数学（問題）

〔問題１から問題３を通じて必要であれば（付表）に記載された数値を用いなさい。〕

問題１． 次の（１）～（１２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

各５点（計６０点）

（１） A さんは 4 枚の硬貨を、 B さんは 3 枚の硬貨を同時に 1 回投げ、表の出た枚数の多い方を勝ちとする。また、表が同じ枚数出た場合には引き分けとし、どちらかが勝つまで硬貨投げを繰り返すものとする。すべての硬貨は表裏がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で独立に出現するものとするとき、1 回目の硬貨投げでA さんが勝つ確率は $\boxed{\quad ① \quad}$ であり、最終的に A さんが勝つ確率は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。

［①の選択肢］

（A） $\frac{1}{2}$　（B） $\frac{33}{64}$　（C） $\frac{17}{32}$　（D） $\frac{35}{64}$　（E） $\frac{9}{16}$

（F） $\frac{37}{64}$　（G） $\frac{19}{32}$　（H） $\frac{39}{64}$　（I） $\frac{5}{8}$　（J） $\frac{41}{64}$

［②の選択肢］

（A） $\frac{1}{2}$　（B） $\frac{9}{16}$　（C） $\frac{4}{7}$　（D） $\frac{19}{32}$　（E） $\frac{5}{8}$

（F） $\frac{41}{64}$　（G） $\frac{65}{99}$　（H） $\frac{2}{3}$　（I） $\frac{64}{93}$　（J） $\frac{89}{128}$

（２）区間 $(0,1)$ 内で無作為に 1 点 X を選ぶ。$X = x$ として、区間 $(0, x)$ 内で無作為に 1 点 Y を選び、区間 $(x, 1)$ 内で無作為に 1 点 Z を選ぶ。いま、確率変数 R を $R = Z - Y$ として定める。$X = x$ のとき、確率変数 Y と確率変数 Z が互いに独立であることを用いると、R の期待値 $E[R]$ は $\boxed{\quad ① \quad}$ であり、分散 $V[R]$ は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。

（A） $\frac{1}{24}$　（B） $\frac{1}{18}$　（C） $\frac{5}{72}$　（D） $\frac{1}{12}$　（E） $\frac{7}{72}$

（F） $\frac{1}{8}$　（G） $\frac{1}{6}$　（H） $\frac{1}{4}$　（I） $\frac{1}{3}$　（J） $\frac{1}{2}$

（３）確率変数 X , Y が互いに独立で、ともに標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき、確率ベクトル (X,Y) の積率母関数 $\phi(\theta_1,\theta_2)$ は $\boxed{\quad ① \quad}$ である。また、 $U=X+Y$ 、$V=X-Y$ とするとき、確率ベクトル (U,V) の積率母関数 $\psi(\theta_1,\theta_2)$ は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。

（A）$\exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1+\theta_2)^2\right]$　（B）$\exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left({\theta_1}^2+{\theta_2}^2\right)\right]$　（C）$\exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1-\theta_2)^2\right]$

（D）$\exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left({\theta_1}^2-{\theta_2}^2\right)\right]$　（E）$\exp\left[\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)^2\right]$　（F）$\exp\left[\frac{1}{2}\left({\theta_1}^2+{\theta_2}^2\right)\right]$

（G）$\exp\left[\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)^2\right]$　（H）$\exp\left[\frac{1}{2}\left({\theta_1}^2-{\theta_2}^2\right)\right]$　（Ｉ）$\exp\left[(\theta_1+\theta_2)^2\right]$

（Ｊ）$\exp\left({\theta_1}^2+{\theta_2}^2\right)$

（４）確率変数 $X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ は互いに独立で、すべて平均 1 の指数分布に従うとき、確率変数 $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ の標準偏差は $\boxed{\quad ① \quad}$ である。また、中心極限定理を用いることにより、

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\sqrt{n}+n} x^{n-1}e^{-x}\,dx\right\}$$

を求めると、最も近い値は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。

[①の選択肢]

（A）$\frac{\sqrt{n}}{2}$　（B）$\sqrt{\frac{n}{2}}$　（C）$\sqrt{n}$　（D）$\sqrt{2n}$

（E）$2\sqrt{n}$　（F）$\frac{n}{2}$　（G）n　（H）$2n$

[②の選択肢]

（A）0.1587　（B）0.1915　（C）0.3085　（D）0.3413　（E）0.4772

（F）0.5　（G）0.6915　（H）0.8413　（Ｉ）0.9772　（Ｊ）1

（５）池の中にいる魚の数を最尤法により推定したい。そこで、池の中から25匹の魚をとらえ、印をつけて池に放ったのち、以下の(ア)と(イ)の異なる2通りの方法で推定を行った。池の中には、これら25匹の魚以外に印のついた魚はいなかったものとし、池の中の魚の数を$N(N \geq 25)$匹とする。

（ア）魚を1匹ずつとらえ、印の有無を調べて池に放す作業を35回行った結果、5匹の魚に印がついていた。このとき、Nの最尤推定値は$\boxed{\quad ① \quad}$（匹）である。

（イ）50匹の魚を一度にとらえ、印の有無を調べたところ、7匹の魚に印がついていた。
このとき、Nの最尤推定値は$\boxed{\quad ② \quad}$（匹）である。

（Ａ） 171　（Ｂ） 172　（Ｃ） 173　（Ｄ） 174　（Ｅ） 175

（Ｆ） 176　（Ｇ） 177　（Ｈ） 178　（Ｉ） 179　（Ｊ） 180

（６）$X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geq 2)$は確率変数$X$からの標本であり、$X$は区間$(-a, a)(a > 0)$上の一様分布に従う。統計量$S, T, U$ を以下のように定める。

$$S = C_1 \times \mathrm{Min}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$
$$T = C_2 \times \mathrm{Max}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$
$$U = C_3 \times \mathrm{Max}(|X_1|, |X_2|, \cdots, |X_n|)$$

S, T, U が全てaの不偏推定量となるようなC_1, C_2, C_3を求めると、

$C_1 =$ ［　①　］, $C_2 =$ ［　②　］, $C_3 =$ ［　③　］となる。

また、上で求めた C_1, C_2, C_3 により定まる不偏推定量 S, T, U の有効性を比較すると、［　④　］となる。ただし不偏推定量A, Bについて、

・AがBより有効である場合、$B < A$

・BがAより有効である場合、$A < B$

・上記 2 つのいずれでもない場合、$A = B$

と表すこととする。

［①、②、③の選択肢］

（A）$\frac{n-1}{n}$　（B）$\frac{n+1}{n}$　（C）$\frac{n}{n-1}$　（D）$-\frac{n}{n-1}$　（E）$\frac{n+1}{n-1}$

（F）$-\frac{n+1}{n-1}$　（G）$\frac{n}{n+1}$　（H）$-\frac{n}{n+1}$　（I）$\frac{n-1}{n+1}$　（J）$-\frac{n-1}{n+1}$

［④の選択肢］

（A）$S < T < U$　（B）$T < S < U$　（C）$U < S < T$　（D）$U < T < S$　（E）$S < T = U$

（F）$T < S = U$　（G）$U < S = T$　（H）$S = T < U$　（I）$T = U < S$　（J）$S = T = U$

（７）A工場で作った製品とB工場で作った製品の重量はいずれも正規分布に従う。それぞれ無作為に抽出しその重量を調べたところ、次のとおりであった。

A工場：$33, 37, 31, 40, 34$（単位：g）
B工場：$33, 26, 35, 30$（単位：g）

（ア）A工場で作った製品とB工場で作った製品の重量の分散が等しいと仮定できる場合に、重量の平均の差（＝（A工場で作った製品の重量の平均）－（B工場で作った製品の重量の平均））について区間推定を行う。信頼区間を95%とした場合の信頼区間の下限に最も近い数値は $\boxed{\quad ① \quad}$ gであり、上限に最も近い数値は $\boxed{\quad ② \quad}$ gである。

（イ）A工場で作った製品とB工場で作った製品の重量の分散が等しいと仮定できない場合に、重量の平均の差（＝（A工場で作った製品の重量の平均）－（B工場で作った製品の重量の平均））についてウェルチの近似法を用いて区間推定を行う。信頼区間を95%とした場合の信頼区間の下限に最も近い数値は $\boxed{\quad ③ \quad}$ gであり、上限に最も近い数値は $\boxed{\quad ④ \quad}$ gである。

［①、③の選択肢］

（A）-2.4692　（B）-2.1579　（C）-1.9508　（D）-1.8742

（E）-1.8033　（F）-1.7286　（G）-0.7680　（H）-0.7066

［②、④の選択肢］

（A）8.7066　（B）8.7680　（C）9.7286　（D）9.8033

（E）9.8742　（F）9.9508　（G）10.1579　（H）10.4692

（８）ダンボール箱の中にりんごが入っており、りんごの個数は10個か11個のいずれかであることが分かっている。ダンボール箱のみの重量はちょうど150gである。りんご１個の重量は正規分布に従い、りんご1個の重量の標準偏差は20gである。帰無仮説を「ダンボール箱の中のりんごの個数は10個である」として、ダンボール箱全体の重量を量ることで帰無仮説を検定する。ダンボール箱全体の重量が3kg以上であれば帰無仮説を棄却することとする。第1種の誤りが起こる確率と第2種の誤りが起こる確率が同じであるとき、りんご1個の重量の平均に最も近い数値は$\boxed{\quad ① \quad}$gである。また、第1種の誤りが起こる確率（=第2種の誤りが起こる確率）に最も近い数値は$\boxed{\quad ② \quad}$である。

[①の選択肢]

（A）270.8　（B）271.1　（C）271.4　（D）271.7

（E）272.0　（F）272.4　（G）272.7　（H）273.0

[②の選択肢]

（A）0.012　（B）0.014　（C）0.016　（D）0.018

（E）0.020　（F）0.023　（G）0.026　（H）0.029

（9）$(x,\ y)$ のデータが下表のとおり与えられている。このデータから、ロジットモデル

$y=\frac{e^{\alpha+\beta x}}{1+e^{\alpha+\beta x}}$ $(\beta>0)$ を用いた回帰式を求めると、α に最も近い数値は ① であり、β に最も近い数値は ② である。

x	1.4	2.2	5.3	7.0	9.1
y	10%	20%	40%	75%	90%

［①の選択肢］

（A）-4.72　（B）-3.51　（C）-2.88　（D）-1.44　（E）-0.33

（F）0.77　（G）1.89　（H）2.76　（I）4.49　（J）5.15

［②の選択肢］

（A）0.33　（B）0.47　（C）0.55　（D）0.61　（E）0.68

（F）0.73　（G）0.79　（H）0.85　（I）0.91　（J）0.98

（１０）確率過程 $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ が 2 次の移動平均モデル $MA(2)$ に従い、Y_t は、

$$Y_t = 2.0 + \varepsilon_t + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-2}$$

で与えられているとする。ここで、誤差項である ε_t は $Y_t, Y_{t-1}, \cdots, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots$ と互いに独立であり、平均 $E[\varepsilon_t] = 0$ 、分散 $V[\varepsilon_t] = \sigma^2$ の t に依存しない同一分布に従う確率変数とする。このとき、偏自己相関 $\phi_{11}, \phi_{22}, \phi_{33}$ は、それぞれ $\phi_{11} =$ ① 、$\phi_{22} =$ ② 、$\phi_{33} =$ ③ となる。

［①の選択肢］

（A）$-\frac{2}{3}$　（B）$-\frac{1}{2}$　（C）$-\frac{1}{3}$　（D）$-\frac{1}{6}$

（E）$\frac{1}{6}$　（F）$\frac{1}{3}$　（G）$\frac{1}{2}$　（H）$\frac{2}{3}$

［②の選択肢］

（A）$-\frac{4}{9}$　（B）$-\frac{1}{3}$　（C）$-\frac{2}{9}$　（D）$-\frac{1}{9}$

（E）$\frac{1}{9}$　（F）$\frac{2}{9}$　（G）$\frac{1}{3}$　（H）$\frac{4}{9}$

［③の選択肢］

（A）$-\frac{23}{40}$　（B）$-\frac{19}{40}$　（C）$-\frac{3}{8}$　（D）$-\frac{11}{40}$

（E）$\frac{11}{40}$　（F）$\frac{3}{8}$　（G）$\frac{19}{40}$　（H）$\frac{23}{40}$

（１１）確率過程 $\{N_t\}_{t\geq 0}$ は、強度 $\lambda > 0$ のポアソン過程であるとする。 $t > s$ のとき、 $N_t N_s$ の期待値 $E[N_t N_s]$ は $\boxed{\quad ① \quad}$ であり、N_t と N_s の相関係数 $\rho(N_t, N_s)$ は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。ただし、$t > 0$ のとき、 N_t はパラメータ λt のポアソン分布に従うこと$\big(t = 0$ のときは、$N_0 = 0\big)$を用いてよい。

