^{A^*}q_x^{B^*}q_x^{C^*} \cdots (\text{iii})$$

上記より(ｉ)から(ⅲ)を足し合わせ整理すると、

$$q_x^{A*} + q_x^{B*} + q_x^{C*} - (q_x^A + q_x^B + q_x^C) = q_x^{A^*}q_x^{B^*} + q_x^{A^*}q_x^{C^*} + q_x^{B^*}q_x^{C^*} - q_x^{A^*}q_x^{B^*}q_x^{C^*}$$

よって、解答は(**Ｊ**)

（別解）

生存率p_xはq_x^A、q_x^B、q_x^Cを用いて、

$$p_x = 1-(q_x^A+q_x^B+q_x^C)$$

と表すことができる。一方で、$q_x^{A^*}$、$q_x^{B^*}$、$q_x^{C^*}$を用いて、

$$\begin{aligned}p_x &= \left(1-q_x^{A^*}\right)\left(1-q_x^{B^*}\right)\left(1-q_x^{C^*}\right)\\ &= 1-q_x^{A^*}-q_x^{B^*}-q_x^{C^*}+q_x^{A^*}q_x^{B^*}+q_x^{A^*}q_x^{C^*}+q_x^{B^*}q_x^{C^*}-q_x^{A^*}q_x^{B^*}q_x^{C^*}\end{aligned}$$

と表すことができる。そのため、

$$q_x^{A*}+q_x^{B*}+q_x^{C*}-(q_x^A+q_x^B+q_x^C)=q_x^{A^*}q_x^{B^*}+q_x^{A^*}q_x^{C^*}+q_x^{B^*}q_x^{C^*}-q_x^{A^*}q_x^{B^*}q_x^{C^*}$$

よって、解答は(**J**)

（３）

（A）の年金の 60 歳時点の現価は

$$a_{\overline{20}|}^{(6)}+\frac{1}{D_{60}}\left(N_{80}-\frac{7}{12}D_{80}+\frac{1}{8}\bar{M}_{80}\right)$$

である。

ここで、第 1 項は

$$\begin{aligned}a_{\overline{20}|}^{(6)} &= \frac{1}{6}\,v^{1/6}\,\frac{1-v^{20}}{1-v^{1/6}}\\ &= \frac{1}{6}\times 0.99671\times\frac{1-0.67297}{1-0.99671}\\ &= 16.51236\ldots \quad \cdots(\text{i})\end{aligned}$$

また、第 2 項は

$$\begin{aligned}\frac{1}{D_{60}}\left(N_{80}-\frac{7}{12}D_{80}+\frac{1}{8}\bar{M}_{80}\right) &= \frac{1}{38{,}634}\times\left(181{,}448-\frac{7}{12}\times 19{,}435+\frac{1}{8}\times 16{,}035\right)\\ &= 4.45502\ldots \quad \cdots(\text{ii})\end{aligned}$$

したがって、（A）の年金の 60 歳時点の現価は$(\text{i})+(\text{ii})=20.96738\ldots$である。

一方、（B）の年金の 60 歳時点の現価は

$$K\times\frac{1}{6}\times\left(\left(v^{1/6}+v^{2/6}+\cdots+v\right)+2v\left(v^{1/6}+v^{2/6}+\cdots+v\right)+\cdots 10v^9\left(v^{1/6}+v^{2/6}+\cdots+v\right)\right)$$

$$=K\times\frac{1}{6}\times v^{1/6}\frac{1-v}{1-v^{1/6}}\times(1+2v+\cdots+10v^9)$$

$$=K\times\frac{1}{6}\times\frac{v^{1/6}}{1-v^{1/6}}\times\left(\frac{1-v^{10}}{1-v}-10v^{10}\right)$$

$$=K\times\frac{1}{6}\times\frac{0.99671}{1-0.99671}\times\left(\frac{1-0.82035}{1-0.98039}-10\times 0.82035\right)$$

$$=K\times 48.35317\ldots$$

である。
(A) の年金の 60 歳時点の現価と (B) の年金の 60 歳時点の現価が一致しているので、
$K = 0.43362 \ldots$ である。
よって、解答は**(D)**

(注) 教科書では、終身部分の年金現価率で$\bar{M}$の項を省略したものを近似式としている。
この場合、解答は次のとおりとなる。

$$\frac{1}{D_{60}}\left(N_{80} - \frac{7}{12}D_{80}\right) = \frac{1}{38{,}634} \times \left(181{,}448 - \frac{7}{12} \times 19{,}435\right)$$

$$= 4.40314 \ldots \quad \cdots (\text{ii})'$$

したがって、(A) の年金の 60 歳時点の現価は $(\text{i}) + (\text{ii})' = 20.91550 \ldots$ である。
(A) の年金の 60 歳時点の現価と (B) の年金の 60 歳時点の現価が一致しているので、
$K = 0.43255 \ldots$ である。

(4)
期初の責任準備金をV_0、積立金をF_0、標準保険料をP_0、特別保険料をP_{PSL}、予定利率をi、実際の運用利回りをj、期末の責任準備金をV_1、積立金をF_1、給付額をBとすると、

