確率・統計・モデリング問題集

藤田岳彦*1

2007 年 7 月 11日

*1 一橋大学大学院商学研究科

目次

前書き

本問題集はテキスト「社団法人日本アクチュアリー会発行　モデリング」に準拠したモデリング（確率・統計を含む）に関する問題集である。　まず、テキストの内容をサーベイし要綱にまとめた。　その際、必要に応じて、元のテキストの補足説明を随時加えた。とくに、　第 2 章、第 3 章、第 4 章においてすべて出てくる条件付確率や条件付期待値は、近年、計量経済学の広がり、シミュレーション技術の発達、デリバティブ価格理論の構築、リスク管理の指標 (CVaR) などでますますます重要性が高まっているが、一方で　確率論の初学者たちにとって難関の一つである。よってかなり詳しい説明を第 6 章で行いそれに関する演習問題もたくさん作っておいた。また、条件付期待値は普通の確率・期待値計算においても用いると簡単化されることもよくあり、是非マスターし活用してもらいたい。以上を踏まえ、練習問題を各章の最後に列挙した。(∗) や (∗∗) を付けた問題は　計算が少し複雑なものや、解く際やや発展的な知識を必要とするものなので初見の段階では飛ばしてよい。　また、読者の便宜を図るため、最後の 2 章で確率・統計の基礎知識とそれに関する問題演習も付け加えた。各分布に従う確率変数の生成方法も第 6 章に書いた。また、死力は生保数理の範囲であるが、条件付確率、条件付期待値の応用にふさわしい話題なのでこれも第 6 章で詳しくいろいろな計算例とともに紹介し、条件付期待値の立場で諸公式を整理した。　とくにモデリングに必要な確率・統計の知識をまとめたものなので、アクチュアリー試験の数学に必要な全分野を網羅しているわけではないことにご留意されたい。　とはいっても　確率の部分やその計算についてはかなりの分を確保しているつもりで、後は読解力と応用力であろう。演習問題・練習問題は過去に一橋大学や大学院における授業（確率、基礎金融工学、金融数理）やアクチュリー試験対策ゼミで作成した問題から問題文が短いものを選んで取り入れたが　本問題集のために新しく作った問題もかなりある。また、アクチュアリー試験の過去問の類題, 別解, もしくは改題もかなり入れたが、完全には同じでないのでいちいち断らなかった。

本問題集の作成に関して、村田前事務局長、辻現事務局長、テキスト委員会の皆様、とくに山内恒人氏、事務局の鈴木知美氏、また Tex 原稿と解答作成を手伝っていただいた、一橋大学大学院藤田ゼミの川西泰裕君 (現　一橋大学大学院国際企業戦略研究科助手)、立野沙織さん、村尾健太郎君、河合紀寿 君, 田中大地君の皆様にお礼を申し上げます。

一橋大学大学院商学研究科教授
藤田岳彦
email fujita@math.hit-u.ac.jp
URL http://db.cm.hit-u.ac.jp/servlet/commerce.SelectProfile?pid=3100

第 1 章

回帰分析要綱

1.1 データの統計量

2 種類のデータの観測値 (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ が与えられたとする

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{(データの平均)}$$

$$(s_x)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2 = \bar{x^2} - (\bar{x})^2 \quad \text{(データの分散)}$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y} \quad \text{(データの共分散)}$$

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \quad \text{(データの相関係数)}$$

などがデータの性質や関係を表す基本的な量である。

- $-1 \leq r_{xy} \leq 1$
- $r_{xy} = 1 \rightleftarrows$ ある定数 a $(a > 0)$ が存在し、$y_i = ax_i + b$ (完全な正の相関)
- $r_{xy} \doteqdot 1$ の時、正の相関が強いという
- $a > 0, c > 0$ として、$r_{ax+b,cy+d} = r_{xy}$ (相関係数は　単位のとりかたによらない)

1.2 最小 2 乗法 (単回帰)

$Q = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (\alpha + \beta x_i))^2$を最小にする$\alpha = \hat{\alpha}, \beta = \hat{\beta}$ を求める

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = (-2)\sum_{i=1}^{n}(y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i)) = (-2)(\sum_{i=1}^{n} y_i - n\hat{\alpha} - \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n} x_i)$$

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial \beta} = (-2)\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i)) = (-2)(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \hat{\alpha}\sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2)$$

$\therefore$ 次の正規方程式を$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$は満たす

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{x} \\ \overline{x} & \overline{x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \overline{xy} \end{pmatrix}$$

すると、

$$\begin{pmatrix}\hat{\alpha}\\ \hat{\beta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \bar{x}\\ \bar{x} & \bar{x^2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\bar{y}\\ \overline{xy}\end{pmatrix} = \frac{1}{\overline{x^2}-(\bar{x})^2}\begin{pmatrix}\overline{x^2} & -\bar{x}\\ -\bar{x} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{y}\\ \overline{xy}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s_x)^2}\begin{pmatrix}((s_x)^2+(\bar{x})^2)\bar{y} - \bar{x}(s_{xy}+\bar{x}\bar{y})\\ s_{xy}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\bar{y} - r_{xy}\frac{s_y}{s_x}\bar{x}\\ r_{xy}\frac{s_y}{s_x}\end{pmatrix}$$