［①の選択肢］

（A）λs　（B）λt　（C）$\lambda^2 s^2$　（D）$\lambda^2 t^2$

（E）λts　（F）$2\lambda ts$　（G）$\lambda^2 ts$　（H）$\lambda^2 ts + \lambda s$

（I）$\lambda^2 ts + \lambda t$　（J）$\lambda^2 ts + \lambda ts$

［②の選択肢］

（A）0　（B）$\sqrt{\frac{1}{\lambda t}}$　（C）$\sqrt{\frac{1}{\lambda s}}$　（D）$\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$

（E）$\sqrt{\frac{s}{t}}$　（F）$\sqrt{\frac{t}{s}}$　（G）$\sqrt{\frac{s}{t+s}}$　（H）$\sqrt{\frac{t}{t+s}}$

（I）$\sqrt{\frac{ts}{t+s}}$　（J）$\sqrt{ts}$

（１２）X は 1 以上 20 以下の整数値をとる確率変数であり、$P(X=i)=iP(X=1)$ $(1 \leq i \leq 20)$ を満たすものとする。X の値を、1 以上 20 以下の整数値をとる離散一様分布に従う確率変数 Y、区間 (0,1) 上の一様分布に従う確率変数 U および定数 c を用いて棄却法で生成したい。なお、確率変数Y およびU の値はともに生成可能である。
このとき、X の値を生成するための繰り返し回数を最小にするような定数 c の値は $\boxed{①}$ である。また、この定数 c を用いた場合に、下表の Y および U のシミュレーション結果から生成されるX は $\boxed{②}$ 個であり、その標本平均に最も近い数値は $\boxed{③}$ である。

Y	9	4	15	3	18	7	13	16
U	0.24	0.62	0.12	0.82	0.67	0.46	0.35	0.75

［①の選択肢］

（A）$\frac{1}{21}$　（B）$\frac{1}{20}$　（C）$\frac{2}{21}$　（D）$\frac{10}{21}$　（E）$\frac{1}{2}$

（F）$\frac{20}{21}$　（G）1　（H）$\frac{40}{21}$　（I）2　（J）$\frac{41}{20}$

［②の選択肢］

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3　（E）4

（F）5　（G）6　（H）7　（I）8

［③の選択肢］

（A）9.9　（B）10.6　（C）11.2　（D）11.6　（E）11.7

（F）12.5　（G）13.0　（H）14.2　（I）15.5　（J）16.3

問題２． 次の（１）～（３）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（２０点）

壺に入った球を1個取り出し、この壺に戻す復元抽出を無限に行う試行を考える。この壺については次のことが分かっている。 ・この壺には1からn $(n \geq 3)$までの番号が書かれた球が1個ずつ入っている。 ・それぞれの球を取り出す確率は等しい。 なお、この抽出を行い、取り出した球に書かれた番号がkであるとき、「kが出た」と表現するものとする。 このとき、1からnまでのどの番号についても、少なくとも1度は3回連続して出るまでに行った抽出回数を表す確率変数をXとするとき、$E[X]$を求めたい。

ここで、X_i $(1 \leq i \leq n)$を iからnまでの番号のうちどれかひとつが初めて3回連続して出るまでに行った抽出回数を表す確率変数とする。

（１）まず、$E[X_n]$を求める。

ここで、k回抽出を行った時点で、番号nが1度も3回連続して出ていない、という事象を$A_{n,k}$とし、その確率$q_{n,k} = P(A_{n,k})$を考える。

まず、$k = 0,1,2$の場合、$A_{n,k}$の定義から、

$$q_{n,k} = \boxed{\quad ① \quad} \quad (k = 0,1,2)$$

となる。

次に、$k \geq 3$の場合を考える。
ここで、Y_jをj回目の抽出で出た番号を表す確率変数とすると、$A_{n,k}$は次の3つの互いに排反な事象の和として表すことができる。

$$A_{n,k}^1 = A_{n,k} \cap \left\{Y_1 \neq \boxed{\quad ② \quad}\right\}$$

$$A_{n,k}^2 = A_{n,k} \cap \left\{Y_1 = \boxed{\quad ② \quad}, Y_2 \neq \boxed{\quad ③ \quad}\right\}$$

$$A_{n,k}^3 = A_{n,k} \cap \left\{Y_1 = Y_2 = \boxed{\quad ② \quad}, Y_3 \neq \boxed{\quad ③ \quad}\right\}$$

各事象の確率はそれぞれ、

$P(A_{n,k}^1) = \boxed{\quad ④ \quad} \times q_{n,k-1}$

$P(A_{n,k}^2) = \boxed{\quad ⑤ \quad} \times q_{n,k-2}$

$P(A_{n,k}^3) = \boxed{\quad ⑥ \quad} \times q_{n,k-3}$

であることから、$q_{n,k}$に関する次の漸化式が成立する。

$q_{n,k} = \boxed{\quad ④ \quad} \times q_{n,k-1} + \boxed{\quad ⑤ \quad} \times q_{n,k-2} + \boxed{\quad ⑥ \quad} \times q_{n,k-3} \ (k \geq 3)$

ここで、X_nは離散的確率変数であることから、次式が成り立つ。

$$E[X_n] = \sum_{i=1}^{\infty} iP(X_n = i) \qquad q_{n,k} = \sum_{i=k+1}^{\infty} P(X_n = i)$$

これより、$E[X_n]$ は $q_{n,k}$ を用いて、

$E[X_n] = \boxed{\quad ⑦ \quad}$

と表せることから、

$E[X_n] = \boxed{\quad ⑧ \quad}$

を得る。

（２）次に、$E[X_i]\ (2 \leq i \leq n-1)$を求める。

ここで、k回抽出を行った時点で、iからnまでの番号のうち、どの番号も1度も3回連続して出ていない、という事象を$A_{i,k}$とし、その確率$q_{i,k} = P(A_{i,k})$を考える。

まず、$k = 0,1,2$の場合、$A_{i,k}$の定義から、

$q_{i,k} = \boxed{\quad ① \quad} \qquad (k = 0,1,2)$

である。

次に、$k \geq 3$の場合を考える。
ここで、$k \geq 2$であれば、$A_{i,k}$は（１）で定義した確率変数Y_jを用いることで、次の3つの互いに排反な事象の和として表すことができる。

$A_{i,k}^1 = A_{i,k} \cap \{1 \leq Y_k \leq i-1\}$

$A_{i,k}^2 = A_{i,k} \cap \{i \leq Y_k \leq n\,, Y_k \neq Y_{k-1}\}$

$A_{i,k}^3 = A_{i,k} \cap \{i \leq Y_k \leq n\,, Y_k = Y_{k-1}\}$

よって、$P\left(A_{i,k}^j\right)\ (j = 1,2,3)$を$P\left(A_{i,k-1}^j\right)\ (j = 1,2,3)$で表すと、

$P\left(A_{i,k}^{1}\right) = \boxed{⑨} \times P\left(A_{i,k-1}^{1}\right) + \boxed{⑨} \times P\left(A_{i,k-1}^{2}\right) + \boxed{⑨} \times P\left(A_{i,k-1}^{3}\right) \quad (k \geq 3)$

$P\left(A_{i,k}^{2}\right) = \boxed{⑩} \times P\left(A_{i,k-1}^{1}\right) + \boxed{⑪} \times P\left(A_{i,k-1}^{2}\right) + \boxed{⑪} \times P\left(A_{i,k-1}^{3}\right) \quad (k \geq 3)$

$P\left(A_{i,k}^{3}\right) = \boxed{⑫} \times P\left(A_{i,k-1}^{1}\right) + \boxed{⑬} \times P\left(A_{i,k-1}^{2}\right) + \boxed{⑫} \times P\left(A_{i,k-1}^{3}\right) \quad (k \geq 3)$

を得る。これより$q_{i,k}$に関する次の漸化式が得られる。

$q_{i,k} = \boxed{⑭} \times q_{i,k-1} + \boxed{⑮} \times q_{i,k-2} + \boxed{⑯} \times q_{i,k-3} \quad (k \geq 3)$

よって、

$E[X_i] = \boxed{⑰} \quad (2 \leq i \leq n-1)$

を得る。

（３）最後に、$E[X_1]$は（２）と同様に考えることにより、

$E[X_1] = \boxed{⑱}$

となる。以上より、

$E[X] = \boxed{⑲} \times \boxed{⑳}$

を得る。

［①～⑥、⑨～⑯の選択肢］

（A） 0	（B） 1	（C） $i-1$	（D） i
（E） n	（F） $\frac{1}{n}$	（G） $\frac{i-1}{n}$	（H） $\frac{i}{n}$
（I） $\frac{n-i}{n}$	（J） $\frac{n-i+1}{n}$	（K） $\frac{n-1}{n}$	（L） $\frac{1}{n^2}$
（M） $\frac{i-1}{n^2}$	（N） $\frac{i}{n^2}$	（O） $\frac{n-i}{n^2}$	（P） $\frac{n-i+1}{n^2}$
（Q） $\frac{n-1}{n^2}$	（R） $\frac{(i-1)(n-1)}{n^2}$	（S） $\frac{(n-1)^2}{n^2}$	（T） $\frac{1}{n^3}$
（U） $\frac{i-1}{n^3}$	（V） $\frac{i}{n^3}$	（W） $\frac{n-i}{n^3}$	（X） $\frac{n-1}{n^3}$
（Y） $\frac{i^2}{n^3}$	（Z） $\frac{(n-1)^2}{n^3}$		

［⑦の選択肢］

（A） $\sum_{k=0}^{\infty} q_{n,k}$	（B） $\sum_{k=1}^{\infty} q_{n,k}$	（C） $\sum_{k=3}^{\infty} q_{n,k}$	（D） $\sum_{k=3}^{\infty} (1-q_{n,k})$
（E） $\sum_{k=1}^{\infty} kq_{n,k}$	（F） $\sum_{k=3}^{\infty} kq_{n,k}$	（G） $\sum_{k=3}^{\infty} k(1-q_{n,k})$	（H） $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)q_{n,k}$

［⑧、⑱、⑲の選択肢］

（A）n^2+1	（B）n^2+2	（C）n^2+n	（D）n^2+n+1
（E）$2n^2+n$	（F）$2n^2+n+1$	（G）$3n^2$	（H）$3n^2+1$
（I）n^3+1	（J）n^3+2	（K）n^3+n^2	（L）n^3+n^2+n
（M）$2n^3+n^2$	（N）$2n^3+n^2+n$	（O）$3n^3$	（P）$3n^3+n$

［⑰の選択肢］

（A）$\frac{n^2+1}{n-i}$	（B）$\frac{n^2+2}{n-i}$	（C）$\frac{n^2+n}{n-i}$	（D）$\frac{n^2+n+1}{n-i}$
（E）$\frac{2n^2+n}{n-i}$	（F）$\frac{2n^2+n+1}{n-i}$	（G）$\frac{3n^2}{n-i}$	（H）$\frac{3n^2+1}{n-i}$
（I）$\frac{n^3+1}{n-i+1}$	（J）$\frac{n^3+2}{n-i+1}$	（K）$\frac{n^3+n^2}{n-i+1}$	（L）$\frac{n^3+n^2+n}{n-i+1}$
（M）$\frac{2n^3+n^2}{n-i+1}$	（N）$\frac{2n^3+n^2+n}{n-i+1}$	（O）$\frac{3n^3}{n-i+1}$	（P）$\frac{3n^3+n}{n-i+1}$

［⑳の選択肢］

（A）$\sum_{i=1}^{n} i$	（B）$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$	（C）$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^{-1}$	（D）$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right)^{-1}$

問題３． 次の（１）～（４）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（２０点）

（１）正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ からの標本変量 $X_1,X_2,\cdots,X_n\ (n \geq 2)$ を考える。標本変量平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

について、

$$\frac{\bar{X} - \boxed{\quad ① \quad}}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{\boxed{\quad ② \quad}}}} \sim N(0,1)$$

である。

また、標本変量分散

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

について、$E[S^2] = \boxed{\quad ③ \quad}\ \sigma^2$ であるから、

$$U^2 = \boxed{\quad ④ \quad}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

と定めれば、U^2 は σ^2 の不偏推定量である。

以下では、$\dfrac{\bar{X} - \boxed{\quad ① \quad}}{\sqrt{\sigma^2/\boxed{\quad ② \quad}}}$ における σ^2 の部分を U^2 に置き換えた $\dfrac{\bar{X} - \boxed{\quad ① \quad}}{\sqrt{U^2/\boxed{\quad ② \quad}}}$ がどんな分布に従うかを考えたい。それが分かれば、母分散が未知の正規母集団において、母平均の信頼区間を知ることができる。

（２）確率変数 Y が $N(0,1)$ に従うとする。k を正の整数とし、Y と独立な確率変数 R がガンマ分布 $\Gamma\left(\frac{k}{2},\frac{1}{2}\right)$ に従うとする。R の確率密度関数 $f_R(r)$ は、

$$f_R(r)=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}r^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{r}{2}}\quad(r>0)$$

である。（ここで、$\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx\ (p>0)$ である。）

まず、確率変数 $W=Y^2$ の確率密度関数 $f_W(w)$ を考えると、

$$f_W(w)=\boxed{⑤}\,w^{\boxed{⑥}}\,e^{-\frac{w}{2}}\quad(w>0)$$

であるから、

$$Y^2\ \sim\ \Gamma\left(\boxed{⑦},\frac{1}{2}\right)\qquad\cdots（ア）$$

である。

次に、確率変数 $T=Y\sqrt{\frac{k}{R}}$ について考える。

$$\begin{cases}t=y\sqrt{k/r}\\ v=r\end{cases}$$

とおくと、

$$\frac{\partial(y,r)}{\partial(t,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial r}{\partial t} & \frac{\partial r}{\partial v}\end{vmatrix}=\boxed{⑧}$$

