年金数理（問題）

この年金数理の問題において特に説明がない限り、次のとおりとする。
- 「被保険者」とは、在職中の者をいう。
- 「年金受給権者」とは、年金受給中の者および受給待期中の者をいう。
- 「加入年齢方式」とは、「特定年齢方式」のことをいう。
- 「責任準備金」とは、給付現価から標準保険料収入現価を控除した額をいう。
- 「未積立債務」とは、責任準備金から積立金を控除した額をいう。
- 「Trowbridge モデルの年金制度」とは、定年退職者のみに対し、定年退職時より単位年金額の終身年金を年１回期初に支払う年金制度をいい、保険料の払い込みは年１回期初払いとする。なお、「Trowbridge モデルの年金制度」は必ずしも定常人口を仮定するものではない。

問題１． 次の（１）～（８）について、各問の指示に従い解答用紙の所定の欄にマークしなさい。

各５点（計４０点）

（１）生存脱退と死亡脱退を脱退事由とする二重脱退残存表を考える。二重脱退残存表における記号を次のように定義する。

$d_x^{(d)}$：死亡脱退数、$q_x^{(w)}$：生存脱退率、$q_x^{(d)}$：死亡脱退率

このとき、$q_x^{(w)}$は常に0.05、$q_{60}^{(d)}$は0.005、$x \geq 60$に対して$d_x^{(d)}$が一定になるとき、この二重脱退残存表の最終年齢（残存者数が初めてゼロとなる年齢）に最も近いものを選択肢の中から１つ選びなさい。なお、必要であれば次の諸数値を使用しなさい。

＜諸数値＞

$\log_{10} 1.1 = 0.04139$、$\log_{10} 5 = 0.69897$、$\log_{10} 9.5 = 0.97772$、$\log_{10} 9.95 = 0.99782$

（Ａ）86歳	（Ｂ）89歳	（Ｃ）92歳	（Ｄ）95歳	（Ｅ）98歳
（Ｆ）101歳	（Ｇ）104歳	（Ｈ）107歳	（Ｉ）110歳	（Ｊ）113歳

（２）人員構成の異なる年金制度 A および年金制度 B はそれぞれ定常人口に達しており、期初に x 歳である被保険者の中途退職による脱退率（加入中の死亡を含む）はそれぞれ次のとおりである。

年金制度 A：$q_x^A = \dfrac{1}{80-x}$　$(x = 20,21,\cdots,59)$

年金制度 B：$q_x^B = \dfrac{1}{120-x}$　$(x = 20,21,\cdots,59)$

年金制度 A の被保険者数が年金制度 B の被保険者数の 2 倍である場合、「年金制度 A の新規加入者数÷年金制度 B の新規加入者数」の値として最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。なお、計算の前提を次のとおりとする。

＜計算の前提＞

・年金制度 A および年金制度 B ともに加入年齢は 20 歳、定年年齢は 60 歳
・新規加入は期初に発生し、被保険者数の測定時期は期初の新規加入の直後とする
・定年退職による脱退は年 1 回期末、中途退職による脱退は年 1 回期央に発生する
・期初に 59 歳の被保険者は、期央の中途退職と期末の定年年齢到達により脱退する

（A）2.30　（B）2.32　（C）2.34　（D）2.36　（E）2.38
（F）2.40　（G）2.42　（H）2.44　（I）2.46　（J）2.48

（３）Trowbridge モデルの年金制度で定常状態のとき、各種財政方式の保険料と給付現価の関係を表す次の（A）から（F）までの算式から誤っているものを全て選びなさい。
なお、誤っているものがない場合は（G）をマークしなさい。また、各記号の意味は次のとおりとする。
S ：制度全体の給付現価、S^p ：年金受給権者の給付現価、S^a ：在職中の被保険者の給付現価、
S^a_{PS} ：在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価、
S^a_{FS} ：在職中の被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価、
S^f ：将来加入が見込まれる被保険者の給付現価

${}^{P}C$ ：賦課方式の保険料、${}^{T}C$ ：退職時年金現価積立方式の保険料、${}^{U}C$ ：単位積立方式の保険料、
${}^{In}C$ ：加入時積立方式の保険料

i ：予定利率、$v = \frac{1}{1+i}$ 、$d = 1 - v$

（A） $S = \dfrac{{}^{P}C}{d}$

（B） $S^p = \dfrac{{}^{P}C - v \cdot {}^{T}C}{d}$

（C） $S^a = \dfrac{v \cdot {}^{T}C - v \cdot {}^{In}C}{d}$

（D） $S^f = \dfrac{v \cdot {}^{In}C}{d}$

（E） $S^a_{PS} = \dfrac{v \cdot {}^{T}C - {}^{U}C}{d}$

（F） $S^a_{FS} = \dfrac{{}^{U}C - v \cdot {}^{In}C}{d}$

（４）X年度末時点で定常状態に達している保険料および給付が年１回期初払いの年金制度において、X+１年度から X+n 年度まで積立金の運用利回りが予定利率 i を上回り $j\ (j>0)$となった。その結果、X+ n 年度末の積立金が定常状態における積立金の $\alpha\ (\alpha>1)$倍以上になったとする。このとき、n が満たす条件として最も適切なものを選択肢の中から１つ選びなさい。ただし、自然対数の底は省略して表記している。

（A）$n \geq \log\left(\dfrac{1+\frac{1+i}{1+j}}{\alpha-\frac{1+i}{1+j}}\right)/\log(1+j)$　　（B）$n \geq \log\left(\dfrac{\alpha-\frac{1+i}{1+j}}{1-\frac{1+i}{1+j}}\right)/\log(1+j)$

（C）$n \geq \log\left(\dfrac{1+\frac{i}{1+i}\frac{1}{j}}{\alpha-\frac{i}{1+i}\frac{1}{j}}\right)/\log(1+j)$　　（D）$n \geq \log\left(\dfrac{\alpha-\frac{i}{1+i}\frac{1}{j}}{1-\frac{i}{1+i}\frac{1}{j}}\right)/\log(1+j)$

（E）$n \geq \log\left(\dfrac{1+\frac{1}{1+i}\frac{1}{1+j}}{\alpha-\frac{1}{1+i}\frac{1}{1+j}}\right)/\log(1+j)$　　（F）$n \geq \log\left(\dfrac{\alpha-\frac{1}{1+i}\frac{1}{1+j}}{1-\frac{1}{1+i}\frac{1}{1+j}}\right)/\log(1+j)$

（G）$n \geq \log\left(\dfrac{1+\frac{i}{1+i}\frac{1}{1+j}}{\alpha-\frac{i}{1+i}\frac{1}{1+j}}\right)/\log(1+j)$　　（H）$n \geq \log\left(\dfrac{\alpha-\frac{i}{1+i}\frac{1}{1+j}}{1-\frac{i}{1+i}\frac{1}{1+j}}\right)/\log(1+j)$

（I）$n \geq \log\left(\dfrac{1+\frac{i}{1+i}\frac{1+j}{j}}{\alpha-\frac{i}{1+i}\frac{1+j}{j}}\right)/\log(1+j)$　　（J）$n \geq \log\left(\dfrac{\alpha-\frac{i}{1+i}\frac{1+j}{j}}{1-\frac{i}{1+i}\frac{1+j}{j}}\right)/\log(1+j)$

（５）Trowbridge モデルの年金制度において、制度発足時点の状態を考える。到達年齢方式による標準保険料率を ${}^{A}P$、加入年齢方式による標準保険料率を ${}^{E}P$、開放基金方式による標準保険料率を ${}^{OAN}P$、在職中の被保険者の人数現価をG^a、将来加入が見込まれる被保険者の人数現価をG^fとする。 ${}^{A}P : {}^{E}P : {}^{OAN}P = a : b : c$ が成り立つとき、G^f/G^a を表す式として最も適切なものを選択肢の中から１つ選びなさい。なお、$a \neq b$、$b \neq c$、$a \neq c$とする。