$V_0 \times (1+i) + P_0 \times (1+i)^{0.5} - B = V_1$

$F_0 \times (1+j) + (P_0 + P_{PSL}) \times (1+j)^{0.5} - B = F_1$

となる。ここで、両辺を引いて、与えられた数値を代入 ($V_1 - F_1 = 340$に注意) し式を整理すると、

$1{,}000(1+i) + 80(1+i)^{0.5} - 1{,}102.815661 \ldots = 0$

となるので、この２次方程式をとくと

$(1+i)^{0.5} = 1.010911 \ldots$

したがって、$(1+i) = 1.021942 \ldots$、すなわち$i = 2.1942 \ldots \%$となる。
よって、解答は$a = 2$、$b = 2$

(5)
(A) 正しい (教科書 P. 73)
(B) 正しい (教科書 P. 73)
(C) 正しい (教科書 P. 188～P. 189)
(D) 正しい (教科書 P. 192～P. 193)
(E) 正しい (教科書 P. 193～P. 194)
よって、解答は**(F)**

（6）

統合後の財政方式を加入年齢方式とした場合の標準保険料率を ${}^{E}P$、開放基金方式とした場合の標準保険料率を${}^{OAN}P$とする。

統合後の年金制度における諸数値は次のとおり。

項目	統合後の年金制度
LB	2,342
S^P	2,500
S_{PS}^{a}	5,400
S_{FS}^{a}	9,000
S^f	12,000
G^a	36,000
G^f	60,000
F	6,918

財政方式を加入年齢方式とした場合の標準保険料率は ${}^{E}P = S^f/G^f = 12{,}000/60{,}000 = 20.0\%$ である。
責任準備金は、 $S^p + S_{PS}^{a} + S_{FS}^{a} + S^f - {}^{E}P \times \left(G^a + G^f\right) = 9{,}700$ であり、未積立債務は、
$9{,}700 - 6{,}918 = 2{,}782$ である。したがって特別保険料率は、
$2{,}782/(8.97087 \times 2{,}342) = 0.1324 \ldots \fallingdotseq 13.2\%$ である。
よって財政方式を加入年齢方式とした場合の統合初年度の標準保険料の額は、
$20.0\% \times 2{,}342 = 468.4 \fallingdotseq 468$ 、特別保険料の額は、 $13.2\% \times 2{,}342 = 309.144 \fallingdotseq 309$ であるので合計額は 777 である。

一方、財政方式を開放基金方式とした場合の標準保険料率は、
${}^{OAN}P = \left(S_{FS}^{a} + S^f\right)/\left(G^a + G^f\right) = (9{,}000 + 12{,}000)/(36{,}000 + 60{,}000) = 0.21875 \fallingdotseq 21.9\%$ である。
責任準備金は、 $S^p + S_{PS}^{a} + S_{FS}^{a} + S^f - {}^{OAN}P \times \left(G^a + G^f\right) = 7{,}876$ であり、未積立債務は、
$7{,}876 - 6{,}918 = 958$ である。したがって特別保険料率は、
$958/(8.97087 \times 2{,}342) = 0.0455 \ldots \fallingdotseq 4.6\%$ である。
よって財政方式を開放基金方式とした場合の統合初年度の標準保険料の額は、
$21.9\% \times 2{,}342 = 512.898 \fallingdotseq 513$ 、特別保険料の額は $4.6\% \times 2{,}342 = 107.732 \fallingdotseq 108$ であるので合計額は 621 である。

したがって、求める数値は $777 \div 621 = 1.25120 \ldots$ である。
よって、解答は（**H**）

（７）

$X+\ t$ 年度初の積立金を F_t 、$X+\ t$ 年度の運用利回りを j_t 、X 年度の給付を B 、X 年度の標準保険料を C 、予定利率を i とする。X 年度末で定常状態であるため、

$$F_1=(F_1+C-B)(1+i)$$

$$B-C=\frac{i}{1+i}F_1$$

である。与えられた条件より、F_m（mは自然数）について、以下の関係式が成立する。

$$F_{m+1}=(\ F_m+C+0.1(F_1-F_m)-B)(1+\ j_m)$$

ここで、$m=2n$（nは自然数）の場合、$F_{2n}<\ F_1$のもとでは

$$F_{2n+1}=(\ F_{2n}+C+0.1(F_1-F_{2n})-B)\times 1.05$$

$$=0.945\ F_{2n}+\left(0.1-\frac{0.02}{1.02}\right)F_1\times 1.05$$

$$>0.945\ F_{2n}+\left(0.1-\frac{0.02}{1.02}\right)F_{2n}\times 1.05>F_{2n}$$

が成り立つので、$X+2n$年度は積立金が増加することが分かる。したがって、$X+2n$年度に題意を満たすことがないことが分かるため、$m=2n-1$（nは自然数）の場合についてのみ考える。

$$F_{2n+2}=(\ F_{2n+1}+C+0.1(F_1-F_{2n+1})-B)\times 0.95$$

$$=0.855\ F_{2n+1}+\left(0.1-\frac{0.02}{1.02}\right)F_1\times 0.95$$

$$=0.855(\ F_{2n}+C+0.1(F_1-F_{2n})-B)\times 1.05+\left(0.1-\frac{0.02}{1.02}\right)F_1\times 0.95$$

$$=0.807975\ F_{2n}+0.855\times 1.05\left(0.1-\frac{0.02}{1.02}\right)F_1+0.95\left(0.1-\frac{0.02}{1.02}\right)F_1$$

$$=0.807975\ F_{2n}+1.84775\times\left(0.1-\frac{0.02}{1.02}\right)F_1$$

$$F_{2n}=0.807975^{n-1}(F_2-0.773569\ldots\times F_1)+0.773569\ldots\times F_1\quad\cdots(\mathrm{i})$$