となることに注意すると、(T,V) の結合確率密度関数 $f_{T,V}(t,v)$ は、

$$f_{T,V}(t,v)=\boxed{⑨}\times\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\,v^{\boxed{⑩}}\,e^{-\frac{v}{2}\left(\boxed{⑪}\right)}\quad\left(\begin{matrix}-\infty<t<\infty\\ 0<v<\infty\end{matrix}\right)$$

と書ける。したがって、T の確率密度関数は、

$$f_T(t)=\boxed{⑫}\times\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(\boxed{⑪}\right)^{-\boxed{⑬}}\ (-\infty<t<\infty)$$

となる。これを自由度 k の t 分布という。

（３）さて、$Y_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$ $(i = 1, \cdots, n)$ とおき、

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

とする。少し計算すれば、

$$\sum_{i=1}^{n} {Y_i}^2 - \left(\sqrt{n}\,\bar{Y}\right)^2 = \frac{\boxed{⑭}}{\sigma^2} S^2 \qquad \cdots（イ）$$

が成り立つことが分かる。

ここで、n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ を

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{i(i+1)}} \ (1 \le j \le i \le n-1) \\ -\dfrac{i}{\sqrt{i(i+1)}} \ (1 \le j = i+1 \le n) \\ \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ (i = n) \\ 0 \ (\text{その他}) \end{cases}$$

で定めると、A は直交行列である。ここで、n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ が直交行列であるとは、A の転置行列 ${}^tA = (a_{ji})$ について $A\,{}^tA = {}^tA\,A = E_n$ （ただし E_n は n 次単位行列）が成り立つことをいう。

この直交行列 A を用いて

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

なる変換を考えると、

$$\sum_{i=1}^{n} {Y_i}^2 = (Y_1 \quad \cdots \quad Y_n)\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = (Z_1 \quad \cdots \quad Z_n)A\,{}^tA\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = (Z_1 \quad \cdots \quad Z_n)\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} {Z_i}^2$$

である。$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ の結合確率密度関数は

$$f_{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n}(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \boxed{⑮}\, e^{-\frac{1}{2}({y_1}^2 + {y_2}^2 + \cdots + {y_n}^2)} \ (-\infty < y_i < \infty \ (i = 1, \cdots, n))$$

であり、A の行列式の絶対値は $\boxed{⑯}$ だから、$(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ の結合確率密度関数は

$$f_{Z_1, Z_2, \cdots, Z_n}(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \boxed{⑮}\, e^{-\frac{1}{2}({z_1}^2 + {z_2}^2 + \cdots + {z_n}^2)} \ (-\infty < z_i < \infty \ (i = 1, \cdots, n))$$

となる。したがって、$Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$は独立に$N(0,1)$に従う。

また、$Z_n = \boxed{⑰}\ \bar{Y}$ であるから、（イ）より、

$$\frac{\boxed{⑭}}{\sigma^2} S^2 = \boxed{⑱}$$

が成り立つことが分かる。（ア）より、${Z_i}^2$は$\Gamma\left(\boxed{⑦}, \frac{1}{2}\right)$に従うことが分かるので、

$\frac{\boxed{⑭}}{\sigma^2} S^2$は$\Gamma\left(\boxed{⑲}, \boxed{⑳}\right)$に従う。

上記より、$\bar{Y}$ と S^2が独立であり、$\bar{X}$とS^2が独立であることも分かった。

（4） いま、

$$\frac{\bar{X} - \boxed{①}}{\sqrt{U^2/\boxed{②}}} = \frac{\bar{X} - \boxed{①}}{\sqrt{\sigma^2/\boxed{②}}} \times \sqrt{\frac{\boxed{㉑}}{\frac{\boxed{⑭}}{\sigma^2} S^2}}$$

と変形できることに注意すると、$\frac{\bar{X} - \boxed{①}}{\sqrt{\sigma^2/\boxed{②}}}$ と $\frac{\boxed{⑭}}{\sigma^2} S^2$は独立なので、

$\frac{\bar{X} - \boxed{①}}{\sqrt{U^2/\boxed{②}}}$は自由度 $\boxed{㉒}$ の t 分布に従う。

よって、母分散が未知の正規母集団から標本値$x_1, x_2, \cdots, x_n$が得られたとき、信頼係数$1 - \varepsilon$の母平均の信頼区間は、標本平均値$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$および標本分散値$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$を用いて

$$信頼下限：\bar{x} - t_{\boxed{㉒}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{\frac{s^2}{\boxed{㉓}}}$$

$$信頼上限：\bar{x} + t_{\boxed{㉒}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{\frac{s^2}{\boxed{㉓}}}$$

と表される。ただし、$t_{\varphi}(\alpha)$は自由度φのt分布の上側α点である。

［①の選択肢］

（A）μ　（B）$(n-1)\mu$　（C）$n\mu$　（D）$(n+1)\mu$

（E）$\frac{1}{n-1}\mu$　（F）$\frac{1}{n}\mu$　（G）$\frac{1}{n+1}\mu$

［②〜④の選択肢］

（A）$n-1$　（B）n　（C）$n+1$　（D）$\frac{1}{n-1}$

（E）$\frac{1}{n}$　（F）$\frac{1}{n+1}$　（G）$\frac{n}{n-1}$　（H）$\frac{n+1}{n-1}$

（I）$\frac{n-1}{n}$　（J）$\frac{n+1}{n}$　（K）$\frac{n-1}{n+1}$　（L）$\frac{n}{n+1}$

［⑤の選択肢］

（A）$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$　（B）$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$　（C）$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$　（D）$\sqrt{2\pi}$

（E）$\frac{2}{\pi}$　（F）$\frac{\pi}{2}$　（G）$\frac{1}{2\pi}$　（H）2π

［⑥〜⑦の選択肢］

（A）-2　（B）$-\frac{3}{2}$　（C）-1　（D）$-\frac{1}{2}$

（E）0　（F）$\frac{1}{2}$　（G）1　（H）$\frac{3}{2}$

（I）2

[⑧の選択肢]

（A）$t\sqrt{\frac{k}{v}}$　（B）$\frac{1}{t}\sqrt{\frac{v}{k}}$　（C）$\frac{t}{2\sqrt{kv}}$　（D）$\frac{2\sqrt{kv}}{t}$

（E）$\sqrt{\frac{k}{v}}$　（F）$\sqrt{\frac{v}{k}}$　（G）$\frac{1}{\sqrt{kv}}$　（H）$\sqrt{kv}$

（I）0　（J）1

[⑨、⑫の選択肢]

（A）$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$　（B）$\sqrt{\frac{k}{2\pi}}$　（C）$\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}$　（D）$\frac{k}{\sqrt{2\pi}}$

（E）$\frac{1}{\sqrt{k}}$　（F）$\frac{1}{2\pi\sqrt{k}}$　（G）$\frac{1}{\sqrt{\pi k}}$　（H）$\sqrt{\pi k}$

[⑩、⑬の選択肢]

（A）$k-2$　（B）$k-1$　（C）k　（D）$k+1$

（E）$\frac{k-2}{2}$　（F）$\frac{k-1}{2}$　（G）$\frac{k}{2}$　（H）$\frac{k+1}{2}$

[⑪の選択肢]

（A）$\frac{t^2}{k}$　（B）$1+\frac{t^2}{k}$　（C）$1-\frac{t^2}{k}$　（D）$\frac{t}{\sqrt{k}}$

（E）$1+\frac{t}{\sqrt{k}}$　（F）$1-\frac{t}{\sqrt{k}}$

［⑭、⑯～⑰、⑲～㉓の選択肢］

（A）$\frac{1}{2}$　（B）1　（C）2　（D）$n-2$

（E）$n-1$　（F）n　（G）$n+1$　（H）$\frac{n-2}{2}$

（I）$\frac{n-1}{2}$　（J）$\frac{n}{2}$　（K）$\frac{n+1}{2}$　（L）$\sqrt{n-1}$

（M）$\sqrt{n}$　（N）$\sqrt{n+1}$　（O）$\sqrt{(n-1)n}$　（P）$(n-1)^2$

（Q）$(n-1)n$　（R）n^2　（S）$n(n+1)$　（T）$\frac{1}{\sqrt{n-1}}$

（U）$\frac{1}{\sqrt{n}}$　（V）$\frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}$　（W）$\frac{1}{n-1}$　（X）$\frac{1}{n}$

（Y）$\frac{1}{(n-1)^2}$　（Z）$\frac{1}{n^2}$

［⑮の選択肢］

（A）$\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^n$　（B）$\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^n$　（C）$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n$　（D）$\left(\sqrt{2\pi}\right)^n$

（E）$\left(\frac{2}{\pi}\right)^n$　（F）$\left(\frac{\pi}{2}\right)^n$　（G）$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n$　（H）$(2\pi)^n$

（I）$\sqrt{\frac{2}{\pi n}}$　（J）$\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$　（K）$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$　（L）$\frac{n}{\sqrt{2\pi}}$

［⑱の選択肢］

（A）$\sum_{i=1}^{n} Z_i$　（B）$\sum_{i=1}^{n-1} Z_i$　（C）$\sum_{i=2}^{n} Z_i$　（D）$\sum_{i=1}^{n} {Z_i}^2$

（E）$\sum_{i=1}^{n-1} {Z_i}^2$　（F）$\sum_{i=2}^{n} {Z_i}^2$

(付表)

Ⅰ.標準正規分布表

$P(x > 0.25) = 0.4013$

上側ε点 $u(\varepsilon)$ から確率εを求める表

$u(\varepsilon) \to \varepsilon$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.0*	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1*	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2*	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3*	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4*	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5*	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6*	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7*	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8*	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9*	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0*	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1*	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2*	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3*	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4*	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5*	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6*	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7*	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8*	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9*	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0*	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1*	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2*	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3*	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4*	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5*	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6*	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7*	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8*	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9*	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

$P(x > 1.9600) = 0.025$

確率εから上側ε点 $u(\varepsilon)$ を求める表

$\varepsilon \to u(\varepsilon)$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.00*	∞	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656
0.01*	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749
0.02*	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957
0.03*	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624
0.04*	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546
0.05*	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632
0.06*	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833
0.07*	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118
0.08*	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469
0.09*	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873
0.10*	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319
0.11*	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800
0.12*	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311
0.13*	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848
0.14*	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0450	1.0407
0.15*	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986
0.16*	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581
0.17*	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192
0.18*	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816
0.19*	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452
0.20*	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099
0.21*	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756
0.22*	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421
0.23*	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095
0.24*	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776
0.25*	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464
0.26*	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158
0.27*	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858
0.28*	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563
0.29*	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273
0.30*	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987
0.31*	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705
0.32*	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427
0.33*	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152
0.34*	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880
0.35*	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611
0.36*	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345
0.37*	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081
0.38*	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819
0.39*	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559
0.40*	0.2533	0.2508	0.2482	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301
0.41*	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045
0.42*	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789
0.43*	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535
0.44*	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282
0.45*	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030
0.46*	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778
0.47*	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527
0.48*	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276
0.49*	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025

Ⅱ.自由度φのχ^2分布の上側ε点：　$\chi_{\varphi}^{2}(\varepsilon)$

φ ＼ε	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010
1	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	0.4549	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349
2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	1.3863	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103
3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	2.3660	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449
4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	3.3567	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767
5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	4.3515	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863
6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	5.3481	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
7	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	6.3458	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	7.3441	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	8.3428	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
10	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	9.3418	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	10.3410	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250
12	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	11.3403	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
13	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	12.3398	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	13.3393	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
15	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	14.3389	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779
16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	15.3385	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999
17	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	16.3382	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
18	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	17.3379	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053
19	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	18.3377	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909
20	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	19.3374	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662
21	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	20.3372	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
22	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	21.3370	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894
23	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	22.3369	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384
24	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	23.3367	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
25	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	24.3366	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141
26	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	25.3365	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417
27	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	26.3363	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629
28	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	27.3362	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782
29	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	28.3361	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879
30	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	29.3360	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922
31	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	30.3359	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914
32	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	31.3359	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858
33	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	32.3358	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755
34	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	33.3357	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609
35	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	34.3356	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421
36	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	35.3356	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192
37	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	36.3355	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925
38	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	37.3355	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621
39	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	38.3354	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281
40	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	39.3353	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907
41	22.9056	25.2145	27.3256	29.9071	40.3353	52.9485	56.9424	60.5606	64.9501
42	23.6501	25.9987	28.1440	30.7654	41.3352	54.0902	58.1240	61.7768	66.2062
43	24.3976	26.7854	28.9647	31.6255	42.3352	55.2302	59.3035	62.9904	67.4593
44	25.1480	27.5746	29.7875	32.4871	43.3352	56.3685	60.4809	64.2015	68.7095
45	25.9013	28.3662	30.6123	33.3504	44.3351	57.5053	61.6562	65.4102	69.9568
46	26.6572	29.1601	31.4390	34.2152	45.3351	58.6405	62.8296	66.6165	71.2014
47	27.4158	29.9562	32.2676	35.0814	46.3350	59.7743	64.0011	67.8206	72.4433
48	28.1770	30.7545	33.0981	35.9491	47.3350	60.9066	65.1708	69.0226	73.6826
49	28.9406	31.5549	33.9303	36.8182	48.3350	62.0375	66.3386	70.2224	74.9195
50	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	49.3349	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539