（A）$\dfrac{a}{c-b}$　（B）$\dfrac{a+c}{c-b}$　（C）$\dfrac{a+b}{c-b}$　（D）$\dfrac{a-c}{c-b}$　（E）$\dfrac{a-b}{c-b}$

（F）$\dfrac{b}{a-c}$　（G）$\dfrac{b+c}{a-c}$　（H）$\dfrac{a+b}{a-c}$　（I）$\dfrac{c-b}{a-c}$　（J）$\dfrac{a-b}{a-c}$

（６）第1年度期初に発足した年金制度がある。第1年度期初の未積立債務を償却するため、特別保険料Xを年1回期初払いで10年元利均等償却により設定した。第5年度期末までは計算基礎率どおりに推移した。その後、第5年度期末に予定利率を引き下げたところ、未償却分（Xの5年間の収入現価（予定利率引下げ後の予定利率により算定））を含む未積立債務が第1年度期初の未積立債務の2倍になった。第6年度より、未償却分の償却については引き続きXを払い込むことにより行い、未償却分を除く未積立債務の償却については次の条件を満たすように設定したYを払い込むことにより行う。これにより、$X+Y$に相当する特別保険料に変更したところ、$X+Y$は第1年度期初の未積立債務の $\boxed{a}$ $\boxed{b}$ %（%単位で小数点以下第1位を四捨五入）となった。このとき、a、bにそれぞれ当てはまる数字を解答欄にマークしなさい。計算結果が10%未満となった場合は、aに0をマークしなさい。

Y：予定利率引下げ後の未積立債務から未償却分を控除した額を、年1回期初払いで10年元利均等償却により設定した特別保険料

＜年1回期初払いn年確定年金現価率＞

n	予定利率引下げ前の n年確定年金現価率	予定利率引下げ後の n年確定年金現価率
5	4.76197	4.85439
10	8.97087	9.36052

（７）期初時点で40歳以上の中途退職者および定年退職者に対して「加入年数× 1,000」の一時金を支給する定常状態の定額制の制度について、定年退職者に対する給付を一時金から年金に変更することにした。制度変更後に定常状態に達したときの被保険者 1 人あたりの保険料と制度変更前の被保険者 1 人あたりの保険料が等しくなる年金額Kに最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。なお、計算の前提および制度変更内容を次のとおりとする。

＜計算の前提＞
・予定利率は2.5%
・加入年齢は20歳（新規加入者数1,000人）、定年年齢は60歳
・予定脱退率は$q_x = \dfrac{1}{120-x}$（脱退には加入中の死亡を含む）
・加入時期は年 1 回期初、定年退職による脱退は年 1 回期末、中途退職による脱退は年 1 回期央に発生する
・期初に59歳の被保険者は、期央の中途退職と期末の定年年齢到達により脱退する
・給付の支払いは脱退と同時に発生する
・中途退職時の給付額の算定において、加入年数は年未満切り捨てとする
・保険料は年 1 回期初払い（新規加入→保険料払込の順で発生）、中途退職による給付は年 1 回期央払い、定年年齢到達による給付は年 1 回期末払いとする
・毎年、保険料および保険料の予定利率による利息を合算した額と給付額が収支相等するものとする（計算基礎率どおり推移し、毎期末の積立金が 0 となるものとする）

＜制度変更内容＞
・期末の生存を条件に年金額Kを期末に支給する（期初に59歳の被保険者は、期央の中途退職を除き、期末の定年年齢到達と同時に年金額Kが支給される）
なお、定年年齢以降の予定死亡率は$q_x = \dfrac{1}{90-x}$ 、死亡は年 1 回期央に発生するものとする

（A）2,420　（B）2,440　（C）2,460　（D）2,480　（E）2,500
（F）2,520　（G）2,540　（H）2,560　（I）2,580　（J）2,600

（８）中途退職者および定年退職者に対して「加入年数×脱退時の給与」の一時金を支給する制度を発足する。次の計算の前提およびファクラーの公式を用いて計算される制度全体の第２年度末の責任準備金の額として最も近いものを選択肢の中から１つ選びなさい。

＜計算の前提＞

・新規加入および保険料の払い込みは年１回期初に発生し、その順は「新規加入→保険料の払い込み」とする

・脱退（加入中の死亡は発生しない）および昇給は年１回期末に発生し、その順は「脱退→昇給」とする

・加入年齢は55歳、定年年齢は60歳

・第１年度の新規加入者は100人（１人あたりの給与は一律100,000円）、第２年度の新規加入者は80人（１人あたりの給与は一律95,000円）

・各計算基礎率は次のとおりであり、発足から第２年度末までは計算基礎率どおり推移するものとする

年齢	生存者数	給与指数
55歳	1,000,000	1.00
56歳	900,000	1.05
57歳	800,000	1.10
58歳	700,000	1.15
59歳	600,000	1.20

・予定利率は1.5%

・財政方式は加入年齢方式を採用し、給与1に対する標準保険料率は1.0となった

（Ａ）23,000千円　（Ｂ）23,190千円　（Ｃ）23,250千円　（Ｄ）23,330千円　（Ｅ）23,420千円
（Ｆ）23,580千円　（Ｇ）23,670千円　（Ｈ）23,730千円　（Ｉ）23,850千円　（Ｊ）23,920千円

問題２． 次の（１）～（４）について、各問の指示に従い解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
各７点（計２８点）

（１）次の空欄aからgまでのそれぞれに当てはまる数字を解答欄にマークしなさい。

① x歳支給開始、年金額1を支給する連続払終身年金（年金制度Y）がある。利力$\delta = 0.02$、死力$\mu = 0.1$ のとき、x歳における年金現価は $\boxed{a}$. $\boxed{b}$ $\boxed{c}$ となる。なお、年金現価は小数点以下第3位を四捨五入して求めなさい。

② x歳支給開始、年金額αを支給する連続払の$\mathring{e}_x$年確定年金があり、x歳における年金現価が年金制度Yのx歳における年金現価（小数点以下第3位を四捨五入する前）と一致した。$\mathring{e}_x$はx歳の平均余命であり、δとμは①と同じ値とするとき、αは $\boxed{d}$. $\boxed{e}$ $\boxed{f}$ $\boxed{g}$ となる。なお、αは小数点以下第4位を四捨五入して求めなさい。また、必要であれば次の諸数値を使用しなさい。

＜諸数値＞
$e^{-5} = 0.0067$、$e^{-2} = 0.1353$、$e^{-0.2} = 0.8187$、$e^{-0.12} = 0.8869$、$e^{-0.08} = 0.9231$、$e^{-0.02} = 0.9802$

（２）ある年金制度は定常状態に達しており、X年度末の積立金は F である。保険料 C および給付 B はともに年 1 回期初に支払っており、給付 B は保険料 C の 2 倍である。予定利率を 2.0%とするとき、次の①～③について、空欄 a から k までのそれぞれに当てはまる数字を解答欄にマークしなさい。なお、①および③は既約分数とし、②は小数点以下第 2 位を四捨五入して求めなさい。また、②および③について、保険料の収入現価および給付現価には将来加入が見込まれる被保険者に係る保険料の収入現価および給付現価を含むものとする。

① F を用いて C を分数で表すと、$C = \dfrac{\boxed{a}}{\boxed{b}\ \boxed{c}} F$ となる。

②X+1 年度から Y 年度までの各年度において積立金の運用利回りが予定利率を上回ったため、Y 年度末時点で積立金と保険料の収入現価の合計が給付現価の 1.2 倍となった。Y 年度末時点の積立金は Fの $\boxed{d}.\boxed{e}$ 倍である。なお、X+1 年度から Y年度まで積立金の運用利回りが予定利率を上回ること以外は計算基礎率どおり推移したものとし、その間、保険料および給付の見直しは行わなかった。