また、

$$F_2=(F_1+C-B)(1-0.05)=0.931372\ldots\times F_1\quad\cdots(\mathrm{ii})$$

である。求める値は

$$F_{2n}<0.80F_1\ \cdots(\mathrm{iii})$$

を満たす最小の$2n-1$である。(iii)に(ｉ)(ii)を代入して解くと$n\geq 10$となるので、求める値は19である。

よって、解答は $a=1$、$b=9$

（８）

x_e：加入年齢

$l_{x_e+\tau}$：x_e歳で加入した被保険者のτ年経過した時点における残存者数

とすると、

$$v^\tau = \exp(-\delta\tau) = \exp\,(-0.02\tau)$$

$$l_{x_e+\tau} = l_{x_e}\exp(-\int_{x_e}^{x_e+\tau}\mu_y\,dy) = l_{x_e}\exp(-0.06\tau)$$

$$b_{x_e+\tau} = b_{x_e}\exp(\int_{x_e}^{x_e+\tau}\lambda_y\,dy) = b_{x_e}\exp(0.03\tau)$$

となる。また、連続払の10年確定年金の年金現価率$\bar{a}_{\overline{10|}}$は

$$\bar{a}_{\overline{10|}} = \frac{1-\exp(-10\delta)}{\delta} = 50(1-\exp(-0.2))$$

となる。求める標準保険料率${}^EP$は

$${}^EP = \frac{\displaystyle\int_{20}^{40} 3\mu_{x_e+\tau}v^\tau\cdot\frac{l_{x_e+\tau}b_{x_e+\tau}}{l_{x_e}b_{x_e}}d\tau + 3\cdot v^{40}\cdot\frac{l_{x_e+40}b_{x_e+40}}{l_{x_e}b_{x_e}}\cdot\bar{a}_{\overline{10|}}}{\displaystyle\int_0^{40} v^\tau\cdot\frac{l_{x_e+\tau}b_{x_e+\tau}}{l_{x_e}b_{x_e}}d\tau}$$

$$= \frac{\int_{20}^{40} 0.18\cdot\exp(-0.02\tau)\cdot\exp(-0.06\tau)\cdot\exp(0.03\tau)\,d\tau + 3\cdot\exp(-0.8)\cdot\exp(-2.4)\cdot\exp(1.2)\cdot\bar{a}_{\overline{10|}}}{\int_0^{40}\exp(-0.02\tau)\cdot\exp(-0.06\tau)\cdot\exp(0.03\tau)\,d\tau}$$

$$= \frac{\int_{20}^{40} 0.18\cdot\exp\,(-0.05\tau)\,d\tau + 150\cdot\exp(-2.0)\cdot(1-\exp(-0.2))}{\int_0^{40}\exp\,(-0.05\tau)\,d\tau}$$

$$= \frac{0.18\big(\exp\,(-1.0)-\exp\,(-2.0)\big) + 7.5\cdot\exp(-2.0)\cdot(1-\exp(-0.2))}{1-\exp\,(-2.0)}$$

$$= 0.2611\ldots$$

よって、解答は（**E**）

問題２.

（１）

①

標準保険料率Pは

$$P = \frac{10 \times \left(D_{60} \cdot \ddot{a}_{\overline{10|}} + N_{70}\right)}{N_{50} - N_{60}} = 17.08745 \ldots$$

定年年齢を65歳に変更した場合の標準保険料率P'は

$$P' = \frac{15 \times \left(D_{65} \cdot \ddot{a}_{\overline{10|}} + N_{75}\right)}{N_{50} - N_{65}} = 14.06311 \ldots$$

したがって、

$P/_{P'} = 1.21505 \ldots$

よって、解答は（**H**）

②

それぞれの標準保険料率は、

$$P_1 = \frac{20 \times \left(D_{65} \cdot \ddot{a}_{\overline{10|}} + N_{75}\right)}{N_{50} - N_{65}} = 18.75081 \ldots$$

$$P_2 = \frac{1.03^5 \times \alpha \times \left(D_{60} \cdot v^5 \cdot \ddot{a}_{\overline{10|}} + N_{75}\right)}{N_{50} - N_{60}}$$

$$P_3 = \frac{\beta \times D_{65} \cdot \ddot{a}_{\overline{5|}} + \alpha N_{70}}{N_{50} - N_{65}}$$

$P_1 = P_2$、$P_2 = 1.44P_3$を満たすことから、$\beta = 20.01 \ldots$

よって、解答は（**C**）

（２）

①

制度発足時x歳の被保険者1人あたりの保険料を ${}^{I}P_x$ 、x歳の被保険者1人あたりの人数現価をG_x、x歳の被保険者1人あたりの給付現価をS_xと表すと、 ${}^{I}P_x = S_x / G_x$であるので、