Ⅲ．分母の自由度n、分子の自由度mのF分布の上側 ε 点：$F_n^m(\varepsilon)$

$\varepsilon = 0.100$

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.5263	9.0000	9.1618	9.2434	9.2926	9.3255	9.3491	9.3668	9.3805	9.3916
3	5.5383	5.4624	5.3908	5.3426	5.3092	5.2847	5.2662	5.2517	5.2400	5.2304
4	4.5448	4.3246	4.1909	4.1072	4.0506	4.0097	3.9790	3.9549	3.9357	3.9199
5	4.0604	3.7797	3.6195	3.5202	3.4530	3.4045	3.3679	3.3393	3.3163	3.2974
6	3.7759	3.4633	3.2888	3.1808	3.1075	3.0546	3.0145	2.9830	2.9577	2.9369
7	3.5894	3.2574	3.0741	2.9605	2.8833	2.8274	2.7849	2.7516	2.7247	2.7025
8	3.4579	3.1131	2.9238	2.8064	2.7264	2.6683	2.6241	2.5893	2.5612	2.5380
9	3.3603	3.0065	2.8129	2.6927	2.6106	2.5509	2.5053	2.4694	2.4403	2.4163
10	3.2850	2.9245	2.7277	2.6053	2.5216	2.4606	2.4140	2.3772	2.3473	2.3226

$\varepsilon = 0.050$

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782

$\varepsilon = 0.025$

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168

$\varepsilon = 0.010$

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.3992
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.0510
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491

$\varepsilon = 0.005$

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.5013	199.0000	199.1664	199.2497	199.2996	199.3330	199.3568	199.3746	199.3885	199.3996
3	55.5520	49.7993	47.4672	46.1946	45.3916	44.8385	44.4341	44.1256	43.8824	43.6858
4	31.3328	26.2843	24.2591	23.1545	22.4564	21.9746	21.6217	21.3520	21.1391	20.9667
5	22.7848	18.3138	16.5298	15.5561	14.9396	14.5133	14.2004	13.9610	13.7716	13.6182
6	18.6350	14.5441	12.9166	12.0275	11.4637	11.0730	10.7859	10.5658	10.3915	10.2500
7	16.2356	12.4040	10.8824	10.0505	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138	8.3803
8	14.6882	11.0424	9.5965	8.8051	8.3018	7.9520	7.6941	7.4959	7.3386	7.2106
9	13.6136	10.1067	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411	6.4172
10	12.8265	9.4270	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676	5.8467

Ⅳ．自由度φのt分布の上側ε点：$t_{\varphi}(\varepsilon)$

φ ＼ε	0.100	0.050	0.025
1	3.0777	6.3138	12.7062
2	1.8856	2.9200	4.3027
3	1.6377	2.3534	3.1824
4	1.5332	2.1318	2.7764
5	1.4759	2.0150	2.5706
6	1.4398	1.9432	2.4469
7	1.4149	1.8946	2.3646
8	1.3968	1.8595	2.3060
9	1.3830	1.8331	2.2622
10	1.3722	1.8125	2.2281
11	1.3634	1.7959	2.2010
12	1.3562	1.7823	2.1788
13	1.3502	1.7709	2.1604
14	1.3450	1.7613	2.1448
15	1.3406	1.7531	2.1314
16	1.3368	1.7459	2.1199
17	1.3334	1.7396	2.1098
18	1.3304	1.7341	2.1009
19	1.3277	1.7291	2.0930
20	1.3253	1.7247	2.0860
21	1.3232	1.7207	2.0796
22	1.3212	1.7171	2.0739
23	1.3195	1.7139	2.0687
24	1.3178	1.7109	2.0639
25	1.3163	1.7081	2.0595

Ⅴ．自然対数表

x	$\log x$
1.1	0.0953
1.2	0.1823
1.3	0.2624
1.4	0.3365
1.5	0.4055
1.6	0.4700
1.7	0.5306
1.8	0.5878
1.9	0.6419
2.0	0.6931
2.5	0.9163
3.0	1.0986
3.5	1.2528
4.0	1.3863
4.5	1.5041
5.0	1.6094
5.5	1.7047
6.0	1.7918
6.5	1.8718
7.0	1.9459
7.5	2.0149
8.0	2.0794
8.5	2.1401
9.0	2.1972
9.5	2.2513
10.0	2.3026

Ⅵ．指数関数表

x	$\exp(x)$
-0.10	0.9048
-0.09	0.9139
-0.08	0.9231
-0.07	0.9324
-0.06	0.9418
-0.05	0.9512
-0.04	0.9608
-0.03	0.9704
-0.02	0.9802
-0.01	0.9900
0.00	1.0000
0.01	1.0101
0.02	1.0202
0.03	1.0305
0.04	1.0408
0.05	1.0513
0.06	1.0618
0.07	1.0725
0.08	1.0833
0.09	1.0942
0.10	1.1052

以上

数学（解答例）

問題１

（１）

A さん、Bさんが硬貨を同時に投げたとき表の出る枚数を表す確率変数をそれぞれ H_A , H_Bとすると、硬貨の表裏はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で出現することから、確率変数H_A , H_Bの確率分布は以下のとおりとなる。

$\mathrm{P}(H_A=4)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$, $\mathrm{P}(H_A=3)=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(H_A=2)=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}$,

$\mathrm{P}(H_A=1)=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(H_A=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

$\mathrm{P}(H_B=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(H_B=2)=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$, $\mathrm{P}(H_B=1)=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$, $\mathrm{P}(H_B=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

さて、1 回の硬貨投げで A さんが勝つケースは (H_A,H_B)＝(4,3), (4,2), (4,1), (4,0), (3,2), (3,1), (3,0), (2,1), (2,0), (1,0) のときであり、 H_A , H_Bは互いに独立であるため、この確率 p は、

$p=\mathrm{P}(H_A=4)+\mathrm{P}(H_A=3)\cdot\mathrm{P}(H_B<3)+\mathrm{P}(H_A=2)\cdot\mathrm{P}(H_B<2)+\mathrm{P}(H_A=1)\cdot\mathrm{P}(H_B=0)$

$\quad=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

次に、1 回の硬貨投げで引き分けとなる確率 q を求める。

この場合は、(H_A,H_B)＝(3,3), (2,2), (1,1), (0,0) となる確率を求めればよい。したがって、

$q=\mathrm{P}(H_A=3)\cdot\mathrm{P}(H_B=3)+\mathrm{P}(H_A=2)\cdot\mathrm{P}(H_B=2)+\mathrm{P}(H_A=1)\cdot\mathrm{P}(H_B=1)+\mathrm{P}(H_A=0)\cdot\mathrm{P}(H_B=0)$

$\quad=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{8}=\frac{35}{128}$

ここで、i 回目の硬貨投げでA さんが勝つ確率を考えると、これは$i-1$ 回目までは引き分け、i 回目にA さんが勝つ確率であることから、求める確率は$p\cdot q^{i-1}$となる。

したがって、最終的にA さんが勝つ確率は、以下のとおりとなる。

$$\sum_{i=1}^{\infty} p\cdot q^{i-1}=\frac{p}{1-q}=\frac{64}{93}$$

よって、<u>解答は　①（A）　②（I）</u>

（２）

確率変数 X は区間 (0,1) 上の一様分布 $U(0,1)$ に従う。また、条件 $\{X=x\}$ の下、確率変数 Y は区間 $(0,x)$ 上の一様分布 $U(0,x)$ に従い、確率変数 Z は区間 $(x,1)$ 上の一様分布 $U(x,1)$ に従う。条件 $\{X=x\}$ の下での確率変数 R の条件付き期待値を $E[R|X=x]$ とすると、

$$E[R|X=x]=E[Z|X=x]-E[Y|X=x]=\int_x^1 z\cdot\frac{1}{1-x}\,dz-\int_0^x y\cdot\frac{1}{x}\,dy=\frac{1}{2}(1+x)-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}$$

となるから、R の期待値 $E[R]$ は、

$$E[R]=\int_0^1 \frac{1}{2}\,dx=\frac{1}{2}$$

となる。また、条件 $\{X=x\}$ の下で確率変数 Y と Z は独立であるから、条件 $\{X=x\}$ の下での確率変数 R^2 の条件付き期待値 $E[R^2|X=x]$ は、

$$\begin{aligned}E[R^2|X=x]&=E[(Z-Y)^2|X=x]\\&=E[Z^2|X=x]-2E[Z|X=x]E[Y|X=x]+E[Y^2|X=x]\\&=\int_x^1 z^2\cdot\frac{1}{1-x}\,dz-2\cdot\frac{1}{2}(1+x)\cdot\frac{1}{2}x+\int_0^x y^2\cdot\frac{1}{x}\,dy\\&=\frac{1}{3}(1+x+x^2)-\frac{1}{2}(1+x)x+\frac{1}{3}x^2\\&=\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。したがって、R^2 の期待値 $E[R^2]$ は、

$$E[R^2]=\int_0^1\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}\right)dx=\frac{1}{18}-\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{11}{36}$$

となるから、R の分散 $V[R]$ は、

$$V[R]=E[R^2]-E[R]^2=\frac{11}{36}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{18}$$

よって、解答は　①　（**J**）　②　（**B**）

（3）

確率変数 X，Y の積率母関数 $\phi_0(\theta)$ は以下のとおり。

$$\phi_0(\theta)=E\left[e^{\theta X}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}+\theta x\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2+\frac{\theta^2}{2}\right\}dx=\exp\left(\frac{\theta^2}{2}\right)$$

X，Y は互いに独立であることから、確率ベクトル (X,Y) の積率母関数 $\phi(\theta_1,\theta_2)$ は

$$\phi(\theta_1,\theta_2)=E[e^{\theta_1X+\theta_2Y}]=\phi_0(\theta_1)\phi_0(\theta_2)=\exp\left\{\frac{1}{2}({\theta_1}^2+{\theta_2}^2)\right\}$$

また、確率ベクトル(U,V) の積率母関数 $\psi(\theta_1,\theta_2)$は確率ベクトル (X,Y) の積率母関数を用いて以下のとおり表せる。

$$\psi(\theta_1,\theta_2)=E[e^{\theta_1U+\theta_2V}]=E\left[e^{(\theta_1+\theta_2)X+(\theta_1-\theta_2)Y}\right]=\phi(\theta_1+\theta_2,\theta_1-\theta_2)=\exp({\theta_1}^2+{\theta_2}^2)$$

よって、解答は　①（**F**）　②（**J**）

（4）

確率変数 $X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ はすべて平均 1 の指数分布に従うので、確率変数 X_i の分散 $V[X_i]$ は、

$$V[X_i]=E\left[{X_i}^2\right]-E[X_i]^2=\int_0^{\infty}x^2e^{-x}dx-1^2=[-(x^2+2x+2)e^{-x}]_0^{\infty}-1=1$$

となる。 $X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ は互いに独立より、確率変数 $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ の標準偏差 $\sqrt{V[S_n]}$ は、

$$\sqrt{V[S_n]} = \sqrt{V[X_1 + X_2 + \cdots + X_n]} = \sqrt{V[X_1] + V[X_2] + \cdots + V[X_n]} = \sqrt{n}$$

となる。また、確率変数 S_n の期待値 $E[S_n]$ は、

$$E[S_n] = E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n] = n$$

となる。平均 1 の指数分布と、形状パラメータ 1、尺度パラメータ 1 のガンマ分布 $\Gamma(1,1)$ は同分布であるから、ガンマ分布の再生性より、確率変数 S_n はガンマ分布 $\Gamma(n,1)$ に従うことが分かる。確率変数 S_n の確率密度関数を $f(x)$ とすると、

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} \qquad (x > 0)$$

となる。中心極限定理より、$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{V[S_n]}}$ の確率分布は標準正規分布 $N(0,1)$ に収束するので、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\sqrt{n}+n} x^{n-1}e^{-x}\,dx\right\} &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}+n} f(x)\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(S_n \leqq \sqrt{n}+n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqq 1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{V[S_n]}} \leqq 1\right) \\
&= \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\
&= 1 - 0.1587 \\
&= 0.8413
\end{aligned}$$

よって、<u>解答は　①　**（C）**　②　**（H）**</u>

（５）

（ア）

尤度関数は、

$$l(N) = \binom{35}{5}\left(\frac{25}{N}\right)^5\left(1-\frac{25}{N}\right)^{35-5} = \binom{35}{5}\left(\frac{25}{N}\right)^5\left(1-\frac{25}{N}\right)^{30}$$