③Y+1 年度末以降の毎年度末においては、以下の条件を満たすように翌年度以降の給付の見直しを行うものとする。

＜条件＞

年度末時点の積立金と保険料の収入現価の合計が給付現価の 1.2 倍と等しくなるように翌年度以降の給付を一律改善する。

Y+1 年度以降、保険料の見直しは行わず年金財政が計算基礎率どおり推移する（積立金の運用利回りも予定利率と等しい）場合の Y+ n 年度の給付は $B \cdot \left(\dfrac{\boxed{f}\ \boxed{g}\ \boxed{h}}{\boxed{i}\ \boxed{j}\ \boxed{k}} \right)^{n-1}$ となる。

（３）中途退職者（加入中に死亡した者を含む）には「加入年数× 1」の一時金額を脱退時に支給し、定年退職者には脱退した年度の翌年度の期初から年金額1の15年保証期間付終身年金を支給する年金制度を考える。このとき、次の①、②の各問に答えなさい。なお、計算の前提は次のとおりとし、計算の際には、次の年1回期初払い確定年金現価率および基数表の数値を用いなさい。

＜計算の前提＞
・加入年齢は50歳、定年年齢は60歳
・財政方式は加入年齢方式を採用
・新規加入、保険料の払い込みは年1回期初に発生し、その順は「新規加入→保険料の払い込み」とする
・保険料の払い込みは50歳から（定年年齢）−1歳まで発生する
・年金給付は年1回期初払い
・中途退職（加入中の死亡を含む）による脱退は年1回期央、定年退職による脱退は年1回期末に発生する
・期初に（定年年齢）−1歳の被保険者は、期央の中途退職（加入中の死亡を含む）と期末の定年年齢到達により脱退する
・中途退職（加入中の死亡を含む）の給付額の算定において、加入年数は年未満切り上げとする
・予定利率は3.0%

＜年1回期初払い確定年金現価率＞

n	$\ddot{a}_{\overline{n}\rvert}$
5	4.71710
10	8.78611
15	12.29607

＜基数表＞

x	D_x	N_x	$S_x=\sum_{k=x}^{\omega} N_k$	$\bar{C}_x$	$\bar{M}_x$	$\bar{R}_x=\sum_{k=x}^{\omega} \bar{M}_k$
50	22,810.7	404,010.7	5,830,529.4	515.2	11,207.8	237,676.4
55	17,468.2	301,145.9	4,027,132.8	423.9	8,826.4	186,588.1
60	13,234.9	222,662.2	2,687,026.8	94.5	6,850.1	146,549.3
65	10,939.1	161,178.1	1,701,325.3	113.8	6,337.6	113,286.9
70	8,857.1	110,716.3	1,000,556.5	141.3	5,716.2	82,788.4
75	6,906.5	70,362.7	531,595.5	186.5	4,929.4	55,696.4
80	4,970.6	39,690.3	244,992.7	247.4	3,871.4	33,039.3

（注）本問の制度は、定年退職者のみに年金の受給権を与える制度であるため、脱退残存表に基づく基数と生命表に基づく基数を同一の基数表に収めている。

① この年金制度の標準保険料率として最も近いものを選択肢の中から1つ選びなさい。

（A）1.00　（B）1.20　（C）1.40　（D）1.60　（E）1.80
（F）2.00　（G）2.20　（H）2.40　（I）2.60　（J）2.80

② 定年年齢を60歳から65歳に引き上げ、定年退職者に支給する終身年金の保証期間を10年とする制度変更を行った。加えて、中途退職（加入中の死亡を含む）時の一時金額を一律α倍し、定年退職者の年金額を保証期間中のみ1.5（保証期間後の年金額は1）とする制度変更も同時に行った。その他の前提は①と同じとし、基数表も同じであるとする。

制度変更後の標準保険料率が①の解答として選択肢の中から選んだ率の0.7倍になった場合、αの値として最も近いものを選択肢の中から1つ選びなさい。

（A）0.75　（B）0.80　（C）0.85　（D）0.90　（E）0.95
（F）1.00　（G）1.05　（H）1.10　（I）1.15　（J）1.20

（4）開放基金方式によって財政運営を行っている年金制度を考える。財政状況に関する諸数値は次のとおりとし、特別保険料率の設定はないものとするとき、次の①～③の各問に答えなさい。

＜財政状況に関する諸数値＞

S^p	年金受給権者の給付現価	300
S^a_{FS}	在職中の被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価	850
S^a_{PS}	在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価	500
S^f	将来加入が見込まれる被保険者の給付現価	900
G^a	在職中の被保険者の給与現価	3,000
G^f	将来加入が見込まれる被保険者の給与現価	5,000
F	積立金	1,300

① 当該年金制度の標準保険料率は $\boxed{a}$. $\boxed{b}$ $\boxed{c}$ $\boxed{d}$ $\boxed{e}$ $\boxed{f}$ となる。
空欄 a から f までのそれぞれに当てはまる数字を解答欄にマークしなさい。
なお、端数処理については、小数点以下第６位を四捨五入して算定しなさい。

② 年金制度上の剰余金があるため、次の選択肢のどちらかを実施することを検討している。

選択肢Ｉ：財政方式を加入年齢方式に見直し、財政方式見直し前における剰余金は将来の不足金発生時のための準備金として温存する。

選択肢Ⅱ：財政方式を加入年齢方式に見直し、財政方式見直し前における剰余金の50%は将来の不足金発生時のための準備金として温存する。また、将来加入が見込まれる被保険者および在職中の被保険者の給付を一律α（以下「給付改善率」という。）%改善する。

選択肢Ｉを実施した場合、標準保険料率と特別保険料率（存在する場合）の合計は、選択肢Ｉ実施前の標準保険料率の20%増となる。一方で、選択肢Ⅱを実施した場合、標準保険料率と特別保険料率（存在する場合）の合計は、選択肢Ⅱ実施前の標準保険料率の60%増となる。
なお、特別保険料率は選択肢Ｉ・Ⅱともに償却年数の等しい元利均等償却方式によって算定（年1回期末払いn年確定年金現価率を用いて算定）するものとする。

選択肢Ｉを実施した場合における、責任準備金は $\boxed{g}$ $\boxed{h}$ $\boxed{i}$ $\boxed{j}$ となる。空欄 g から j までのそれぞれに当てはまる数字を解答欄にマークしなさい。計算結果が100以上1,000未満となった場合は g に 0 をマークしなさい。計算結果が10以上100未満となった場合は g および h に 0 をマークしなさい。計算結果が10未満となった場合は g 、h および i に 0 をマークしなさい。なお、端数処理については、小数点以下第１位を四捨五入して算定しなさい。

③　選択肢Ⅱを実施した場合における給付改善率αは $\boxed{k}$ $\boxed{l}$. $\boxed{m}$% となる。なお、端数処理については、％単位で小数点以下第２位を四捨五入して算定し、計算結果が10%未満となった場合は kに 0 をマークしなさい。

問題３． 定常人口にある Trowbridge モデルの年金制度において、財政方式として閉鎖型総合保険料方式を採用した場合の積立金の推移について考察する。各記号の意味は次のとおりとする。

S^p ：年金受給権者の給付現価、S^a ：在職中の被保険者の給付現価、
S^f ：将来加入が見込まれる被保険者の給付現価

G^a ：在職中の被保険者の人数現価、G^f ：将来加入が見込まれる被保険者の人数現価

${}^{C}P_n$ ：第n年度における被保険者１人あたりの保険料、${}^{C}C_n$ ：第n年度における保険料

${}^{C}F_n$ ：第n年度期初における積立金、B ：給付額、L ：被保険者数、i ：予定利率

このとき、次の①～⑳に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。ただし、⑦と⑨の解答は順不同とする。なお、解答にあたり同じ選択肢を複数回選択してもよい。（１６点）

$${}^{C}P_n = \frac{\boxed{①} - \boxed{②}}{\boxed{③}}$$

$${}^{C}C_n = {}^{C}P_n \times \boxed{④}$$

であり、

$${}^{C}F_{n+1} = \left({}^{C}F_n + {}^{C}C_n - B\right) \times (1+i)$$

$$= {}^{C}F_n \times \left(1 - \frac{\boxed{⑤}}{\boxed{⑥}}\right) \times (1+i) + \left(\frac{\boxed{⑦}}{\boxed{⑧}} \times \boxed{⑨} - B\right) \times (1+i) \quad \cdots \text{(A)}$$