${}^{I}P_{50} = 5.5454$、 ${}^{I}P_{51} = 6.4629$、 ${}^{I}P_{52} = 7.6336$、 ${}^{I}P_{53} = 9.1685$、
${}^{I}P_{54} = 11.2534$、 ${}^{I}P_{55} = 14.2235$、 ${}^{I}P_{56} = 18.7491$、 ${}^{I}P_{57} = 26.3981$、
${}^{I}P_{58} = 41.8719$、 ${}^{I}P_{59} = 88.6918$

となる。

したがって、制度加入時 x 歳、保険料払い込み時 y 歳の被保険者数を $l_{x,y}$ と表すと、$X + 2$ 年度の保険料の総額は

$$\sum_{w=50}^{52} {}^{I}P_{50} l_{50,w} + \sum_{w=53}^{59} {}^{I}P_{w-2} l_{w-2,w}$$
$$= (200 + 190 + 180) \times 5.5454 + 170 \times 6.4629 + 150 \times 9.1685 + 130 \times 14.2235 + 110 \times 26.3981$$
$$= 10{,}387.692$$

よって、解答は（**G**）

②

$X + t$年度期初（新規加入者加入前・保険料払込前）の個人平準保険料方式の責任準備金を ${}^{I}V_t$ 、
$X + t$年度期初（新規加入者加入前・保険料払込前）の加入年齢方式の責任準備金を${}^{EAN}V_t$ 、
$X + t$年度期初（新規加入者加入前・保険料払込前）の積立金をF_t、加入年齢方式による被保険者1人あたりの保険料を${}^{EAN}P$ と表すと、求める値は${}^{EAN}V_4 - F_4$となる。

$$ {}^{I}V_4 = \sum_{w=51}^{54} l_{50,w} S_w + \sum_{w=55}^{59} l_{w-4,w} S_w - \left(\sum_{w=51}^{54} {}^{I}P_{50} l_{50,w} G_w + \sum_{w=55}^{59} {}^{I}P_{w-4} l_{w-4,w} G_w \right) \quad \cdots(\mathrm{i})$$

$$ {}^{EAN}V_4 = \sum_{w=51}^{54} l_{50,w} S_w + \sum_{w=55}^{59} l_{w-4,w} S_w - \left(\sum_{w=51}^{54} {}^{EAN}P \; l_{50,w} G_w + \sum_{w=55}^{59} {}^{EAN}P \; l_{w-4,w} G_w \right) \cdots(\mathrm{ii})$$

発足後は計算基礎率どおりに推移していることから

$$F_4 = {}^{I}V_4 \qquad \cdots(\mathrm{iii})$$

また、加入年齢方式における加入年齢を 50 歳としていることから

$${}^{EAN}P = {}^{I}P_{50} \qquad \cdots(\mathrm{iv})$$

が分かる。(ⅰ)～(ⅳ)を用いると

$$ {}^{EAN}V_4 - F_4 = \sum_{w=55}^{59} {}^{I}P_{w-4} l_{w-4,w} G_w - \sum_{w=55}^{59} {}^{I}P_{50} l_{w-4,w} G_w$$
$$= (6.4629 - 5.5454) \times 150 \times 4.1427 + (9.1685 - 5.5454) \times 130 \times 2.7059$$
$$+ (14.2235 - 5.5454) \times 110 \times 1.0000$$
$$= 2{,}799.2171052$$

よって、解答は（**A**）

③

Ⅰの方法を選択した場合、未積立債務を一括で払い込みした直後に積立金が加入年齢方式の責任準備金と等しくなる。

一方、Ⅱの方法を選択した場合、②(ⅲ)のとおり、積立金は個人平準保険料方式の責任準備金と等しい。

すなわち、題意は「ⅠとⅡの責任準備金が等しくなる時期」と同じである。②(ⅳ)を用いると

$$
{}^{EAN}V_t = \begin{cases} \displaystyle\sum_{w=51}^{50+t} l_{50,w}\,S_w + \sum_{w=51+t}^{59} l_{w-t,w}\,S_w - \left(\sum_{w=51}^{50+t} {}^{I}P_{50} l_{50,w}\,G_w + \sum_{w=51+t}^{59} {}^{I}P_{50} l_{w-t,w} G_w\right) & (t \le 8) \\ \displaystyle\sum_{w=51}^{59} l_{50,w}\,S_w - \sum_{w=51}^{59} {}^{I}P_{50} l_{50,w}\,G_w & (t \ge 9) \end{cases}
$$

$$
{}^{I}V_t = \begin{cases} \displaystyle\sum_{w=51}^{50+t} l_{50,w}\,S_w + \sum_{w=51+t}^{59} l_{w-t,w}\,S_w - \left(\sum_{w=51}^{50+t} {}^{I}P_{50} l_{50,w}\,G_w + \sum_{w=51+t}^{59} {}^{I}P_{w-t} l_{w-t,w} G_w\right) & (t \le 8) \\ \displaystyle\sum_{w=51}^{59} l_{50,w}\,S_w - \sum_{w=51}^{59} {}^{I}P_{50} l_{50,w}\,G_w & (t \ge 9) \end{cases}
$$