である。いま、

$$f(x) = \left(\frac{25}{x}\right)^5\left(1-\frac{25}{x}\right)^{30}$$

なる関数$f(x)$を考えると、

$$f'(x) = -\frac{125}{x^3}\left(\frac{25}{x}\right)^4\left(1-\frac{25}{x}\right)^{29}(x-175)$$

であり、

$$f'(x) > 0 \ \ (25 < x < 175)$$
$$f'(x) = 0 \ \ (x = 175)$$

$$f'(x) < 0 \ (x > 175)$$

となる。
池の中には印のついた魚が25匹、印のついていない魚が少なくとも1匹いるので、$x > 25$としてよい。
したがって$f(x)$は$x = 175$で最大となり、Nの最尤推定値$\hat{N}$は、$\hat{N} = 175$

（イ）
尤度関数は

$$l(N) = \frac{\binom{25}{7}\binom{N-25}{50-7}}{\binom{N}{50}} = \frac{\binom{25}{7}\binom{N-25}{43}}{\binom{N}{50}}$$

である。いま、

$$g(N) = \frac{l(N)}{l(N-1)} = \frac{\binom{25}{7}\binom{N-25}{43}}{\binom{N}{50}} \Bigg/ \frac{\binom{25}{7}\binom{N-1-25}{43}}{\binom{N-1}{50}} = \frac{(N-25)(N-50)}{N(N-68)} = 1 + \frac{1250-7N}{N(N-68)}$$

なる関数$g(N)$を考える。
$N > 68$のとき、

$$l(N) > l(N-1) \Leftrightarrow g(N) > 1 \Leftrightarrow N < \frac{1250}{7} = 178.57\cdots$$

であるから、

$$l(68) < \cdots < l(177) < l(178) > l(179) > \cdots$$

と分かる。
池の中には印のついた魚が25匹、印のついていない魚が少なくとも$50-7=43$匹いるので、
$N \geq 25+43 = 68$である。よって、Nの最尤推定値$\hat{N}$は、$\hat{N} = 178$

よって、解答は　①（**E**）　②（**H**）

（６）
　確率変数$\mathrm{Min}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, $\mathrm{Max}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, $\mathrm{Max}(|X_1|, |X_2|, \cdots, |X_n|)$の確率密度関数をそれぞれ$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$とおく。

$$P(\mathrm{Min}(X_1, X_2, \cdots, X_n) \leq x) = 1 - P(\mathrm{Min}(X_1, X_2, \cdots, X_n) > x) = 1 - \left(\frac{a-x}{2a}\right)^n \quad (-a < x < a)$$

$$P(\mathrm{Max}(X_1, X_2, \cdots, X_n) \leq x) = \left(\frac{a+x}{2a}\right)^n \quad (-a < x < a)$$

$$P(\mathrm{Max}(|X_1|, |X_2|, \cdots, |X_n|) \leq x) = \{P(-x \leq X_1 \leq x)\}^n = \left(\frac{x}{a}\right)^n \quad (-a < x < a)$$

となるので、

$$f_1(x) = \frac{n}{2a}\left(\frac{a-x}{2a}\right)^{n-1} \quad (-a < x < a), \qquad f_2(x) = \frac{n}{2a}\left(\frac{a+x}{2a}\right)^{n-1} \quad (-a < x < a),$$

$$f_3(x) = \frac{n}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} \quad (-a < x < a)$$

と分かる。したがって、

$$E[S]=C_1\int_{-a}^{a}xf_1(x)\,dx=C_1\frac{n}{2a}\int_{-a}^{a}x\left(\frac{a-x}{2a}\right)^{n-1}dx$$

$$=-C_1\frac{n}{2a}\int_{0}^{1}(-2at+a)\,t^{n-1}\cdot(-2a)dt$$

$$=\ C_1an\int_0^1(t^{n-1}-2t^n)dt=C_1an\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}\right)=-C_1a\frac{n-1}{n+1}$$

となり、aの不偏推定量となるような$C_1=-\dfrac{n+1}{n-1}$

$$E[T]=C_2\int_{-a}^{a}xf_2(x)\,dx=C_2\frac{n}{2a}\int_{-a}^{a}x\left(\frac{a+x}{2a}\right)^{n-1}dx$$

$$=C_2\frac{n}{2a}\int_0^1(2at-a)\,t^{n-1}\cdot(2a)dt$$

$$=\ C_2an\int_0^1(2t^n-t^{n-1})dt=C_2an\left(\frac{2}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=C_2a\frac{n-1}{n+1}$$

となり、aの不偏推定量となるような$C_2=\dfrac{n+1}{n-1}$

$$E[U]=C_3\int_0^a xf_3(x)\,dx=C_3\frac{n}{a^n}\int_0^a x^n\,dx=C_3a\frac{n}{n+1}$$

となり、aの不偏推定量となるような$C_3=\dfrac{n+1}{n}$

次に、有効性は統計量の分散の大小で比較するため、S,T,Uの分散を求める。

$$E[S^2]={C_1}^2\int_{-a}^{a}x^2f_1(x)\,dx={C_1}^2\frac{n}{2a}\int_{-a}^{a}x^2\left(\frac{a-x}{2a}\right)^{n-1}dx$$

$$={C_1}^2\frac{n}{2a}\int_1^0(-2at+a)^2\,t^{n-1}\cdot(-2a)dt$$

$$=\ {C_1}^2a^2n\int_0^1(4t^{n+1}-4t^n+t^{n-1})dt$$

$$=\ {C_1}^2a^2n\left(\frac{4}{n+2}-\frac{4}{n+1}+\frac{1}{n}\right)=a^2\frac{(n+1)(n^2-n+2)}{(n-1)^2(n+2)}$$

より、

$$V[S]=E[S^2]-(E[S])^2=\frac{4na^2}{(n-1)^2(n+2)}$$

$$E[T^2]={C_2}^2\int_{-a}^{a}x^2f_2(x)\,dx={C_2}^2\frac{n}{2a}\int_{-a}^{a}x^2\left(\frac{a+x}{2a}\right)^{n-1}dx$$

$$={C_2}^2\frac{n}{2a}\int_0^1(2at-a)^2\,t^{n-1}\cdot(2a)dt$$

$$=\ {C_2}^2a^2n\int_0^1(4t^{n+1}-4t^n+t^{n-1})dt$$

$$= C_2{}^2 a^2 n\left(\frac{4}{n+2} - \frac{4}{n+1} + \frac{1}{n}\right) = a^2 \frac{(n+1)(n^2-n+2)}{(n-1)^2(n+2)}$$

より、

$$V[T] = E[T^2] - (E[T])^2 = \frac{4na^2}{(n-1)^2(n+2)}$$

$$E[U^2] = C_3{}^2 \int_{-a}^{a} x^2 f_3(x)\,dx = C_3{}^2 \frac{n}{a}\int_0^a x^2\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} dx$$

$$= C_3{}^2 \frac{n}{a^n}\int_0^a x^{n+1}\,dx = C_3{}^2 \frac{n}{a^n}\cdot\frac{a^{n+2}}{n+2} = \frac{(n+1)^2a^2}{n(n+2)}$$

より、

$$V[U] = E[U^2] - (E[U])^2 = \frac{a^2}{n(n+2)}$$

$V[S] = V[T]$であり、また、$n \geq 1$なので、

$$V[U] - V[T] = a^2 \frac{-3n^2-2n+1}{n(n-1)^2(n+2)} < 0$$

が成立する。

よって、解答は　①（Ｆ）　②（Ｅ）　③（Ｂ）　④（Ｈ）

（参考）

当問題は以下のように考えることで、計算量を大きく減らすことができる。

・$f_2(x) = f_1(-x)$であるため、$E[S] = -E[T], V[S] = V[T]$である。そのため（下の考察と合わせると）統計量$S$の期待値のみ計算すれば、統計量$S$の分散や統計量$T$の期待値および分散に関する計算は不要である。$f_2(x) = f_1(-x)$となることは、確率密度関数を導出しなくとも、実数$x_1, x_2, \cdots, x_n$について$\mathrm{Max}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = -\mathrm{Min}(-x_1, -x_2, \cdots, -x_n)$が成立することおよび確率変数$X$が原点について対称であることから分かる。

・統計量Uは確率変数Xが区間$(0, a)$上の一様分布に従う場合の統計量Tと同じ定義である。標本の元となる一様分布の幅が狭い方がより分散が小さくなるため、統計量Uの分散は統計量Tの分散より小さい。そのため統計量Uの分散に関する計算は不要である。

（７）

A工場の製品の標本数をm、B工場の製品の標本数をn、

A工場の製品の標本を$X_1, X_2, \cdots, X_m$、B工場の製品の標本を$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$とおく。

$m = 5,\quad n = 4,\quad \bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i = 35,\quad \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j = 31$ となる。

（ア）

$$s^2=\frac{1}{m+n-2}\left\{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\bar{Y})^2\right\}=\frac{96}{7}$$

とおくと、求める信頼区間の下限L_1，上限R_1はそれぞれ、

$$L_1=\bar{X}-\bar{Y}-t_{m+n-2}(0.025)s\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=35-31-2.3646\sqrt{\frac{96}{7}}\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{4}}=-1.8742$$

$$R_1=\bar{X}-\bar{Y}+t_{m+n-2}(0.025)s\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=35-31+2.3646\sqrt{\frac{96}{7}}\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{4}}=9.8742$$

（イ）

$$s_A{}^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2=\frac{25}{2}$$

$$s_B{}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\bar{Y})^2=\frac{46}{3}$$

$$\nu=\frac{\left(\frac{s_A{}^2}{m}+\frac{s_B{}^2}{n}\right)^2}{\frac{(s_A{}^2/m)^2}{m-1}+\frac{(s_B{}^2/n)^2}{n-1}}=6.2\cdots$$

$$\nu^*=[\nu\text{に一番近い整数}]=6$$

とおいて、ウェルチの近似法を用いると、求める信頼区間の下限L_2，上限R_2はそれぞれ、

$$L_2=\bar{X}-\bar{Y}-t_{\nu^*}(0.025)\sqrt{\frac{s_A{}^2}{m}+\frac{s_B{}^2}{n}}=35-31-2.4469\sqrt{\frac{25}{10}+\frac{46}{12}}=-2.1579$$

$$R_2=\bar{X}-\bar{Y}+t_{\nu^*}(0.025)\sqrt{\frac{s_A{}^2}{m}+\frac{s_B{}^2}{n}}=35-31+2.4469\sqrt{\frac{25}{10}+\frac{46}{12}}=10.1579$$

よって、解答は　①（**D**）　②（**E**）　③（**B**）　④（**G**）

（８）

りんご1個の重量の平均をμ(g)とすると、

りんご10個の総重量(g)は、平均10μ，標準偏差$20\sqrt{10}$の正規分布に従い、

りんご11個の総重量(g)は、平均11μ，標準偏差$20\sqrt{11}$の正規分布に従う。

ダンボールを除いたりんごの総重量は$3\mathrm{kg}-150\mathrm{g}=2850\mathrm{g}$なので、

第1種の誤りが起こる確率p_1＝平均10μ，標準偏差$20\sqrt{10}$の正規分布において値が2850以上となる確率

第2種の誤りが起こる確率p_2＝平均11μ，標準偏差$20\sqrt{11}$の正規分布において値が2850未満となる確率

となる。

$10\mu>2850$の場合は、$p_2<0.5<p_1$

11μ＜2850の場合は、$p_1 < 0.5 < p_2$
となるのでいずれも条件を満たさない。したがって、10μ＜2850＜11μと分かる。
$p_1 = p_2$より、

$$\frac{2850 - 10\mu}{20\sqrt{10}} = \frac{11\mu - 2850}{20\sqrt{11}} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{2850}{\sqrt{110}} = 271.7\cdots$$

したがって第 1 種の誤りが起こる確率p_1は、標準正規分布において$\dfrac{2850 - 10\mu}{20\sqrt{10}}$＝$2.097\cdots$
以上になる確率と等しく、標準正規分布表より$p_1 = 0.0180$と分かる。

よって、解答は　①（D）　②（D）

（9）

ロジットモデルにおいて、α および β を推定するためには、$y' = \log\left(\frac{y}{1-y}\right)$として y を変換したデータ y' に対して線形回帰を行なえばよく、変換後のデータは下表のとおりとなる。

x	1.4	2.2	5.3	7.0	9.1
y'	-2.1972	-1.3863	-0.4055	1.0986	2.1972

したがって、α および β を線形回帰により推定すると

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})\left({y'}_i - \overline{y'}\right)}{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2} = 0.54858\cdots = 0.55$$

$$\hat{\alpha} = \overline{y'} - \hat{\beta} \cdot \bar{x} = -2.88152\cdots = -2.88$$

よって、解答は　①（C）　②（C）

（１０）

$\theta_0, \theta_1, \theta_2$ を定数とし、$Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}$ とおく。Y_t の分散 γ_0、Y_t の時差 1,2,3 の自己共分散 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ はそれぞれ、

$$\gamma_0 = E[(Y_t - \theta_0)^2] = E[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})^2] = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

$$\gamma_1 = E[(Y_t - \theta_0)(Y_{t-1} - \theta_0)] = E[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2} - \theta_2\varepsilon_{t-3})] = \sigma^2(-\theta_1 + \theta_1\theta_2)$$

$$\gamma_2 = E[(Y_t - \theta_0)(Y_{t-2} - \theta_0)] = E[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-2} - \theta_1\varepsilon_{t-3} - \theta_2\varepsilon_{t-4})] = -\sigma^2\theta_2$$

$$\gamma_3 = E[(Y_t - \theta_0)(Y_{t-3} - \theta_0)] = E[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-3} - \theta_1\varepsilon_{t-4} - \theta_2\varepsilon_{t-5})] = 0$$