となる。

次に数列$\left\{{}^{C}F_n\right\}$が$n \to \infty$のときに収束することを示すため、

$$0 < \left(1 - \frac{\boxed{⑤}}{\boxed{⑥}}\right) \times (1+i) < 1 \quad \cdots \text{(B)}$$

であることを証明する。

いま、$v = \frac{1}{1+i}$ 、$d = 1 - v$とおくと、$\boxed{④} = \left(\boxed{⑩}\right) \times d$なので、

$$\left(1 - \frac{\boxed{⑤}}{\boxed{⑥}}\right) \times (1+i) = 1 - \frac{\boxed{⑪} \times d}{\boxed{⑥}} \times (1+i) < 1$$

一方、$\boxed{⑤} < \boxed{⑥}$なので、(B)が証明され、数列$\left\{{}^{C}F_n\right\}$が$n \to \infty$のときに収束することが示された。

この極限値を${}^{C}F$とするとき、(A)において両辺$n \to \infty$とすれば、

$${}^{C}F = {}^{C}F \times \left(1 - \frac{\boxed{⑤}}{\boxed{⑥}}\right) \times (1+i) + \left(\frac{\boxed{⑦}}{\boxed{⑧}} \times \boxed{⑨} - B\right) \times (1+i) \quad \cdots \text{(C)}$$

となり、これを ${}^{C}F$について解くと、$B = \left(\boxed{⑫}\right) \times d$なので、

$${}^{C}F = \boxed{⑬} - \frac{\boxed{⑭}}{\boxed{⑮}} \times \boxed{⑯}$$

となり、$\frac{\boxed{⑭}}{\boxed{⑮}}$は、$\boxed{⑰}$における標準保険料率と一致するため、${}^{C}F$は$\boxed{⑰}$における定常状態の積立金と一致することとなる。

次に(A) − (C)を計算すると、

$${}^{C}F_{n+1} - {}^{C}F = \left({}^{C}F_n - {}^{C}F\right) \times \left(1 - \frac{\boxed{⑤}}{\boxed{⑥}}\right) \times (1+i)$$

となり、

$${}^{C}F_n - {}^{C}F = \left(\boxed{⑱} - \boxed{⑲}\right) \times \left\{\left(1 - \frac{\boxed{⑤}}{\boxed{⑥}}\right) \times (1+i)\right\}^{n-1}$$

したがって

$${}^{C}F_{n+1} - {}^{C}F_n = \left(\boxed{⑱} - \boxed{⑲}\right) \times \left\{\left(1 - \frac{\boxed{⑤}}{\boxed{⑥}}\right) \times (1+i)\right\}^{n-1} \times \left\{\left(1 - \frac{\boxed{⑤}}{\boxed{⑥}}\right) \times (1+i) - 1\right\}$$

となり、以上より数列$\{{}^{C}F_n\}$は、$\boxed{⑱} < \boxed{⑲}$のときは$\boxed{⑳}$ことがわかる。

[①～⑯、⑱、⑲の選択肢]

（A）S^p	（B）S^a	（C）S^f	（D）$S^p + S^a$
（E）$S^a + S^f$	（F）$S^p + S^a + S^f$	（G）G^a	（H）G^f
（I）$G^a + G^f$	（J）${}^{C}F_1$	（K）${}^{C}F_{n-1}$	（L）${}^{C}F_n$
（M）${}^{C}F_{n+1}$	（N）${}^{C}F$	（O）B	（P）L

［⑰の選択肢］

（A）賦課方式	（B）退職時年金現価積立方式	（C）単位積立方式
（D）加入年齢方式	（E）開放基金方式	（F）加入時積立方式
（G）完全積立方式		

[⑳の選択肢]

（A）単調増加である
（B）単調減少である
（C）単調増加、単調減少のいずれでもない

問題４． 財政方式として加入年齢方式を採用している年金制度の財政再計算および財政決算を考える。この年金制度の制度内容、計算の前提および諸数値ならびに財政再計算後の諸数値を次のとおりとするとき、次の（１）～（３）について、各問の指示に従い解答用紙の所定の欄にマークしなさい。（１６点）

＜制度内容＞

・「加入時から脱退時までの毎期初の給与の10%（以下、給与の10%を付与することを「持分付与」という）に、利息付与額を加算した額の合計額」を一時金原資とするキャッシュバランス制度

・定年退職および中途退職にかかわらず、加入期間20年未満の脱退については一時金原資を脱退時に、加入期間20年以上の脱退については年金を支給開始年齢（60歳）到達時から年１回期初払いで生死にかかわらず10年間支給する（申し出れば脱退時に一時金原資を受け取ることも可能）

・年金額は、一時金原資を給付利率2.0%の年１回期初払い10年確定年金現価率で除して得た額とする

・加入時から脱退時までの期間における利息付与額の計算に用いる利息付与率は、「国債の利回りに応じた率」と定義しているため、毎期変動する

・脱退時以後支給開始年齢到達時までの期間における利息付与額の計算に用いる利息付与率および給付利率は、2.0%で一定である

＜計算の前提および諸数値＞

・加入年齢は20歳、定年年齢は60歳

・予定利率は2.0%

・利息付与率は毎期変動するため、給付現価の計算上の見込みはすべて2.0%としている

・加入期間20年以上の被保険者が脱退したときの給付について、給付現価の計算上の見込みは当該者の75%が年金給付、25%が一時金給付を選択するものとしている

・新規加入、保険料の払い込みおよび持分付与は年１回期初に発生し、その順は「新規加入→保険料の払い込みおよび持分付与」とする

・昇給、利息付与、脱退（加入中の死亡は発生しない）・一時金給付は年１回期末に発生し、その順は「昇給→利息付与→脱退・一時金給付」とする

・年金として毎期給付される額の合計は300、一時金として毎期給付される額の合計は270（一時金給付直前の利息付与率の見込みは2.0%）とする

・$\dfrac{1}{1.02} = 0.98039$ 、$\left(\dfrac{1}{1.02}\right)^5 = 0.90573$ 、$\left(\dfrac{1}{1.02}\right)^{10} = 0.82035$

・利率2.0%の5年確定年金現価率（年１回期初払い）：4.80773
　利率2.0%の10年確定年金現価率（年１回期初払い）：9.16224

＜財政再計算後の諸数値（期初時点）＞

S^p	受給権者の給付現価	3,000
S^a_{FS}	在職中の被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価	8,000
S^a_{PS}	在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価	15,000
S^f	将来加入が見込まれる被保険者の給付現価	400
G^a	在職中の被保険者の給与現価	80,000
G^f	将来加入が見込まれる被保険者の給与現価	4,000
F	積立金	11,500
$LB1$	期末時点の被保険者の給与総額（脱退後）	8,000
$LB2$	新規加入の被保険者の給与総額（加入時）	350

（１）財政再計算後の標準保険料率は$\boxed{\text{①}}$、責任準備金は$\boxed{\text{②}}$である。財政再計算後の未積立債務を5年間で定額償却する場合の特別保険料（年払いの額）は$\boxed{\text{③}}$、5年間で元利均等償却する場合の特別保険料率（年払いの率）は$\boxed{\text{④}}$である。①～④に最も近いものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。なお、解答にあたっては次の＜特別保険料・特別保険料率の計算の前提＞を使用しなさい。記載がないものは＜計算の前提および諸数値＞に従うものとする。

＜特別保険料・特別保険料率の計算の前提＞
・財政再計算後の未積立債務が過不足なく償却されるように設定する
・元利均等償却する場合の特別保険料率は、被保険者の給与に対する一定割合として設定する
・償却期間中の被保険者の給与総額は、期末時点の被保険者の給与総額と新規加入の被保険者の給与総額の合計が変動しないものとして設定する