であることから、$X+8$年度の保険料の払い込みをした直後に加入年齢方式の責任準備金と個人平準保険料方式の責任準備金が等しくなることが分かる。

よって、解答は$a=0$、$b=8$

（3）

定常状態における保険料を$C(C>0)$、給付をB、積立金をFとすると、以下の極限方程式を満たす。

$C+d\cdot F=B$

X年度から保険料をα倍$(\alpha\geq 0)$とした場合の$X+t-1$年度末の積立金をF_tとすると、$1\leq t\leq n$において以下の漸化式が成立する。

$F_t=(F_{t-1}+\alpha C-B)(1+i)$

この漸化式を解くと、

$v^tF_t-v^{t-1}F_{t-1}=(\alpha C-B)v^{t-1}$

$$v^nF_n-F_0=(\alpha C-B)\sum_{t=1}^{n}v^{t-1}$$

$$v^nF_n-F=(\alpha C-B)\left(\frac{1-v^n}{d}\right)$$

$$\alpha=\frac{1-v^n\cdot\frac{B}{C}}{1-v^n}+\frac{dv^n}{1-v^n}\cdot\frac{F_n}{C}$$

ここで、$X+n$年度以降は保険料がC'、給付がB、積立金がF_nで定常状態にあるとすると、以下の極限方程式を満たす。

$C'+d\cdot F_n=B$

このとき、αは以下のようにあらわすことができる。

$$\alpha=\frac{1}{1-v^n}\cdot\left(1-v^n\cdot\frac{C'}{C}\right)\qquad\cdots(\text{i})$$

①

式(ｉ)に$C'=0$を代入すると、

$$\alpha=\frac{1}{1-v^n}$$

よって、解答はa:**(A)**、b:**(A)**、c:**(G)**

②

${}^{U}C$　：単位積立方式の保険料、${}^{In}C$　：加入時積立方式の保険料

とすると、

$${}^{U}C\quad=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}l_x^{(T)}\cdot\frac{1}{x_r-x_e}\cdot\left(\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x}\right)=\left(\frac{l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{x_r-x_e}\right)\sum_{x=x_e}^{x_r-1}v^{x_r-x}=\left(\frac{l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{x_r-x_e}\right)\cdot\frac{v\cdot(1-v^{x_r-x_e})}{1-v}$$

$${}^{In}C\quad=l_{x_e}^{(T)}\cdot\left(\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}}\right)=l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}\cdot v^{x_r-x_e}$$

式(ｉ)に$C'={}^{U}C$　、$C={}^{In}C$　を代入すると、

$$\alpha = \frac{1}{1-v^n}\cdot\left(1 - v^n\cdot\left(\frac{l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{x_r - x_e}\right)\cdot\frac{v\cdot(1-v^{x_r-x_e})}{1-v}\cdot\frac{1}{l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}\cdot v^{x_r-x_e}}\right)$$

$$= \frac{1}{1-v^n}\cdot\left(1 - \frac{v^{n+1}\cdot\{(1+i)^{x_r-x_e}-1\}}{d(x_r-x_e)}\right)$$

よって、解答は d:（**H**）、e:（**D**）、f:（**A**）、g:（**B**）、h:（**M**）　（gとhは順不同）

③

式(ｉ)に$\alpha = 0$、$C' = B$、$C = {}^{In}C$を代入すると、

$$0 = \frac{1}{1-v^n}\cdot\left(1 - v^n\cdot\frac{B}{{}^{In}C}\right)$$

$$(1+i)^n = \frac{B}{{}^{In}C} = \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x\ \cdot\frac{1}{l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}\cdot v^{x_r-x_e}} = (1+i)^{x_r-x_e}\cdot\frac{1+e_{x_r}}{1+a_{x_r}}$$

$$n = \left[x_r - x_e + \log\left(\frac{1+e_{x_r}}{1+a_{x_r}}\right)\cdot\frac{1}{\log(1+i)}\right]$$

よって、解答は i:（**M**）、j:（**P**）、 k:（**R**）、 l:（**C**）

（4）

①

標準保険料は、

$給与総額\times標準保険料率 = (80{,}000 + 150 \times 4)千円 \times 0.03$

$= 2{,}418$ 千円

特別保険料は、

$特別保険料収入現価 \div (10 - 3)年確定年金現価率 = 2{,}000 \div 6.601430 \ldots$

$= 302.964619 \ldots$

$≒ 303$ 千円

したがって、保険料総額は

$2{,}418 + 303 = 2{,}721$ 千円

となる。

よって、解答は（**F**）

②

損益は当年度に発生した不足金・剰余金に等しく、期初において積立金の額と、責任準備金から特別保険料収入現価を控除した額は等しいことから、損益は期末における責任準備金−特別保険料収入現価−積立金と等しくなる。期末における責任準備金V_1は、V_0を期初責任準備金(新規加入者の加入前)、V'を新規加入者の期初責任準備金、C_1を標準保険料、iを予定利率、Bを給付額、αを昇給の予定と実際の乖離率とすると、

$V_1 = \{(V_0 + V' + C_1)(1 + i) - B\} \times \alpha$

$= \{(35{,}000 + 60 + 2{,}418) \times 1.02 - 2{,}000\} \times 1.1$

$= 39{,}850.316$

期末における特別保険料収入現価PSL_1は、PSL_0を期初特別保険料収入現価、C_2を特別保険料とすると、

$PSL_1 = (PSL_0 - C_2)(1 + i)$

$= (2{,}000 - 303) \times 1.02$

$= 1{,}730.94$

期末における積立金F_1は、F_0を期初積立金、jを実際の運用利回りとすると、

$F_1 = (F_0 + C_1 + C_2)(1 + j) - B$

$= (33{,}000 + 2{,}418 + 303) \times 1.05 - 2{,}000$

$= 35{,}507.05$

したがって、損益は

$V_1 - F_1 - PSL_1 = 39{,}850.316 - 35{,}507.05 - 1{,}730.94$

$= 2{,}612.326$

となる。

よって、解答は（**A**）

問題３.