となる。よって、$\theta_0 = 2, \theta_1 = -1/2, \theta_2 = -1/2$ として、

$$\gamma_0 = \sigma^2\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{3}{2}\sigma^2$$

$$\gamma_1 = \sigma^2\left(\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{3}{4}\sigma^2$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}\sigma^2$$

$\gamma_3 = 0$

を得る。したがって、Y_t の時差 1,2,3 の自己相関 ρ_1, ρ_2, ρ_3 は、

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{1}{2}$$

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{1}{3}$$

$$\rho_3 = \frac{\gamma_3}{\gamma_0} = 0$$

となる。Y_t と $Y_{t-h} (h = 1,2,3)$ の偏自己相関は、次の方程式の解となる。

$$\rho_1 = \phi_{11} \qquad \begin{cases} \rho_1 = \phi_{21} + \phi_{22}\rho_1 \\ \rho_2 = \phi_{21}\rho_1 + \phi_{22} \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_1 = \phi_{31} + \phi_{32}\rho_1 + \phi_{33}\rho_2 \\ \rho_2 = \phi_{31}\rho_1 + \phi_{32} + \phi_{33}\rho_1 \\ \rho_3 = \phi_{31}\rho_2 + \phi_{32}\rho_1 + \phi_{33} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = \phi_{11} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2} = \phi_{21} + \frac{1}{2}\phi_{22} \\ \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\phi_{21} + \phi_{22} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2} = \phi_{31} + \frac{1}{2}\phi_{32} + \frac{1}{3}\phi_{33} \\ \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\phi_{31} + \phi_{32} + \frac{1}{2}\phi_{33} \\ 0 = \frac{1}{3}\phi_{31} + \frac{1}{2}\phi_{32} + \phi_{33} \end{cases}$$

これを解くと、

$$(\phi_{11}, \phi_{22}, \phi_{33}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{9}, -\frac{11}{40}\right)$$

よって、解答は　①　**（G）**　②　**（E）**　③　**（D）**

（１１）

N_t はパラメータ λt のポアソン分布に従うので、N_t と N_t^2 の期待値 $E[N_t]$ と $E[N_t^2]$ は、

$$\begin{aligned} E[N_t] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \\ &= \lambda t \\ E[N_t^2] &= E[N_t(N_t - 1) + N_t] = E[N_t(N_t - 1)] + E[N_t] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} + \lambda t = (\lambda t)^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda t} + \lambda t \\ &= (\lambda t)^2 + \lambda t \end{aligned}$$

となる。ポアソン過程の独立性と定常性より、

$$\begin{aligned} E[N_t N_s] &= E[(N_t - N_s)N_s + N_s^2] = E[(N_t - N_s)N_s] + E[N_s^2] \\ &= E[(N_t - N_s)]E[N_s] + E[N_s^2] = \lambda(t - s)\lambda s + (\lambda s)^2 + \lambda s \\ &= \lambda^2 ts + \lambda s \end{aligned}$$

となる。また、N_t と N_s の共分散 $\mathrm{Cov}(N_t, N_s)$ は、

$$\mathrm{Cov}(N_t, N_s) = E[N_t N_s] - E[N_t]E[N_s] = \lambda s$$

であり、 N_t と N_s の分散 $V[N_t]$ と $V[N_s]$ は、

$$V[N_t] = E[N_t^2] - E[N_t]^2 = \lambda t, \quad V[N_s] = \lambda s$$

となる。したがって、 N_t と N_s の相関係数 $\rho(N_t, N_s)$ は、

$$\rho(N_t, N_s) = \frac{\mathrm{Cov}(N_t, N_s)}{\sqrt{V[N_t]}\sqrt{V[N_s]}} = \sqrt{\frac{s}{t}}$$

よって、解答は　①（**H**）②（**E**）

（１２）

$$1 = \sum_{i=1}^{20} P(X = i) = \sum_{i=1}^{20} iP(X = 1) = \frac{20 \cdot (1 + 20)}{2} P(X = 1) = 210 \cdot P(X = 1)$$

したがって、

$$P(X = i) = \frac{i}{210}$$

となる。また、Y は 1 以上 20 以下の整数値をとる離散一様分布に従うので、

$$P(Y = i) = \frac{1}{20}$$

ここで、

$$f(i) = \frac{P(X = i)}{P(Y = i)} = \frac{2i}{21}$$

とおくと、求める c は

$$c = \max[f(i)] = f(20) = \frac{40}{21}$$

したがって、棄却法の結果は以下のとおりとなる。

Y	9	4	15	3	18	7	13	16
U	0.24	0.62	0.12	0.82	0.67	0.46	0.35	0.75
$P(X$ =y)	0.0429	0.0190	0.0714	0.0143	0.0857	0.0333	0.0619	0.0762
$P(X$ =y)/[c·(1/20)]	0.45	0.2	0.75	0.15	0.9	0.35	0.65	0.8
U＜$P(X$ =y)/[c·(1/20)]	はい	いいえ	はい	いいえ	はい	いいえ	はい	はい
X	9	-	15	-	18	-	13	16

求まる X の値は 5 個で、標本平均は$(9 + 15 + 18 + 13 + 16)/5 = 14.2$

よって、解答は　①（**H**）②（**F**）③（**H**）

問題２

（１）まず、$E[X_n]$を求める。

ここで、k回抽出を行った時点で、番号nが1度も3回連続して出ていない、という事象を$A_{n,k}$とし、その確率$q_{n,k}=P(A_{n,k})$を考える。

まず、$k=0,1,2$の場合、$A_{n,k}$の定義から、

$$q_{n,k}=1 \quad (k=0,1,2)$$

となる。

次に、$k\geq 3$の場合を考える。
ここで、Y_jをj回目の抽出で出た番号を表す確率変数とすると、$A_{n,k}$は次の3つの互いに排反な事象の和として表すことができる。

$$A_{n,k}^1=A_{n,k}\cap\{Y_1\neq n\}$$

$$A_{n,k}^2=A_{n,k}\cap\{Y_1=n\,,Y_2\neq n\}$$

$$A_{n,k}^3=A_{n,k}\cap\{Y_1=Y_2=n\,,Y_3\neq n\}$$

各事象の確率はそれぞれ、

$$P(A_{n,k}^1)=\left(\frac{n-1}{n}\right)q_{n,k-1}$$

$$P(A_{n,k}^2)=\left(\frac{n-1}{n^2}\right)q_{n,k-2}$$

$$P(A_{n,k}^3)=\left(\frac{n-1}{n^3}\right)q_{n,k-3}$$

であることから、$q_{n,k}$に関する次の漸化式が成立する。

$$q_{n,k}=\left(\frac{n-1}{n}\right)q_{n,k-1}+\left(\frac{n-1}{n^2}\right)q_{n,k-2}+\left(\frac{n-1}{n^3}\right)q_{n,k-3} \quad (k\geq 3)$$

ここで、X_nは離散的確率変数であることから、次式が成り立つ。

$$E[X_n]=\sum_{i=1}^{\infty}iP(X_n=i) \qquad q_{n,k}=\sum_{i=k+1}^{\infty}P(X_n=i)$$

これより、$E[X_n]$ は $q_{n,k}$ を用いて、

$$E[X_n]=\sum_{i=1}^{\infty}iP(X_n=i)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{i-1}P(X_n=i)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=k+1}^{\infty}P(X_n=i)=\sum_{k=0}^{\infty}q_{n,k}$$

と表せることから、

$$
\begin{aligned}
E[X_n] &= \sum_{k=0}^{\infty} q_{n,k} = \sum_{k=3}^{\infty} q_{n,k} + 3 \\
&= \sum_{k=3}^{\infty} \left\{ \left(\frac{n-1}{n}\right) q_{n,k-1} + \left(\frac{n-1}{n^2}\right) q_{n,k-2} + \left(\frac{n-1}{n^3}\right) q_{n,k-3} \right\} + 3 \\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} q_{n,k} - 2\right) + \left(\frac{n-1}{n^2}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} q_{n,k} - 1\right) + \left(\frac{n-1}{n^3}\right)\sum_{k=0}^{\infty} q_{n,k} + 3 \\
&= \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) E[X_n] + 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}
\end{aligned}
$$

以上より、式を整理することで次を得る。

$$E[X_n] = n^3 + n^2 + n$$

よって、解答は　①（**B**）　②（**E**）　③（**E**）　④（**K**）　⑤（**Q**）　⑥（**X**）　⑦（**A**）　⑧（**L**）

（２）次に、$E[X_i]\ (2 \leq i \leq n-1)$を求める。

ここで、k回抽出を行った時点で、iからnまでの番号のうち、どの番号も1度も3回連続して出ていない、という事象を$A_{i,k}$とし、その確率$q_{i,k} = P(A_{i,k})$を考える。

まず、$k = 0,1,2$の場合、$A_{i,k}$の定義から、

$$q_{i,k} = 1 \quad (k = 0,1,2)$$

である。

次に、$k \geq 3$の場合を考える。
ここで、$k \geq 2$であれば、$A_{i,k}$は（１）で定義した確率変数Y_jを用いることで、次の3つの互いに排反な事象の和として表すことができる。

$$A_{i,k}^1 = A_{i,k} \cap \{1 \leq Y_k \leq i-1\}$$

$$A_{i,k}^2 = A_{i,k} \cap \{i \leq Y_k \leq n\,, Y_k \neq Y_{k-1}\}$$

$$A_{i,k}^3 = A_{i,k} \cap \{i \leq Y_k \leq n\,, Y_k = Y_{k-1}\}$$

さて、$A_{i,k}$の定義より$A_{i,k} \subset A_{i,k-1}$であるから、$P\left(A_{i,k}^j\right)\ (k \geq 3, j = 1,2,3)$を$P\left(A_{i,k-1}^j\right)\ (k \geq 3, j = 1,2,3)$で表すことができる。

Ⅰ）$P\left(A_{i,k}^1\right)$について

$A_{i,k}^1$の定義より、$1 \leq Y_k \leq i-1$でなければならないが、1から$i-1$までの番号は同じ番号が3回連続して出てもよいため、Y_kはY_{k-1}の値には依存しない。ゆえに、いずれの$A_{i,k-1}^j (j=1,2,3)$が生起した場合であっても、$1 \leq Y_k \leq i-1$であれば$A_{i,k}^1$が生起する。よって、$1 \leq Y_k \leq i-1$となる確率は$(i-1)/n$であるから、

$$P\left(A_{i,k}^1\right) = \left(\frac{i-1}{n}\right)\left\{P\left(A_{i,k-1}^1\right) + P\left(A_{i,k-1}^2\right) + P\left(A_{i,k-1}^3\right)\right\} \quad (k \geq 3) \quad \cdots \text{式 I}$$

と表せる。

Ⅱ）$P\left(A_{i,k}^2\right)$について

$A_{i,k}^2$の定義より、$A_{i,k}^2$が生起するとき、$\{i \leq Y_k \leq n\} \cap \{Y_k \neq Y_{k-1}\}$も生起する。また、いずれの$A_{i,k-1}^j (j=1,2,3)$が生起した場合であっても、$Y_k \neq Y_{k-1}$であれば$i$から$n$までの番号が3回連続して出ることはない。ゆえに、$\{i \leq Y_k \leq n\} \cap \{Y_k \neq Y_{k-1}\}$が生起すれば、$A_{i,k}^2$が生起する。これより、

$$P\left(A_{i,k}^2\right) = P\left(A_{i,k}^2 \cap \bigcup_{j=1}^{3} A_{i,k-1}^j\right) = \sum_{j=1}^{3} P\left(A_{i,k}^2 \cap A_{i,k-1}^j\right) = \sum_{j=1}^{3} P\left(A_{i,k}^2 \middle| A_{i,k-1}^j\right) P\left(A_{i,k-1}^j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} P\left(\{i \leq Y_k \leq n\} \cap \{Y_k \neq Y_{k-1}\} \middle| A_{i,k-1}^j\right) P\left(A_{i,k-1}^j\right)$$

と表せることから、次に$P\left(\{i \leq Y_k \leq n\} \cap \{Y_k \neq Y_{k-1}\} \middle| A_{i,k-1}^j\right) (j=1,2,3)$を考える。

① $P\left(\{i \leq Y_k \leq n\} \cap \{Y_k \neq Y_{k-1}\} \middle| A_{i,k-1}^1\right)$について

$A_{i,k-1}^1$が生起したとき、$1 \leq Y_{k-1} \leq i-1$であるから、$i \leq Y_k \leq n$であれば、$Y_k \neq Y_{k-1}$は満たされる。よって、

$$P\left(\{i \leq Y_k \leq n\} \cap \{Y_k \neq Y_{k-1}\} \middle| A_{i,k-1}^1\right) = P\left(i \leq Y_k \leq n \,\middle|\, A_{i,k-1}^1\right) = P(i \leq Y_k \leq n) = \frac{n-i+1}{n}$$