［①、④の選択肢］

（A）5%	（B）6%	（C）7%	（D）8%	（E）9%
（F）10%	（G）11%	（H）12%	（I）13%	（J）14%
（K）15%	（L）16%	（M）17%	（N）18%	（O）19%

［②の選択肢］

（A）13,000	（B）13,500	（C）14,000	（D）14,500	（E）15,000
（F）15,500	（G）16,000	（H）16,500	（I）17,000	（J）17,500
（K）18,000	（L）18,500	（M）19,000	（N）19,500	（O）20,000

［③の選択肢］

(A) 1,002	(B) 1,052	(C) 1,102	(D) 1,152	(E) 1,202
(F) 1,252	(G) 1,302	(H) 1,352	(I) 1,402	(J) 1,452
(K) 1,502	(L) 1,552	(M) 1,602	(N) 1,652	(O) 1,702

（2）財政再計算の翌期に次の(A)～(E)の事象がそれぞれ独立で発生した（例えば、(A)の事象が発生した場合には、(A)以外の事象については計算基礎率どおり推移したとする）場合に、翌期末時点で剰余が発生した事象は $\boxed{①}$、不足が発生した事象は $\boxed{②}$、剰余・不足の発生要因とならない事象は $\boxed{③}$ である。①～③に当てはまるものを全て選びなさい。なお、当てはまるものがない場合は(F)をマークしなさい。

(A) 特別保険料について、（1）の④の元利均等償却による方法を採用した場合に、財政再計算の翌期末において被保険者の脱退が予定よりも少なく、被保険者の給与総額の合計が増加した
(B) 加入期間20年以上の被保険者が脱退したときの給付について、＜計算の前提および諸数値＞よりも一時金給付を選択する割合が多かった
(C) 財政再計算の翌期の実際の運用利回りと利息付与率がともに2.5%であった
(D) 予定加入年齢よりも年齢の高い被保険者が新規加入した
(E) 財政再計算と同時に給付利率を毎期変動するように変更（給付現価の計算上の見込みは2.0%）した場合に、翌期の実際の給付利率が3.5%であった

（３）特別保険料について、（１）の③の定額償却による方法を採用した場合に、財政再計算の翌期に次の事象が発生した。

＜発生した事象＞

・実際の運用利回りが3.2%となった
・翌期末の被保険者（翌期初に新たに加入した被保険者を含む）において、予定よりも3.0%多く昇給した
・加入期間15年の被保険者の脱退が予定よりも多く発生した（当該予定よりも多く発生した被保険者に支給する一時金の額の合計は155）
・実際の利息付与率が2.7%となった

運用利回り、昇給、脱退および利息付与率以外は計算基礎率どおりに推移したとき、翌期末において発生した損益の種類ごとの当該損益の額および剰余・不足の状況は次の表のとおりであった。

＜表＞

発生した損益の種類	発生した損益の額	剰余・不足の状況
利差（積立金の実際の運用利回りが予定利率と異なる場合に発生する損益）	①	②
昇給差（実際の昇給状況が予定と異なる場合に発生する損益）	③	④
脱退差（実際の脱退状況が予定と異なる場合に発生する損益）	⑤	⑥
利息付与差（利息付与額を計算する実際の利息付与率が見込みの利息付与率と異なる場合に発生する損益）	⑦	⑧

（１）の③の解答の特別保険料を使用したときに、翌期末の積立金は$\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}\boxed{d}\boxed{e}$、責任準備金は$\boxed{f}\boxed{g}\boxed{h}\boxed{i}\boxed{j}$、特別保険料収入現価は$\boxed{k}\boxed{l}\boxed{m}\boxed{n}\boxed{o}$となった。表中①、③、⑤、⑦に最も近いもの、表中②、④、⑥、⑧に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、空欄 a から o までのそれぞれに当てはまる数字を解答欄にマークしなさい。なお、それぞれの金額において小数点以下第１位を四捨五入して求めることとし、1,000 以上 10,000 未満となった場合は a 、f 、k に 0 をマーク、100 以上 1,000 未満となった場合は a と b 、f と g 、k と l に 0 をマーク、10 以上 100 未満となった場合は a から c まで、f から h まで 、k から m までに 0 をマーク、10 未満となった場合は a から d まで、 f から i まで、k から n までに 0 をマークしなさい。

[①、③、⑤、⑦の選択肢]

（A） 0	（B） 10	（C） 20	（D） 30	（E） 40
（F） 50	（G） 60	（H） 70	（I） 80	（J） 90
（K） 100	（L） 110	（M） 120	（N） 130	（O） 140
（P） 150	（Q） 160	（R） 170	（S） 180	（T） 190

[②、④、⑥、⑧の選択肢]

（A） 剰余　　（B） 不足　　（C） 影響なし

以上

年金数理（解答例）

問題１.

（１）

$l_x^{(\mathrm{T})}$：残存者数、$d_x^{(\mathrm{w})}$：生存脱退数とすると、

$d_x^{(w)} = l_x^{(T)} q_x^{(w)} = 0.05 \times l_x^{(T)}$

$d_x^{(d)} = l_x^{(T)} q_x^{(d)} = 0.005 \times l_{60}^{(T)} \quad (x \geq 60)$

となる。

$l_{61}^{(T)} = l_{60}^{(T)} - d_{60}^{(w)} - d_{60}^{(d)} = \{(1-0.05) - 0.005\} \cdot l_{60}^{(T)}$

$l_{62}^{(T)} = l_{61}^{(T)} - d_{61}^{(w)} - d_{61}^{(d)} = (1-0.05) \cdot l_{61}^{(T)} - 0.005 \cdot l_{60}^{(T)} = [(1-0.05)^2 - 0.005\{1 + (1-0.05)\}] \cdot l_{60}^{(T)}$

であるから、求める最終年齢を$60 + m$とすると、

$l_{60+m}^{(T)} = [(1-0.05)^m - 0.005\{1 + (1-0.05) + \cdots (1-0.05)^{m-1}\}] \cdot l_{60}^{(T)}$

$l_{60+m}^{(T)} = 0$ であるから、

$$\left\{(1-0.05)^{\mathrm{m}} - 0.005 \frac{1-(1-0.05)^{\mathrm{m}}}{1-(1-0.05)}\right\} \cdot l_{60}^{(T)} = 0$$

$$\mathrm{m} = \frac{\log_{10} \frac{1}{11}}{\log_{10} 0.95} = 46.741 \cdots$$

したがって、求める最終年齢は、$60 + 46.741 = 106.741$

よって、解答は（**H**）

（２）l_x^{A}：年金制度 A の x 歳の被保険者数、l_x^{B}：年金制度 B の x 歳の被保険者数とすると、

年金制度 A の被保険者数は

$$\sum_{x=20}^{59} l_x^A = l_{20}^A + l_{20}^A \times \frac{59}{60} + l_{20}^A \times \frac{59}{60} \times \frac{58}{59} + \cdots + l_{20}^A \times \frac{59}{60} \times \frac{58}{59} \times \cdots \times \frac{21}{22}$$

$$= \frac{l_{20}^{\mathrm{A}}}{60}(60 + 59 + 58 + \cdots + 21) = \frac{l_{20}^{\mathrm{A}} \times 1{,}620}{60}$$

と表せる。同様にして、年金制度 B の被保険者数は

$$\sum_{x=20}^{59} l_x^{\mathrm{B}} = \frac{l_{20}^{\mathrm{B}} \times 3{,}220}{100}$$