（１）

x_e 歳で加入した被保険者が給与指数どおりに昇給した場合の x 歳時点の給付現価および給与現価について考える。

当該被保険者が期初に y ($x \leqq y \leqq x_r - 1$) 歳である年度に中途退職により脱退した場合に x_r 歳時点で支払われる一時金の額は

$$\sum_{t=x_e}^{y} \frac{B_x}{b_x} b_t \, (1+i_1)^{y-t+1} \times (1+i_2)^{x_r-y-1}$$

と表すことができる。また、定年退職により脱退した場合に x_r 歳から支払われる年金の額は

$$\sum_{t=x_e}^{x_r-1} \frac{B_x}{b_x} b_t \, (1+i_1)^{x_r-t} \times \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n|}}(i_3)}$$

と表すことができる。したがって、x 歳の被保険者 1 人あたりの期初（新規加入者加入後、保険料払い込み前）における給付現価を S_x 、給与現価を G_x とすると

$$S_x = \sum_{y=x}^{x_r-1} \left\{ \frac{C_y}{D_x} \times \sum_{t=x_e}^{y} \frac{B_x}{b_x} b_t \, (1+i_1)^{y-t+1} \times (1+i_2)^{x_r-y-1} \times v^{x_r-y-1} \right\}$$

$$+ \frac{D_{x_r}}{D_x} \times \sum_{t=x_e}^{x_r-1} \frac{B_x}{b_x} b_t \, (1+i_1)^{x_r-t} \times \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n|}}(i_3)} \times \ddot{a}_{\overline{n|}}(i)$$

と表すことができる。

ここで、$i_1 = i_2 = i_3 = i$ であるとすると、

$$S_x = \frac{1}{v^x \times l_x} \times \left\{ \sum_{y=x}^{x_r-1} \left\{ (l_y - l_{y+1}) \times \sum_{t=x_e}^{y} \frac{B_x}{b_x} b_t \, v^t \right\} + l_{x_r} \times \sum_{t=x_e}^{x_r-1} \frac{B_x}{b_x} b_t \, v^t \right\}$$

$$= \frac{1}{D_x} \times \left(l_x \times \sum_{t=x_e}^{x} \frac{B_x}{b_x} b_t v^t + \sum_{t=x+1}^{x_r-1} \frac{B_x}{b_x} b_t D_t \right)$$

$$G_x = \frac{1}{D_x} \times \sum_{t=x}^{x_r-1} \frac{B_x}{b_x} b_t D_t$$

である。したがって、当該年金制度の標準保険料率 ${}^{E}P$ は、${}^{E}P = \dfrac{S_{x_e}}{G_{x_e}} = 1$ となる。

（２）

（１）と同様にして、制度変更時点で x 歳である被保険者１人あたりの制度変更時点での変更後の給付現価を S_x 、給与現価を G_x とすると

$$S_x = \sum_{y=x}^{x_r-1}\left\{\frac{C_y}{D_x}\times\left(A_x(1+i_1)^{y-x+1}+\sum_{t=x}^{y}\frac{B_x}{b_x}b_t\,(1+i_1)^{y-t+1}\right)\times(1+i_2)^{x_r-y-1}\times v^{x_r-y-1}\right\}$$

$$+\frac{D_{x_r}}{D_x}\times\left(A_x(1+i_1)^{x_r-x}+\sum_{t=x}^{x_r-1}\frac{B_x}{b_x}b_t\,(1+i_1)^{x_r-t}\right)\times\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n|}}(i_3)}\times\ddot{a}_{\overline{n|}}(i)$$

と表すことができる。

ここで、$i_1 = i_2 = i_3 = i$ であるとすると、

$$S_x = \frac{1}{D_x}\times\sum_{t=x}^{x_r-1}\frac{B_x}{b_x}b_t D_t + A_x\text{ 、 }G_x = \frac{1}{D_x}\times\sum_{t=x}^{x_r-1}\frac{B_x}{b_x}b_t D_t\text{ である。}$$

変更後の年金制度における標準保険料率 ${}^{E}P$ は、（１）より ${}^{E}P = 1$であるので、制度変更時点で x 歳である被保険者１人あたりの制度変更時点での変更後の責任準備金は

$V_x = A_x$

となる。

以上より、制度変更前の制度が定常状態であったとすると、各被保険者について制度変更に伴う剰余および不足が発生しないようにするためには、A_x を変更前の制度における責任準備金とすればよいことが分かる。