② $P\left(\{i \leq Y_k \leq n\} \cap \{Y_k \neq Y_{k-1}\} \middle| A_{i,k-1}^j\right) (j=2,3)$について

$A_{i,k-1}^2$が生起したとき、$\{i \leq Y_k \leq n\} \cap \{Y_k \neq Y_{k-1}\}$の生起を決める要素は$Y_{k-1}$の値のみである。ここで、$A_{i,k-1}^2$が生起したとき、$i \leq Y_{k-1} \leq n$であるから、

$$P\left(\{i \leq Y_k \leq n\} \cap \{Y_k \neq Y_{k-1}\} \,\middle|\, A_{i,k-1}^2\right)$$

$$= P(\{i \leq Y_k \leq n\} \cap \{Y_k \neq Y_{k-1}\} \mid i \leq Y_{k-1} \leq n)$$

$$= \frac{P(\{i \leq Y_{k-1} \leq n\} \cap \{i \leq Y_k \leq n\} \cap \{Y_k \neq Y_{k-1}\})}{P(i \leq Y_{k-1} \leq n)}$$

$$= \frac{P(\{i \leq Y_{k-1} \leq n\} \cap \{i \leq Y_k \leq n\}) \times P(Y_k \neq Y_{k-1} \mid \{i \leq Y_{k-1} \leq n\} \cap \{i \leq Y_k \leq n\})}{P(i \leq Y_{k-1} \leq n)}$$

$$= P(i \leq Y_k \leq n) \times P(Y_k \neq Y_{k-1} \mid \{i \leq Y_{k-1} \leq n\} \cap \{i \leq Y_k \leq n\})$$

$$= \frac{n-i+1}{n} \times \frac{n-i}{n-i+1}$$

$$= \frac{n-i}{n}$$

$P\left(\{i \leq Y_k \leq n\} \cap \{Y_k \neq Y_{k-1}\} \middle| A_{i,k-1}^3\right)$についても同様に考えることで、

$$P\left(\{i \leq Y_k \leq n\} \cap \{Y_k \neq Y_{k-1}\} \middle| A_{i,k-1}^3\right) = \frac{n-i}{n}$$

以上より、

$$P\left(A_{i,k}^2\right) = \left(\frac{n-i+1}{n}\right) P\left(A_{i,k-1}^1\right) + \left(\frac{n-i}{n}\right)\left\{P\left(A_{i,k-1}^2\right) + P\left(A_{i,k-1}^3\right)\right\} \quad (k \geq 3) \quad \cdots 式 \mathrm{II}$$

と表せる。

Ⅲ）$P\left(A_{i,k}^3\right)$について

$A_{i,k}^3$の定義より$A_{i,k}^3$が生起するとき、$\{i \leq Y_k \leq n\} \cap \{Y_k = Y_{k-1}\}$が生起することから、$\{i \leq Y_{k-1} \leq n\}$も生起する。また、$i$から$n$までの番号は3回連続して出てはいないため、$Y_{k-1} \neq Y_{k-2}$も生起する。これらを満たす事象は$A_{i,k-1}^2$のみである。さて、$A_{i,k-1}^2$が生起したとき、$i \leq Y_{k-1} \leq n$であるから、このとき$A_{i,k}^3$が生起するためには$Y_k = Y_{k-1}$であればよい。ここで、$A_{i,k-1}^2$の条件のもと$Y_k = Y_{k-1}$となる確率は、

$$P\left(Y_k = Y_{k-1} \middle| A_{i,k-1}^2\right) = P(Y_k = Y_{k-1} | i \leq Y_{k-1} \leq n)$$

$$= \frac{P(\{i \leq Y_{k-1} \leq n\} \cap \{Y_k = Y_{k-1}\})}{P(i \leq Y_{k-1} \leq n)}$$

$$= \frac{n-i+1}{n^2} \times \frac{n}{n-i+1}$$

$$= \frac{1}{n}$$

よって、

$$P\left(A_{i,k}^3\right) = \frac{1}{n} P\left(A_{i,k-1}^2\right) \quad (k \geq 3) \quad \cdots 式 \mathrm{III}$$

と表せる。

いま、$A_{i,k}^{j}\ (k \geq 2, j = 1,2,3)$の定義より、

$$q_{i,k} = P\left(A_{i,k}\right) = P\left(A_{i,k}^{1}\right) + P\left(A_{i,k}^{2}\right) + P\left(A_{i,k}^{3}\right)\quad (k \geq 2)$$

であるから、式Ⅰより、

$$P\left(A_{i,k}^{1}\right) = \left(\frac{i-1}{n}\right)\left\{P\left(A_{i,k-1}^{1}\right) + P\left(A_{i,k-1}^{2}\right) + P\left(A_{i,k-1}^{3}\right)\right\} = \left(\frac{i-1}{n}\right) q_{i,k-1}\quad (k \geq 3)\quad \cdots \text{式Ⅰ}'$$

ここで、

$$P\left(A_{i,2}^{1}\right) = P\left(A_{i,2} \cap \{1 \leq Y_2 \leq i-1\}\right) = P(1 \leq Y_2 \leq i-1) = \frac{i-1}{n}$$

であるから、式Ⅰ′ は$k = 2$でも成り立つ。

よって、次にこれを用いて式Ⅱを整理すると、

$$\begin{aligned}
P\left(A_{i,k}^{2}\right) &= \left(\frac{n-i+1}{n}\right) P\left(A_{i,k-1}^{1}\right) + \left(\frac{n-i}{n}\right)\left\{P\left(A_{i,k-1}^{2}\right) + P\left(A_{i,k-1}^{3}\right)\right\} \\
&= \left(\frac{n-i}{n}\right)\left\{P\left(A_{i,k-1}^{1}\right) + P\left(A_{i,k-1}^{2}\right) + P\left(A_{i,k-1}^{3}\right)\right\} + \frac{1}{n} P\left(A_{i,k-1}^{1}\right) \\
&= \left(\frac{n-i}{n}\right) q_{i,k-1} + \left(\frac{i-1}{n^2}\right) q_{i,k-2}\quad (k \geq 3)\quad \cdots \text{式Ⅱ}'
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
P\left(A_{i,2}^{2}\right) &= P\left(A_{i,2} \cap \{i \leq Y_2 \leq n\} \cap \{Y_2 \neq Y_1\}\right) \\
&= P(\{1 \leq Y_1 \leq i-1\} \cap \{i \leq Y_2 \leq n\} \cap \{Y_2 \neq Y_1\}) \\
&\qquad + P(\{i \leq Y_1 \leq n\} \cap \{i \leq Y_2 \leq n\} \cap \{Y_2 \neq Y_1\}) \\
&= P(1 \leq Y_1 \leq i-1) \times P(i \leq Y_2 \leq n) \\
&\qquad + P(i \leq Y_1 \leq n) \times P(\{i \leq Y_2 \leq n\} \cap \{Y_2 \neq Y_1\} | i \leq Y_1 \leq n) \\
&= \frac{i-1}{n} \times \frac{n-i+1}{n} + \frac{n-i+1}{n} \times \frac{n-i}{n} \\
&= \frac{n-i}{n} + \frac{i-1}{n^2}
\end{aligned}$$

であるから、式Ⅱ′ は$k = 2$でも成り立つ。よって、最後にこれを式Ⅲに用いることで、

$$P\left(A_{i,k}^{3}\right) = \frac{1}{n} P\left(A_{i,k-1}^{2}\right) = \left(\frac{n-i}{n^2}\right) q_{i,k-2} + \left(\frac{i-1}{n^3}\right) q_{i,k-3}\quad (k \geq 3)$$

を得る。以上より、

$$\begin{aligned}
q_{i,k} &= P\left(A_{i,k}^{1}\right) + P\left(A_{i,k}^{2}\right) + P\left(A_{i,k}^{3}\right) \\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right) q_{i,k-1} + \left(\frac{n-1}{n^2}\right) q_{i,k-2} + \left(\frac{i-1}{n^3}\right) q_{i,k-3}\quad (k \geq 3)
\end{aligned}$$

となる。これを（1）で求めた期待値の式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
E[X_i] &= \sum_{k=0}^{\infty} q_{i,k} = \sum_{k=3}^{\infty} q_{i,k} + 3 = \sum_{k=3}^{\infty}\left\{\left(\frac{n-1}{n}\right)q_{i,k-1} + \left(\frac{n-1}{n^2}\right)q_{i,k-2} + \left(\frac{i-1}{n^3}\right)q_{i,k-3}\right\} + 3 \\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} q_{i,k} - 2\right) + \left(\frac{n-1}{n^2}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} q_{i,k} - 1\right) + \left(\frac{i-1}{n^3}\right)\sum_{k=0}^{\infty} q_{i,k} + 3 \\
&= \left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{i-1}{n^3}\right)E[X_i] + 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}
\end{aligned}
$$

以上より、式を整理することで次を得る。

$$
E[X_i] = \frac{n^3 + n^2 + n}{n - i + 1}
$$

よって、<u>解答は　⑨（Ｇ）　⑩（Ｊ）　⑪（Ｉ）　⑫（Ａ）　⑬（Ｆ）　⑭（Ｋ）　⑮（Ｑ）
⑯（Ｕ）　⑰（Ｌ）</u>

（3）最後に、$E[X_1]$を求める。

ここで、（2）と同様に、k回抽出を行った時点で、1からnまでの番号のうち、どの番号も1度も3回連続して出ていない、という事象を$A_{1,k}$とし、その確率$q_{1,k} = P(A_{1,k})$を考える。

まず、$k = 0,1,2$の場合、$A_{1,k}$の定義から、

$$
q_{1,k} = 1 \quad (k = 0,1,2)
$$

を得る。

次に、$k \geq 3$の場合を考える。
ここで、$k \geq 2$であれば、$A_{1,k}$は（1）で定義した確率変数Y_jを用いることで、次の2つの排反な事象の和として表すことができる。

$$
A_{1,k}^1 = A_{1,k} \cap \{Y_k \neq Y_{k-1}\}
$$

$$
A_{1,k}^2 = A_{1,k} \cap \{Y_k = Y_{k-1}\}
$$

さて、$A_{1,k}$の定義より$A_{1,k} \subset A_{1,k-1}$であるから、$P\left(A_{1,k}^j\right)\ (k \geq 3, j = 1,2)$を$P\left(A_{1,k-1}^j\right)\ (k \geq 3, j = 1,2)$で表すことができる。

Ｉ）$P\left(A_{1,k}^1\right)$について

$Y_k \neq Y_{k-1}$が生起する場合、Y_{k-1}, Y_{k-2}の関係に依らず、3回連続しては同じ番号が出ないという条件を満たす。よって、$A_{1,k-1}^1$, $A_{1,k-1}^2$のどちらが生起した場合でも、$Y_k \neq Y_{k-1}$ならば$A_{1,k}^1$が生起する。ここで、$Y_k \neq Y_{k-1}$となる確率は${(n-1)}/{n}$であるから、

$$P\left(A_{1,k}^{1}\right)=\left(\frac{n-1}{n}\right)\left\{P\left(A_{1,k-1}^{1}\right)+P\left(A_{1,k-1}^{2}\right)\right\}\quad(k\geq 3)\quad\cdots\text{式IV}$$

を得る。

Ⅱ）$P\left(A_{1,k}^{2}\right)$について

$A_{1,k}^{2}$の定義より、$A_{1,k}^{2}$が生起するとき、$Y_k=Y_{k-1}$も生起する。よって、3回続けては同じ番号が出ないという条件を踏まえると、$Y_{k-1}\neq Y_{k-2}$も同時に生起する。ゆえに、$A_{1,k}^{2}$が生起するのは、$A_{1,k-1}^{1}$が生起したときに、$Y_k=Y_{k-1}$が生起する場合のみである。ここで、$Y_k=Y_{k-1}$となる確率は$1/n$であるから、

$$P\left(A_{1,k}^{2}\right)=\frac{1}{n}P\left(A_{1,k-1}^{1}\right)\quad(k\geq 3)\quad\cdots\text{式V}$$

を得る。

ここで、$A_{1,k}^{j}\ (k\geq 2, j=1,2)$ の定義より、

$$q_{1,k}=P\left(A_{1,k}\right)=P\left(A_{1,k}^{1}\right)+P\left(A_{1,k}^{2}\right)\quad(k\geq 2)$$

であるから、式IVより、

$$P\left(A_{1,k}^{1}\right)=\left(\frac{n-1}{n}\right)\left\{P\left(A_{1,k-1}^{1}\right)+P\left(A_{1,k-1}^{2}\right)\right\}=\left(\frac{n-1}{n}\right)q_{1,k-1}\quad(k\geq 3)\quad\cdots\text{式IV}'$$

ここで、

$$P\left(A_{1,2}^{1}\right)=P\left(A_{1,2}\cap\{Y_2\neq Y_1\}\right)=P(Y_2\neq Y_1)=\frac{n-1}{n}$$