また、$\bar{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{x}$ である

$y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ を y を被説明変数 (x を説明変数) とする回帰直線という. (y を x で回帰するともいう。)

$y = (\bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}) + \hat{\beta}x \rightleftarrows y - \bar{y} = \hat{\beta}(x - \bar{x})$

$\rightleftarrows \dfrac{y-\bar{y}}{s_y} = r_{xy}\dfrac{x-\bar{x}}{s_x}$　つまり、y の標準化 $=$ 相関係数 $\times$ x の標準化

$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i$($y_i$の内挿値)

$e_i = y_i - \hat{y}_i$を残差という

すると、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i = 0, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0$ が成立

$$\begin{aligned}\text{全変動} &= \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(e_i+\hat{y}_i-\bar{y})^2\\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} e_i(\hat{y}_i-\bar{y}) + \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n} e_i^2\\ &= \text{回帰変動} + \text{残差変動}\end{aligned}$$

決定係数 $R^2 = 1 - \dfrac{\text{残差変動}}{\text{全変動}} = \dfrac{\text{回帰変動}}{\text{全変動}}$と定義すると、$0 \leq R^2 \leq 1$

この R^2 が 1 に近いほど、回帰直線がデータに良く当てはまっているとする

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 = n(s_y)^2$$

$$\text{回帰変動} = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i-(\hat{\alpha}+\hat{\beta}\bar{x}))^2 = \hat{\beta}^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{(r_{xy})^2(s_y)^2}{(s_x)^2}\times n(s_x)^2$$

より、$R^2 = (r_{xy})^2$

1.3　重回帰

データ $(x_{1i}, x_{2i}, y_i)\quad(i = 1, 2, \ldots, n)$ が与えられた時

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (\alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i}))^2 \text{ を最小にする}\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\text{は}$$

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = \frac{\partial Q}{\partial \beta_1} = \frac{\partial Q}{\partial \beta_2}\text{より}$$

正規方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{x_1} & \overline{x_2} \\ \overline{x_1} & \overline{x_1^2} & \overline{x_1 x_2} \\ \overline{x_2} & \overline{x_1 x_2} & \overline{x_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{y} \\ \overline{x_1 y} \\ \overline{x_2 y} \end{pmatrix} \text{を解いたもの}$$

*1

これは、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} \\ 1 & x_{12} & x_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

と書けることに注意する

回帰式 $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2$ は、$(\bar{x_1}, \bar{x_2}, \bar{y})$ を通る

また残差は、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i = 0, \sum_{i=1}^{n} x_{1i} e_i = 0, \sum_{i=1}^{n} x_{2i} e_i = 0$ が成立

■ダミー変数　月次で得られるデータ (x_i, y_i) から、回帰式 $y = \alpha + \beta x$ を考えるが、定数項ダミー d を取り入れる

$$\text{ここでは、}d_i = \begin{cases} 1 & \cdots \quad i = \text{上半期} \\ 0 & \cdots \quad i = \text{下半期} \end{cases}$$

とし、データ (x_i, d_i, y_i) から、回帰式 $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 d + \hat{\beta}_2 x$ を考えると、
上半期なら回帰式 $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x$、下半期なら回帰式 $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_2 x$ と、定数項のみを変えた各半期での回帰式を求めることができる

これを、係数ダミーとし
回帰式 $y = \alpha + \beta_1 x + \beta_2(dx)$ を考えることもできる。これは、データ $(x_i, d_i x_i, y_i)$ から得られる回帰式である。

1.4　非線形回帰

変数を非線形関数で変換すると良い線形回帰が得られる場合がある

*1 これを解くには 3×3 行列程度なら意外とクラーメルの公式で解くのが実践的である.

・対数線形モデル　$y = \alpha x^{\beta}$ の両辺の対数をとると、
$\log y = \log \alpha + \beta \log x$　新しい変数として、$y' = \log y, x' = \log x$ をとるとよい
・指数関数モデル　$y = \alpha e^{\beta x}$ は、$\log y = \log \alpha + \beta x$ とするとよい。
変数 y のみを、$y' = \log y$ に変える
・ロジスティック関数モデル　$y = \frac{e^{\alpha+\beta x}}{1+e^{\alpha+\beta x}}$ これは、$\frac{dy}{dx} = \beta y(1-y)$　$(0 < y < 1)$ の解
これは、$y' = \log \frac{y}{1-y}$ ととると、線形回帰モデルになる
・２項回帰モデル　発生確率 $y(0 \le y \le 1)$ が説明変数に依存して決まる回帰モデル。
これを、ある確率分布の分布関数 F を用いて、$y = F(\alpha + \beta x)$ と表すと、
$y' = F^{-1}(y)$ とおくと、$y' = \alpha + \beta x$ と線形回帰モデルとなる。
$F(x) = \Phi(x) = P(N(0,1) \le x)$ のとき、プロビットモデルという。
$F(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$(ロジスティック分布) のとき、ロジットモデルという。