と表せる。年金制度 A の被保険者数が年金制度 B の被保険者数の 2 倍であるため、

$$\frac{l_{20}^{\mathrm{A}} \times 1{,}620}{60} = 2 \times \frac{l_{20}^{\mathrm{B}} \times 3{,}220}{100}$$

$$\frac{l_{20}^{\mathrm{A}}}{l_{20}^{\mathrm{B}}} = 2.385 \cdots$$

よって、解答は（**E**）

（３）

全て正しい（教科書 73 ページ）

よって、解答は（**G**）

（４）定常状態における積立金をF、保険料をC、給付をB、$d=\frac{i}{1+i}$とすると、極限方程式より、

$F=(F+C-B)(1+i)$

$B-C=dF\cdots$ ①

運用利回りが j となってから t 年後の積立金を F_t 、$F_0=F$、$v'=\frac{1}{1+j}$、$d'=1-v'$とすると、

$F_{t+1}=(F_t+C-B)(1+j)$

両辺にv'^{t+1} をかけると、

$v'^{t+1}F_{t+1}=v'^tF_t+v'^t(C-B)$

$t=0,1,\cdots,n-1$ について辺々加えると、

$$\sum_{t=0}^{n-1}v'^{t+1}F_{t+1}=\sum_{t=0}^{n-1}v'^tF_t+(C-B)\sum_{t=0}^{n-1}v'^t$$

$$v'^nF_n=F+(C-B)\frac{1-v'^n}{d'}$$

これに①を代入すると、

$$v'^nF_n=F-\frac{d}{d'}(1-v'^n)F$$

両辺に $(1+j)^n$ を乗じると、

$$F_n=(1+j)^nF-\frac{d}{d'}\{(1+j)^n-1\}F$$

したがって、$F_n\geq\alpha F$ となる場合に n が満たす条件は、

$$(1+j)^nF-\frac{d}{d'}\{(1+j)^n-1\}F\geq\alpha F$$

$$(1+j)^n-\frac{d}{d'}\{(1+j)^n-1\}\geq\alpha$$

$$(1+j)^n\left(1-\frac{d}{d'}\right)\geq\alpha-\frac{d}{d'}$$

$$(1+j)^n\geq\frac{\alpha-\frac{d}{d'}}{1-\frac{d}{d'}}$$

$$n\geq\log\left(\frac{\alpha\ -\ \frac{i}{1+i}\,\frac{1+j}{j}}{1\ -\ \frac{i}{1+i}\,\frac{1+j}{j}}\right)/\log(1+j)$$

よって、解答は（**J**）

（5）

${}^{A}P = \dfrac{S_{FS}^{a}}{G^{a}}$であることから、$S_{FS}^{a} = {}^{A}P \cdot G^{a}$

条件より ${}^{E}P = \dfrac{b}{a} \cdot {}^{A}P$　であるから、$S^{f} = \dfrac{b}{a} \cdot {}^{A}P \cdot G^{f}$

${}^{OAN}P = \dfrac{S_{FS}^{a}+S^{f}}{G^{a}+G^{f}} = \dfrac{c}{a} \cdot {}^{A}P$より、$\dfrac{G^{f}}{G^{a}} = \dfrac{a-c}{c-b}$

よって、解答は(D)

（6）

第1年度期初の未積立債務をU_1、予定利率引下げ前の年金現価率を$\ddot{a}_{\overline{n}|}$とすると、特別保険料Xは、

$$X = \frac{U_1}{\ddot{a}_{\overline{10}|}}$$

となる。予定利率引下げ後の年金現価率を$\ddot{a}_{\overline{n}|}'$とすると、特別保険料$Y$は、

$$Y = \left(2 \times U_1 - \frac{U_1}{\ddot{a}_{\overline{10}|}} \times \ddot{a}_{\overline{5}|}'\right) \times \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{10}|}'}$$

となる。したがって、$X+Y$は、

$$\begin{aligned} X+Y &= \frac{U_1}{\ddot{a}_{\overline{10}|}} + \left(2 \times U_1 - \frac{U_1}{\ddot{a}_{\overline{10}|}} \times \ddot{a}_{\overline{5}|}'\right) \times \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{10}|}'} \\ &= U_1 \times \left\{\frac{1}{8.97087} + \left(2 - \frac{4.85439}{8.97087}\right) \times \frac{1}{9.36052}\right\} \\ &= U_1 \times 0.267325 \cdots \end{aligned}$$

よって解答は、$a = 2$、$b = 7$

（7）

まず、制度変更前の被保険者 1 人あたりの保険料を算定する。

$l_x^{(T)}$をx歳の被保険者数とすると各年齢において10人ずつ脱退していくため、各年齢の被保険者数は、

$l_{20}^{(T)} = 1{,}000$、$l_{21}^{(T)} = 990$、$\cdots$、$l_{60}^{(T)} = 600$

となる。

一時金額は被保険者1人あたり「$\left(\text{期初の年齢} - 20\right) \times 1{,}000$」で計算されるため、40歳以上60歳未満の中途脱退者に対して$(20{,}000 + 21{,}000 + \cdots + 39{,}000) \times 10 = 5{,}900{,}000$が期央に、60歳の定年退職者に対して$40{,}000 \times 600 = 24{,}000{,}000$が期末に支払われる。
一方、保険料を負担する人数は$l_{20}^{(T)} + l_{21}^{(T)} + \cdots + l_{59}^{(T)} = 32{,}200$人であることから制度変更前の被保険者 1 人あたりの保険料は、

$$\left\{5{,}900{,}000 \times \left(\frac{1}{1.025}\right)^{\frac{1}{2}} + 24{,}000{,}000 \times \frac{1}{1.025}\right\} \div 32{,}200 = 908.14\cdots$$

となる。
次に制度変更後の被保険者 1 人あたりの保険料を算定する。
l_xをx歳の受給者数とすると、各年齢において20人ずつ死亡し90歳が最終年齢となるため、各年齢の受給者数は、
$l_{60} = 600$、$l_{61} = 580$、…、$l_{89} = 20$

となる。
このことから、制度変更後は毎年$K \times (600 + 580 + \cdots + 20) = 9{,}300K$が期末に年金として支払われることになる。
題意より、制度変更後の被保険者 1 人あたりの保険料が制度変更前の被保険者 1 人あたりの保険料が等しくなることから以下の方程式が成り立つ。

$$\left\{5{,}900{,}000 \times \left(\frac{1}{1.025}\right)^{\frac{1}{2}} + 9{,}300K \times \frac{1}{1.025}\right\} \div 32{,}200 = 908.14\cdots$$

これを解くと、$K = 2{,}580.64\cdots$となる。
よって、解答は（I）

（8）
記号の定義を次のとおりとする。
i：予定利率
l_x：x歳の被保険者数
d_x：x歳の脱退者数
b_x：x歳の給与指数
P：給与1あたりの標準保険料率
V_k：55歳加入、給与1に対する第 k 年度末の責任準備金

制度発足から第 2 年度末まで計算基礎率通り推移することから、ファクラーの公式を用いてV_1およびV_2を算定すると、

$$V_1 = \frac{b_{55}}{b_{56}} \times \frac{l_{55}}{l_{56}} \left\{ (1+i) \times (V_0 + P) - \frac{d_{55}}{l_{55}} \times 1 \right\} = 0.9682 \cdots$$

$$V_2 = \frac{b_{56}}{b_{57}} \times \frac{l_{56}}{l_{57}} \left\{ (1+i) \times (V_1 + P) - \frac{d_{56}}{l_{56}} \times 2 \right\} = 1.9067 \cdots$$

となる。

また、第２年度末における給与総額はそれぞれ次のとおりとなる。
第１年度期初に加入した被保険者の第２年度末の給与総額は、

$$100 \times 100{,}000 \times \frac{l_{57}}{l_{55}} \times \frac{b_{57}}{b_{55}} = 8{,}800{,}000$$

第２年度期初に加入した被保険者の第２年度末の給与総額は、

$$80 \times 95{,}000 \times \frac{l_{56}}{l_{55}} \times \frac{b_{56}}{b_{55}} = 7{,}182{,}000$$

以上から第２年度末における責任準備金の合計は、

$$0.9682 \cdots \times 7{,}182{,}000 + 1.9067 \cdots \times 8{,}800{,}000 = 23{,}733{,}000$$

よって、解答は（H）

問題２.