より、式IV′ は$k=2$でも成り立つ。よって、これ用いて式Vを整理すると、

$$P\left(A_{1,k}^{2}\right)=\frac{1}{n}P\left(A_{1,k-1}^{1}\right)=\left(\frac{n-1}{n^2}\right)q_{1,k-2}\quad(k\geq 3)$$

を得る。以上より、

$$q_{1,k}=\left(\frac{n-1}{n}\right)q_{1,k-1}+\left(\frac{n-1}{n^2}\right)q_{1,k-2}\quad(k\geq 3)$$

を得る。これを（1）で求めた期待値の式に代入すると、

$$\begin{aligned}E[X_1]&=\sum_{k=0}^{\infty}q_{1,k}=\sum_{k=3}^{\infty}q_{1,k}+3=\sum_{k=3}^{\infty}\left\{\left(\frac{n-1}{n}\right)q_{1,k-1}+\left(\frac{n-1}{n^2}\right)q_{1,k-2}\right\}+3\\&=\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}q_{1,k}-2\right)+\left(\frac{n-1}{n^2}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}q_{1,k}-1\right)+3\\&=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)E[X_1]+1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

以上より、式を整理することで次を得る。

$$E[X_1]=n^2+n+1$$

さて、初めに定義したXは、Z_iを「1からnまでの番号のうち、$i-1$種類$(1 \leq i \leq n)$の各番号がいずれも少なくとも1度は3回連続して出た時点から、残り$n-i+1$種類$(1 \leq i \leq n)$の番号のうちどれかひとつが初めて3回連続して出るまでに行った抽出回数を表す確率変数」とすると、$X = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$と表せることから、

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[Z_i]$$

が成り立つ。ここで、Z_iの定義における$i-1$種類$(2 \leq i \leq n)$の番号を、1から$i-1$までの番号である、としても一般性を失わない。

（例えば、$i=2$のとき、すでに3回連続して出た1種類の番号が7であったとする。このとき、以降の抽出で7が出た場合は1、1が出た場合は7、とそれぞれ読み替えればよい。）

よって、X_iの定義から、Z_iとX_iの期待値は等しくなるので、

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[Z_i] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

となることから、

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = (n^3 + n^2 + n) \times \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

を得る。

よって、解答は　⑱（**D**）　⑲（**L**）　⑳（**B**）

問題３

（１） X_i が $N(\mu,\sigma^2)$ に従うので、$\dfrac{1}{n}X_i$ は $N\left(\dfrac{\mu}{n},\dfrac{\sigma^2}{n^2}\right)$に従う。$X_1,X_2,\cdots,X_n$ は独立なので、$\dfrac{1}{n}X_1,\dfrac{1}{n}X_2,\cdots,\dfrac{1}{n}X_n$ も独立。正規分布の再生性から、$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ は $N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。よって、

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\sim N(0,1)$$

が分かった。

次に、

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}{X_i}^2-2\sum_{i=1}^{n}X_i\bar{X}+\sum_{i=1}^{n}\bar{X}^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{X_i}^2-\bar{X}^2$$

であるから、

$$E[S^2]=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{X_i}^2-\bar{X}^2\right]=\frac{1}{n}n(\sigma^2+\mu^2)-\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

である。$U^2=a\ \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$とおくと $U^2=anS^2$である。これが σ^2の不偏推定量となるための条件は

$$E[U^2]=\sigma^2$$

すなわち

$$an\frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2$$

これを解いて、$a=\frac{1}{n-1}$ を得る。

よって、解答は　①（A）　②（B）　③（I）　④（D）

（２）$w\geq 0$ のとき、

$$P(W\leq w)=P(Y^2\leq w)=P\left(-\sqrt{w}\leq Y\leq \sqrt{w}\right)=2P\left(0\leq Y\leq\sqrt{w}\right)=\int_0^{\sqrt{w}}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$
$$=\int_0^{w}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{h}{2}}\frac{1}{2\sqrt{h}}dh=\int_0^{w}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}h^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{h}{2}}dh$$

であるから、両辺を w で微分すると、

$$f_W(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}w^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{w}{2}}\,(w>0)$$

となる。これはガンマ分布 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ の確率密度関数である。

また、$\begin{cases} t = y\sqrt{\dfrac{k}{r}} \\ v = r \end{cases}$ とすると、$\begin{cases} -\infty < y < \infty \\ 0 < r < \infty \end{cases}$ に対して$\begin{cases} -\infty < t < \infty \\ 0 < v < \infty \end{cases}$ であり、(y, r) と (t, v) は

１対１に対応する。また、$\begin{cases} y = t\sqrt{\dfrac{v}{k}} \\ r = v \end{cases}$ より $\dfrac{\partial y}{\partial t} = \sqrt{\dfrac{v}{k}}$, $\dfrac{\partial y}{\partial v} = \dfrac{t}{2\sqrt{kv}}$, $\dfrac{\partial r}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial r}{\partial v} = 1$ で

あるから、$\dfrac{\partial(y,r)}{\partial(t,v)} = \sqrt{\dfrac{v}{k}}$ である。よって、(T, V)の結合確率密度関数$f_{T,V}(t, v)$は、

$$f_{T,V}(t,v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(t\sqrt{\frac{v}{k}}\right)^2/2} \times \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} v^{\frac{k}{2}-1}\ e^{-\frac{v}{2}} \sqrt{\frac{v}{k}} \ \begin{pmatrix} -\infty < t < \infty \\ 0 < v < \infty \end{pmatrix}$$

となる。これを整理すると、

$$f_{T,V}(t,v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \times \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\ v^{\frac{k-1}{2}}\ e^{-\frac{v}{2}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)} \ \begin{pmatrix} -\infty < t < \infty \\ 0 < v < \infty \end{pmatrix}$$

となる。したがって、T の確率密度関数は、

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \times \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^\infty v^{\frac{k-1}{2}}\ e^{-\frac{v}{2}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)} dv\ (-\infty < t < \infty)$$

となる。$g = \dfrac{v}{2}\left(1 + \dfrac{t^2}{k}\right)$ と変換すると、

$$\int_0^\infty v^{\frac{k-1}{2}}\ e^{-\frac{v}{2}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)} dv = \int_0^\infty \left(\frac{2g}{1+\frac{t^2}{k}}\right)^{\frac{k-1}{2}} e^{-g}\ \frac{2}{1+\frac{t^2}{k}}\ dg$$

$$= 2^{\frac{k+1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$

となることに注意して整理すると、

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \times \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}\ (-\infty < t < \infty)$$

を得る。

よって、解答は　⑤（**C**）　⑥（**D**）　⑦（**F**）　⑧（**F**）　⑨（**C**）　⑩（**F**）　⑪（**B**）
⑫（**G**）　⑬（**H**）

（３）$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{X_i}^2-\bar{X}^2$ より　$\sum_{i=1}^{n}{X_i}^2=n(S^2+\bar{X}^2)$ であるから、

$$\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n}{Y_i}^2-\left(\sqrt{n}\,\bar{Y}\right)^2\right)=\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2-n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}{X_i}^2-2\mu\sum_{i=1}^{n}X_i+n\mu^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu\right)^2$$

$$=n(S^2+\bar{X}^2)-2\mu n\bar{X}+n\mu^2-\frac{1}{n}(\,n\bar{X}-n\mu)^2=nS^2$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^{n}{Y_i}^2-\left(\sqrt{n}\,\bar{Y}\right)^2=\frac{n}{\sigma^2}S^2$$

である。

また、$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$は独立に $N(0,1)$ に従うから、

$$f_{Y_1,Y_2,\cdots,Y_n}(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}({y_1}^2+{y_2}^2+\cdots+{y_n}^2)}\ (-\infty<y_i<\infty\ (i=1,\cdots,n))$$

であり、A は直交行列なので行列式の絶対値は 1 である。

よって、$(Z_1,Z_2,\cdots,Z_n)$ の結合確率密度関数は

$$f_{Z_1,Z_2,\cdots,Z_n}(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}({z_1}^2+{z_2}^2+\cdots+{z_n}^2)}\ (-\infty<z_i<\infty\ (i=1,\cdots,n))$$

となるので、 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$は独立に $N(0,1)$ に従うことが分かる。

また、$Z_n=a_{n1}Y_1+a_{n2}Y_2+\cdots+a_{nn}Y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}Y_1+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_2+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_n=\sqrt{n}\,\bar{Y}$ に注意すると、

${Z_n}^2=\left(\sqrt{n}\,\bar{Y}\right)^2$であるから、（イ）より、

$$\frac{n}{\sigma^2}S^2=\sum_{i=1}^{n}{Y_i}^2-\left(\sqrt{n}\,\bar{Y}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}{Z_i}^2-{Z_n}^2=\sum_{i=1}^{n-1}{Z_i}^2$$

が成り立つことが分かる。Z_iは $N(0,1)$ に従うので、（ア）より ${Z_i}^2$は $\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ に従う。ガンマ分布

$\Gamma(\alpha,\beta)$ の 再生性から、$\sum_{i=1}^{n-1} {Z_i}^2$は$\Gamma\left(\frac{n-1}{2},\frac{1}{2}\right)$ に従う。すなわち、$\frac{n}{\sigma^2}S^2$は$\Gamma\left(\frac{n-1}{2},\frac{1}{2}\right)$ に従う。

また、$Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$が独立であることから$\sum_{i=1}^{n-1} {Z_i}^2$と${Z_n}^2$は独立で、$\bar{Y}$ と S^2も独立である。$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i-\mu}{\sigma} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}$ より、$\bar{X}$ と S^2が独立であることも分かった。

よって、解答は　⑭（**F**）　⑮（**C**）　⑯（**B**）　⑰（**M**）　⑱（**E**）　⑲（**I**）　⑳（**A**）

（４） いま、

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{U^2/n}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \times \sqrt{\frac{n-1}{\frac{n}{\sigma^2}S^2}}$$

である。$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$ と $\frac{n}{\sigma^2}S^2$は独立であり、

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1) \\ \\ \dfrac{n}{\sigma^2}S^2 \sim \Gamma\left(\dfrac{n-1}{2},\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

であったから、$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{U^2/n}}$は自由度$n-1$ の t 分布に従う。$U^2 = \frac{n}{n-1}S^2$に注意すれば、$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/(n-1)}}$が自由度$n-1$ の t 分布に従うことが分かった。

$$P\left(-t_{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/(n-1)}} < t_{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) = 1-\varepsilon$$

を整理して

$$P\left(\bar{X} - t_{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{S^2/(n-1)} < \mu < \bar{X} + t_{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{S^2/(n-1)}\right) = 1-\varepsilon$$

を得るので、求める母平均の信頼区間は

信頼下限：$\bar{x} - t_{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{\frac{s^2}{n-1}}$

信頼上限：$\bar{x} + t_{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{\frac{s^2}{n-1}}$

よって、解答は　㉑（**E**）　㉒（**E**）　㉓（**E**）

問題１

（1）	①	（A）	2 点
	②	（I）	3 点
（2）	①	（J）	2 点
	②	（B）	3 点
（3）	①	（F）	2 点
	②	（J）	3 点
（4）	①	（C）	1 点
	②	（H）	4 点
（5）	①	（E）	2 点
	②	（H）	3 点
（6）	①	（F）	1 点
	②	（E）	1 点
	③	（B）	1 点
	④	（H）	2 点

（7）	①	（D）	完答で 2 点
	②	（E）	
	③	（B）	完答で 3 点
	④	（G）	
（8）	①	（D）	3 点
	②	（D）	2 点
（9）	①	（C）	3 点
	②	（C）	2 点
（10）	①	（G）	1 点
	②	（E）	2 点
	③	（D）	2 点
（11）	①	（H）	3 点
	②	（E）	2 点
（12）	①	（H）	2 点
	②	（F）	1 点
	③	（H）	2 点

問題２

（1）	①	（B）	1 点
	②	（E）	1 点
	③	（E）	1 点
	④	（K）	1 点
	⑤	（Q）	1 点
	⑥	（X）	1 点
	⑦	（A）	1 点
	⑧	（L）	2 点
（2）	⑨	（G）	2 点
	⑩	（J）	完答で 2 点
	⑪	（I）	

	⑫	（A）	完答で 2 点
	⑬	（F）	
	⑭	（K）	完答で 2 点
	⑮	（Q）	
	⑯	（U）	
	⑰	（L）	1 点
（3）	⑱	（D）	1 点
	⑲	（L）	完答で 1 点
	⑳	（B）	

問題３

（１）	①	（A）	完答で２点
	②	（B）	
	③	（Ｉ）	１点
	④	（D）	１点
（２）	⑤	（C）	完答で１点
	⑥	（D）	
	⑦	（F）	１点
	⑧	（F）	１点
	⑨	（C）	完答で１点
	⑩	（F）	
	⑪	（B）	
	⑫	（G）	完答で２点
	⑬	（H）	
（３）	⑭	（F）	２点
	⑮	（C）	１点
	⑯	（B）	１点
	⑰	（M）	１点
	⑱	（E）	１点
	⑲	（Ｉ）	完答で１点
	⑳	（A）	
（４）	㉑	（E）	１点
	㉒	（E）	１点
	㉓	（E）	１点

以上