よって、解答は

①(Ｉ)、②(Ｆ)、③(Ｊ)、④(Ｈ)、⑤(Ｋ)、⑥(Ｂ)、⑦(Ｌ)、⑧(Ｉ)、⑨(Ｂ)、⑩(Ｃ)、
⑪(Ｃ)、⑫(Ｄ)、⑬(Ｄ)、⑭(Ｇ)、⑮(Ｌ)、⑯(Ｋ)、⑰(Ａ)、⑱(Ｄ)、⑲(Ｋ)、⑳(Ｅ)、
㉑(Ｌ)、㉒(Ｎ)、㉓(Ｂ)、㉔(Ｎ)、㉕(Ｂ)、㉖(Ａ)

ただし⑤と⑥、⑦と⑧、⑱と⑲、⑳と㉑は順不同。

問題４.

x歳でl_0人加入した集団が定常状態に到達したときにおける、年度末（定年退職者脱退後）の年金受給権者の給付現価を ${}^{x}S^{p}$ 、在職中の被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価を ${}^{x}S^{a}_{FS}$、在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価を ${}^{x}S^{a}_{PS}$、在職中の被保険者の給付現価を ${}^{x}S^{a}$ 、将来加入が見込まれる被保険者の給付現価を ${}^{x}S^{f}$ 、在職中の被保険者の人数現価を ${}^{x}G^{a}$ 、将来加入が見込まれる被保険者の人数現価を ${}^{x}G^{f}$ とする。

（１）

①

年金制度Aの財政再計算後の 1 人あたりの標準保険料を ${}^{E}P'$とすると、

$${}^{40}S^{f} = \frac{1+i}{i} \cdot l_0 \cdot \frac{D_{60}}{D_{40}} \cdot 20 \cdot \ddot{a}_{\overline{10|}} = 2{,}441.190\ l_0$$

$${}^{40}G^{f} = \frac{1+i}{i} \cdot l_0 \cdot \sum_{y=40}^{59} \frac{D_y}{D_{40}} = \frac{D_{45}}{D_{40}} \cdot {}^{45}G^{f} + \frac{1+i}{i} \cdot l_0 \cdot \sum_{y=40}^{44} \frac{D_y}{D_{40}} = 510.518\ l_0$$

であるので

$${}^{E}P' = \frac{{}^{40}S^{f}}{{}^{40}G^{f}} = 4.78179$$

よって、解答は**（D）**

②

財政再計算後の責任準備金 ${}^{E}V'$は

$${}^{E}V' = {}^{45}S^{p} + {}^{45}S^{a} - {}^{E}P'\,{}^{45}G^{a} = 1{,}141.648\ l_0$$

よって、解答は**（B）**

③

財政再計算前の標準保険料 ${}^{E}P$は

$${}^{E}P = \frac{{}^{45}S^{f}}{{}^{45}G^{f}} = 5.60994$$

したがって、財政再計算前の責任準備金 ${}^{E}V$ は

$${}^{E}V = {}^{45}S^{p} + {}^{45}S^{a} - {}^{E}P\,{}^{45}G^{a} = 1{,}082.666\ l_0$$

であり、財政再計算で発生する未積立債務は

$${}^{E}V' - {}^{E}V = 1{,}141.648\ l_0 - 1{,}082.666\ l_0 = 58.982\ l_0$$

ここで、特別保険料算出のために各年度の特別保険料払い込み時の被保険者数を算出する。$X+t$年度の特別保険料払い込み時の被保険者数をL_{X+t}とすると、中途脱退者数は期初の被保険者数$\times 0.03$、定年退職者数は$l_0 \times 0.97^{15} = 0.63325\ l_0$であるので、

$$L_{X+1} = 11.225\ l_0 + 0.5\ l_0 = 11.725\ l_0$$

$L_{X+2} = L_{X+1} \times 0.97 - 0.63325\, l_0 + 0.5 l_0 = 11.240\, l_0$
$L_{X+3} = L_{X+2} \times 0.97 - 0.63325\, l_0 + 0.5 l_0 = 10.770\, l_0$

以上より、１人あたり特別保険料は

$$\frac{58.982\, l_0}{11.725\, l_0 + \frac{11.240\, l_0}{1.025} + \frac{10.770\, l_0}{1.025^2}} = 1.79048 \ldots$$

よって、解答は（H）

（２）

①

年金制度Bの財政再計算後の被保険者１人あたりの保険料${}^{OAN}P'$は、新規加入者数の見込みが$0.5\, l_0$に減少することに注意すると

$${}^{OAN}P' = \frac{0.5\,{}^{40}S^f + {}^{45}S^a_{FS}}{0.5\,{}^{40}G^f + {}^{45}G^a} = 5.18286$$

よって、解答は（G）

②

財政再計算後の責任準備金${}^{OAN}V'$は

${}^{OAN}V' = {}^{45}S^p + {}^{45}S^a_{PS} = 1{,}010.708\, l_0$

よって、解答は（D）

③

財政再計算前の責任準備金を${}^{OAN}V$　とすると、${}^{OAN}V' = {}^{OAN}V$　であり財政再計算で未積立債務は発生しないので、１人あたり特別保険料は0

よって、解答は（A）

（３）

①

$X+1$年度の給付額は、年金受給者が全員45歳で加入し定年退職した人であることに注意すると

$l_0 \times 0.97^{15} \times 10 \times 15 = 94.988\, l_0$

したがって年金制度Aの$X+1$年度末の積立金は

$\{1{,}082.666\, l_0 + (11.225\, l_0 + 0.7\, l_0)(4.78179 + 1.79048) - 94.988\, l_0\} \times 1.025 = 1{,}092.704\, l_0$