（１）

①

年金制度Yのx歳における年金現価は、

$$\int_0^\infty v^t \cdot \ {}_tP_x dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot e^{-\mu t} dt = \frac{1}{\delta + \mu} = 8.333 \cdots$$

となる。よって解答は、$a = 8$、$b = 3$、$c = 3$

②

年金額αを支給する連続払の$\mathring{e}_x$年確定年金のx歳における年金現価が、年金制度Yのx歳における年金現価と一致することから、

$$\alpha \int_0^{\mathring{e}_x} v^t dt = \frac{\alpha}{\delta}\left(1 - e^{-\delta \mathring{e}_x}\right) = \frac{\alpha}{\delta}\left(1 - e^{-\frac{\delta}{\mu}}\right) = \frac{1}{\delta + \mu}$$

となる。従って、年金額αは、

$$\alpha = \frac{\delta}{\delta+\mu} \times \frac{1}{1-e^{-\frac{\delta}{\mu}}} = \frac{0.02}{0.12} \times \frac{1}{1-0.8187} = 0.91928\cdots$$

となる。よって解答は、$d=0$、$e=9$、$f=1$、$g=9$

（２）

①

定常状態においては毎年度の給付、保険料および積立金は一定となるから、

$F=(F+C-B)\times 1.02$

が成り立つ。また、給付 B は保険料 C の 2 倍であるため、

$B=2C$ が成り立つ。

上記 2 式を整理すると、

$C=\frac{1}{51}F$、　$B=\frac{2}{51}F$

よって、解答は $a=1$ 、$b=5$ 、$c=1$

②

$d=\frac{0.02}{1.02}$ とすると、保険料の収入現価 PG および給付現価 S は B および C を用いて、

$PG=\frac{C}{d}$　、$S=\frac{B}{d}$

と表せる。

Y 年度末時点で、積立金と保険料の収入現価の合計が給付現価の 1.2 倍であるため、

Y 年度末時点の積立金を F' とすると、

$F'+PG=1.2S$

$$F'+\frac{C}{d}=1.2\times\frac{B}{d}$$

$dF'+C=1.2B$

ここで、$d=\frac{0.02}{1.02}$　および、①の $C=\frac{1}{51}F$ 、$B=\frac{2}{51}F$ を用いると、

$F'=1.4F$

よって、解答は $d=1$ 、$e=4$

③

$Y+n$ 年度末時点の積立金を F_n 、$Y+n$ 年度の給付を B_n とすると、

$Y+1$ 年度以降、年金財政が計算基礎率どおり推移することから、

$F_{n+1}=(F_n+C-B_{n+1})\times 1.02$

$F_{n+1} = 1.02F_n + 1.02C - 1.02B_{n+1}$ ・・・(ⅰ)

が成り立つ。給付の見直しの条件より、

$F_n + \frac{C}{d} = 1.2 \times \frac{B_{n+1}}{d}$

ここで、$d = \frac{0.02}{1.02}$ を用いると

$F_n + 51C = 61.2\, B_{n+1}$ ・・・(ⅱ)

(ⅰ)および(ⅱ)から F_n、 F_{n+1} を消し、 B_{n+1} と B_n の関係式を表すと、

$B_{n+1} = \frac{301}{300} B_n$ となり、 $B_n = B \cdot (\frac{301}{300})^{n-1}$

よって、解答は $f = 3$ 、$g = 0$、$h = 1$、$i = 3$、$j = 0$、$k = 0$

（３）

①

求める標準保険料率は、

$$\frac{\bar{C}_{50} + 2\bar{C}_{51} + \cdots + 10\bar{C}_{59} + \ddot{a}_{\overline{15}|}D_{60} + N_{75}}{N_{50} - N_{60}}$$

$$= \frac{\bar{M}_{50} - \bar{M}_{60} + \cdots + \bar{M}_{59} - \bar{M}_{60} + \ddot{a}_{\overline{15}|}D_{60} + N_{75}}{N_{50} - N_{60}}$$

$$= \frac{\bar{R}_{50} - \bar{R}_{60} - 10\bar{M}_{60} + \ddot{a}_{\overline{15}|}D_{60} + N_{75}}{N_{50} - N_{60}}$$

$$= \frac{237{,}676.4 - 146{,}549.3 - 10 \times 6{,}850.1 + 12.29607 \times 13{,}234.9 + 70{,}362.7}{404{,}010.7 - 222{,}662.2}$$

$$= \frac{255{,}726.056843}{181{,}348.5} = 1.41013\cdots$$

となる。よって解答は、**（C）**

②

標準保険料率は、

$$\frac{\alpha(\bar{C}_{50} + 2\bar{C}_{51} + \cdots + 15\bar{C}_{64}) + 1.5 \times \ddot{a}_{\overline{10}|}D_{65} + N_{75}}{N_{50} - N_{65}}$$

$$= \frac{\alpha(\bar{R}_{50} - \bar{R}_{65} - 15\bar{M}_{65}) + 1.5 \times \ddot{a}_{\overline{10}|}D_{65} + N_{75}}{N_{50} - N_{65}}$$

$$= \frac{\alpha(237{,}676.4 - 113{,}286.9 - 15 \times 6{,}337.6) + 1.5 \times 8.78611 \times 10{,}939.1 + 70{,}362.7}{404{,}010.7 - 161{,}178.1}$$

$$= \frac{\alpha \times 29{,}325.5 + 214{,}530.903851}{242{,}832.6}$$

標準保険料率が①の選択肢の数値（1.40）の0.7倍と等しくなることから、

$\alpha = 0.79947 \cdots$

となる。よって解答は、**（B）**

（4）

① 開放基金方式における標準保険料率は、

$$\frac{S_{FS}^{a} + S^{f}}{G^{a} + G^{f}} = 0.21875$$

よって、解答は$a = 0$、$b = 2$、$c = 1$、$d = 8$、$e = 7$、$f = 5$

② 在職中の被保険者の給付現価をS^{a}とすると、選択肢Ｉを実施した場合における責任準備金は、

$$S^{p} + S^{a} - \frac{S^{f}}{G^{f}} \cdot G^{a} = 1{,}110$$

よって、解答は$g = 1$、$h = 1$、$i = 1$、$j = 0$

③ 開放基金方式における責任準備金は、

$$S^{p} + S^{a} + S^{f} - \frac{S_{FS}^{a} + S^{f}}{G^{a} + G^{f}} \cdot \left(G^{a} + G^{f}\right) = 800$$

よって、開放基金方式における剰余金は、$F - 800 = 500$ となる。
選択肢Ｉを実施した場合の特別保険料率は、保険料率合計が選択肢Ｉ実施前の標準保険料率の1.2倍であることから、

$$0.21875 \times 1.2 - \frac{S^{f}}{G^{f}} = 0.0825$$

被保険者の給与総額をLB、特別保険料の償却年数に対応する年1回期末払いn年確定年金現価率を$a_{\overline{n|}}$とすると、

$\frac{1{,}110 + 500 - 1{,}300}{LB \times a_{\overline{n|}}} = 0.0825$が成り立つから、$LB \times a_{\overline{n|}} = 3757.5757 \cdots$ となる。

選択肢Ⅱにおける標準保険料率をAとすると、選択肢Ｉにおける標準保険料率が0.18であるから、

$$A = 0.18 \times \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)$$

特別保険料率をBとすると、

$$B = \frac{300 + \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)(500 + 850) - (F + A \times 3{,}000 - 500 \times 0.5)}{LB \times a_{\overline{n|}}}$$

選択肢Ⅱを実施した場合の保険料率合計は、選択肢Ⅱ実施前の標準保険料率の1.6倍だから、

$A+B=0.21875\times 1.6$

$\alpha=38.93\cdots$

よって、解答は$k=3$、$l=8$、$m=9$

問題３.

$${}^{C}P_n=\frac{S^p+S^a-{}^{C}F_n}{G^a}$$

$${}^{C}C_n={}^{C}P_n\times L$$

であり、

$${}^{C}F_{n+1}=\left({}^{C}F_n+{}^{C}C_n-B\right)\times(1+i)$$

$$=\left({}^{C}F_n+{}^{C}P_nL-B\right)\times(1+i)$$

$$=\left({}^{C}F_n+\frac{S^p+S^a-{}^{C}F_n}{G^a}L-B\right)\times(1+i)$$

$$={}^{C}F_n\times\left(1-\frac{L}{G^a}\right)\times(1+i)+\left(\frac{S^p+S^a}{G^a}\times L-B\right)\times(1+i)\ \cdots\text{(A)}$$

ここで、数列$\left\{{}^{C}F_n\right\}$が$n\to\infty$のときに収束することを示すため、

$$0<\left(1-\frac{L}{G^a}\right)\times(1+i)<1\ \cdots\text{(B)}$$

であることを証明する。

いま、$v=\frac{1}{1+i}$、$d=1-v$とおくと、

$L=(G^a+G^f)\times d$なので、

$$\left(1-\frac{L}{G^a}\right)\times(1+i)=\left(1-\frac{\left(G^a+G^f\right)\times d}{G^a}\right)\times(1+i)$$

$$=(1-d)\times(1+i)-\frac{G^f\times d}{G^a}\times(1+i)$$

$$=1-\frac{G^f\times d}{G^a}\times(1+i)<1$$

一方、$L<G^a$なので、$0<\left(1-\frac{L}{G^a}\right)\times(1+i)<1$であり、数列$\left\{{}^{C}F_n\right\}$が$n\to\infty$のときに収束することが示された。この極限値を${}^{C}F$とするとき、(A) において両辺$n\to\infty$とすれば、

$${}^{C}F={}^{C}F\times\left(1-\frac{L}{G^a}\right)\times(1+i)+\left(\frac{S^p+S^a}{G^a}\times L-B\right)\times(1+i)\ \cdots\text{(C)}$$

となる。これを${}^{C}F$について解くと、$B=\left(S^p+S^a+S^f\right)\times d$なので、

$${}^{C}F=S^p+S^a-\frac{S^f}{G^f}\times G^a$$

となり、$\dfrac{S^f}{G^f}$は加入年齢方式の標準保険料率と一致するため、${}^{C}F$は加入年齢方式における定常状態の積立金と一致する。

次に(A) − (C)について

$$ {}^{C}F_{n+1} - {}^{C}F = \left({}^{C}F_n - {}^{C}F \right) \times \left(1 - \frac{L}{G^a}\right) \times (1+i) $$

$$ {}^{C}F_n = \left({}^{C}F_1 - {}^{C}F \right) \times \left\{\left(1 - \frac{L}{G^a}\right) \times (1+i)\right\}^{n-1} + {}^{C}F $$

したがって

$$ {}^{C}F_{n+1} - {}^{C}F_n = \left({}^{C}F_1 - {}^{C}F \right) \times \left\{\left(1 - \frac{L}{G^a}\right) \times (1+i)\right\}^{n-1} \times \left\{\left(1 - \frac{L}{G^a}\right) \times (1+i) - 1\right\} $$

したがって（B）より、数列$\{ {}^{C}F_n \}$は、${}^{C}F_1 < {}^{C}F$のときは単調増加であることがわかる。

よって解答は、
①（D）②（L）③（G）④（P）⑤（P）⑥（G）⑦（D）⑧（G）⑨（P）⑩（I）⑪（H）
⑫（F）⑬（D）⑭（C）⑮（H）⑯（G）⑰（D）⑱（J）⑲（N）⑳（A）

問題４.

（１）

①標準保険料率　$\dfrac{400}{4{,}000} = 10\%$

②責任準備金　$3{,}000 + 8{,}000 + 15{,}000 - 80{,}000 \times 10\% = 18{,}000$

③未積立債務　$18{,}000 - 11{,}500 = 6{,}500$

特別保険料　$\dfrac{6{,}500}{4.80773} = 1{,}351.99 \fallingdotseq 1{,}352$

④特別保険料率　$\dfrac{6{,}500}{4.80773 \times (8{,}000 + 350)} = 16.19\% \fallingdotseq 16\%$

よって、解答は ①（F）、②（K）、③（H）、④（L）

（２）

①（A）　②（C）、（E）　③（B）、（D）

（３）

①利差

$\{11{,}500+(8{,}000+350)\times 10\%+1{,}352-300\}\times(3.2\%-2.0\%)=160.644\fallingdotseq 160$　…　②剰余

③昇給差

実際の昇給状況が予定と相異しても、持分付与と標準保険料は同額、すなわち給与の10%が責任準備金および積立金にそれぞれ加算されるため、昇給差は発生しない　→0　…　④影響なし

⑤脱退差

脱退者に対する給付額は一時金原資そのものであり、この額が責任準備金および積立金の両方から控除されるため、脱退差は発生しない　→0　…　⑥影響なし

⑦利息付与差

$\{15{,}000+(8{,}000+350)\times 10\%\}\times(2.7\%-2.0\%)=110.845\fallingdotseq 110$　…　⑧不足

翌期末の積立金

$$\{11{,}500+(8{,}000+350)\times 10\%+1{,}352-300\}\times 1.032-\left(270\times\frac{1.027}{1.02}+155\right)=13{,}388.531$$

$$\fallingdotseq 13{,}389$$

翌期末の責任準備金

$$(3{,}000-300)\times 1.02+\{15{,}000+(8{,}000+350)\times 10\%\}\times 1.027-\left(270\times\frac{1.027}{1.02}+155\right)=18{,}589.692$$

$$\fallingdotseq 18{,}590$$

翌期末の特別保険料収入現価

$(6{,}500-1{,}352)\times 1.02=5{,}250.96\fallingdotseq 5{,}251$

よって、解答は ①（Q）、②（A）、③（A）、④（C）、⑤（A）、⑥（C）、⑦（L）、⑧（B）、 $a=1$、$b=3$、$c=3$、$d=8$、$e=9$、$f=1$、$g=8$、$h=5$、$i=9$、$j=0$、$k=0$、$l=5$、$m=2$、$n=5$、$o=1$

以上

問題番号			正答	配点
問題１．（４０点）	（１）		（H）	５点
	（２）		（E）	５点
	（３）		（G）	５点
	（４）		（J）	５点
	（５）		（D）	５点
	（６）	ab	27	完答で５点
	（７）		（I）	５点
	（８）		（H）	５点
問題２．（２８点）	（１）	①abc	833	完答で２点
		②$defg$	0919	完答で５点
	（２）	①abc	151	完答で１点
		②de	14	完答で１点
		③$fghijk$	301300	完答で５点
	（３）	①	（C）	２点
		②	（B）	５点
	（４）	①$abcdef$	021875	完答で１点
		②$ghij$	1110	完答で１点
		③klm	389	完答で５点
問題３．（１６点）		①	（D）	完答で３点
		②	（L）	
		③	（G）	
		④	（P）	
		⑤	（P）	
		⑥	（G）	
		⑦	（D）	
		⑧	（G）	
		⑨	（P）	
		⑩	（I）	１点
		⑪	（H）	１点
		⑫	（F）	１点
		⑬	（D）	完答で４点
		⑭	（C）	
		⑮	（H）	
		⑯	（G）	
		⑰	（D）	１点
		⑱	（J）	完答で２点

		⑲	（Ｎ）	
		⑳	（Ａ）	３点
問題４. （１６点）	（１）	①	（Ｆ）	１点
		②	（Ｋ）	１点
		③	（Ｈ）	１点
		④	（Ｌ）	１点
	（２）	①	（Ａ）	１点
		②	（Ｃ）、（Ｅ）	完答で１点
		③	（Ｂ）、（Ｄ）	完答で１点
	（３）	①	（Ｑ）	完答で１点
		②	（Ａ）	
		③	（Ａ）	完答で１点
		④	（Ｃ）	
		⑤	（Ａ）	完答で１点
		⑥	（Ｃ）	
		⑦	（Ｌ）	完答で１点
		⑧	（Ｂ）	
		$abcde$	13389	完答で２点
		$fghij$	18590	完答で２点
		$klmno$	05251	完答で１点