よって、解答は（H）

②

40歳で加入し、年度末に41歳である被保険者１人あたりの給付現価${}^{40,41}s^a$は

$${}^{40,41}s^a = \frac{D_{60}}{D_{41}} \cdot 20 \cdot \ddot{a}_{\overline{10}|} = 62.918$$

45歳で加入し、年度末に46歳である被保険者１人あたりの給付現価${}^{45,46}s^a$は

$${}^{45,46}s^a = \frac{D_{60}}{D_{46}} \cdot 15 \cdot \ddot{a}_{\overline{10}|} = 62.172$$

年度末に41歳である被保険者１人あたりの人数現価${}^{41}g^a$は

$${}^{41}g^a = \sum_{y=41}^{59} \frac{D_y}{D_{41}} = 12.101$$

年度末に46歳である被保険者１人あたりの人数現価${}^{46}g^a$は

$${}^{46}g^a = \sum_{y=46}^{59} \frac{D_y}{D_{46}} = 10.026$$

X年度末（財政再計算後）の責任準備金と$X+1$年度末の責任準備金の相違点が、年金制度に加入して1年である被保険者に関する責任準備金のみであることに留意すると、年金制度Aの$X+1$年度末の責任準備金は

$$\begin{aligned}&{}^{45}S^p + {}^{45}S^a - 0.97\,l_0{}^{45,46}s^a + 0.4 \cdot 0.97\,l_0{}^{40,41}s^a + 0.3 \cdot 0.97\,l_0{}^{45,46}s^a \\ &\qquad - {}^{E}P'\left({}^{45}G^a - 0.97\,l_0{}^{46}g^a + 0.4 \cdot 0.97\,l_0{}^{41}g^a + 0.3 \cdot 0.97\,l_0{}^{46}g^a\right) = 1{,}133.947\,l_0\end{aligned}$$

よって、解答は（**C**）

③

年金制度Bの$X+1$年度末の積立金は

$$\{1{,}010.708\,l_0 + (11.225\,l_0 + 0.7\,l_0) \cdot 5.18286 - 94.988\,l_0\} \times 1.025 = 1{,}001.964\,l_0$$

よって、解答は（**E**）

④

X年度末（財政再計算後）の責任準備金と$X+1$年度末の責任準備金の相違点が、年金制度に加入して1年である被保険者に関する責任準備金のみであることに留意すると、年金制度Bの$X+1$年度末の責任準備金は

$$\begin{aligned}&{}^{45}S^p + {}^{45}S^a + 0.5{}^{40}S^f - 0.97\,l_0{}^{45,46}s^a + 0.4 \cdot 0.97\,l_0{}^{40,41}s^a + 0.3 \cdot 0.97\,l_0{}^{45,46}s^a \\ &\qquad - {}^{OAN}P'\left({}^{45}G^a + 0.5{}^{40}G^f - 0.97\,l_0{}^{46}g^a + 0.4 \cdot 0.97\,l_0{}^{41}g^a + 0.3 \cdot 0.97\,l_0{}^{46}g^a\right) \\ &\qquad = 1{,}003.853\,l_0\end{aligned}$$

よって、解答は（**F**）

以上

問題番号				正答	配点
問題１．（４０点）	（１）			（B）	５点
	（２）			（J）	５点
	（３）			（D）	５点
	（４）	ab		22	完答で５点
	（５）			（F）	５点
	（６）			（H）	５点
	（７）	ab		19	完答で５点
	（８）			（E）	５点
問題２．（２８点）	（１）	①		（H）	４点
		②		（C）	３点
	（２）	①		（G）	４点
		②		（A）	２点
		③ab		08	完答で１点
	（３）	①	a	（A）	完答で４点
			b	（A）	
			c	（G）	
		②	d	（H）	完答で２点
			e	（D）	gとhは順不同
			f	（A）	
			g	（B）	
			h	（M）	
		③	i	（M）	完答で１点
			j	（P）	
			k	（R）	
			l	（C）	
	（４）	①		（F）	４点
		②		（A）	３点
問題３．（１６点）	（１）	①		（I）	１点
		②		（F）	１点
		③		（J）	１点
		④		（H）	１点
		⑤		（K）	完答で１点
		⑥		（B）	順不同
		⑦		（L）	完答で１点
		⑧		（I）	順不同

		⑨	（B）	完答で１点
		⑩	（C）	
		⑪	（C）	１点
		⑫	（D）	完答で１点
		⑬	（D）	
		⑭	（G）	完答で１点
		⑮	（L）	
		⑯	（K）	１点
		⑰	（A）	１点
	（２）	⑱	（D）	完答で１点 ⑱と⑲、⑳と㉑はそれぞれ順不同
		⑲	（K）	
		⑳	（E）	
		㉑	（L）	
		㉒	（N）	完答で１点
		㉓	（B）	
		㉔	（N）	１点
		㉕	（B）	完答で１点
		㉖	（A）	
問題４． （１６点）	（１）	①	（D）	３点
		②	（B）	３点
		③	（H）	１点
	（２）	①	（G）	２点
		②	（D）	２点
		③	（A）	１点
	（３）	①	（H）	１点
		②	（C）	１点
		③	（E）	１点
		④	（F）	１点