1.5　確率分布の前提を用いた回帰モデルの分析

1.5.1　推定量の分布

$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ を考えて、説明変数 x_i は、確率変数でない与えられた値とする
誤差の仮定　$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ かつ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ は独立
すると、$Y_i \sim N(\alpha + \beta x_i, \sigma^2)$ で、$Y_1, Y_2, \ldots Y_i, \ldots$ は独立である
最小二乗推定量 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ を確率変数として考える

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(Y_i - \hat{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(\alpha + \beta x_i + \varepsilon_i)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} - \bar{Y}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \\
&= \beta \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})x_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \\
&= \beta + \sum_{i=1}^{n} c_i \varepsilon_i
\end{aligned}$$

$$(\because c_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \text{とおくと、} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 1)$$

すると、

$$E(\hat{\beta}) = \beta + \sum_{i=1}^{n} c_i E(\varepsilon_i) = \beta \quad (\hat{\beta}\text{は}\beta\text{の不偏推定量})$$

$$V(\hat{\beta}) = V(\beta + \sum_{i=1}^{n} c_i \varepsilon_i) = V(\sum_{i=1}^{n} c_i \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 V(\varepsilon_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\therefore \quad \hat{\beta} \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{n(s_x)^2}\right)$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\alpha + \beta x_i + \varepsilon_i) - (\beta + \sum_{i=1}^{n} c_i\varepsilon_i)\bar{x}$$
$$= \alpha + \beta\bar{x} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i - \beta\bar{x} - \sum_{i=1}^{n} c_i\varepsilon_i\bar{x} = \alpha + \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n} - c_i\bar{x})\varepsilon_i$$

すると、

$$E(\hat{\alpha}) = \alpha + \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n} - c_i\bar{x})E(\varepsilon_i) = \alpha \quad (\hat{\alpha}\text{は}\alpha\text{の不偏推定量})$$

$$V(\hat{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n} - c_i\bar{x})^2\sigma^2 = \sigma^2(\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n} - \frac{2}{n}c_i\bar{x} + c_i^2\bar{x}^2)$$

$$= \sigma^2(\frac{1}{n} + 0 + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}) = \sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2})(= \sigma^2\frac{\bar{x^2}}{ns_x^2}\text{とも書けることに注意})$$

$$\therefore \quad \hat{\alpha} \sim N\left(\alpha, \sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x})^2}{n(s_x)^2})\right)$$

$$\mathrm{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \mathrm{Cov}(\alpha + \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n} - c_i\bar{x})\varepsilon_i, \beta + \sum_{j=1}^{n} c_j\varepsilon_j)$$
$$= \mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n} - c_i\bar{x})\varepsilon_i, \sum_{j=1}^{n} c_j\varepsilon_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\frac{1}{n} - c_i\bar{x})c_j\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n} - c_i\bar{x})c_i\sigma^2 \quad (\because i \neq j\text{ のとき }\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0,\ i = j\text{ のとき }\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = V(\varepsilon_i) = \sigma^2)$$
$$= -\sigma^2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = -\frac{\sigma^2\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = -\frac{\sigma^2\bar{x}}{n(s_x)^2}$$

まとめると

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \sim N\left(\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix},\ \sigma^2\begin{pmatrix}\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n(s_x)^2} & -\frac{\bar{x}}{n(s_x)^2} \\ -\frac{\bar{x}}{n(s_x)^2} & \frac{1}{n(s_x)^2}\end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix},\ \frac{\sigma^2}{n}\begin{pmatrix}1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \bar{x^2}\end{pmatrix}^{-1}\right)\text{とすると記憶しやすい。}$$

(２次元正規分布)

■誤差項の分散　誤差項の分散 σ^2 の推定量 $\hat{\sigma^2}$ としては、$e_i = y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i)$ とし、

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n-2}(\sum_{i=1}^{n} e_i^2)\text{ が用いられる}$$

すると e_i に関する制約条件は $\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i = 0$ の２本あり、自由度が２つ減ると考え、

$$\frac{n-2}{\sigma^2}\hat{\sigma^2} \sim \chi_{n-2}^2$$

となる

1.5.2　α, β の区間推定と検定

■区間推定、検定　自由度 n の t 分布は、$t_n = \dfrac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}$、ここで、$Z \sim N(0,1), \chi_n^2$ は自由度 n のカイ 2 乗分布、に注意して、

■α の信頼区間　使う統計量は、$\hat{\alpha}$ の標準化 $\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sqrt{V(\hat{\alpha})}}$ を考え、$V(\hat{\alpha}) = \sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n(s_x)^2})$ において、　σ^2 の代わりに $\hat{\sigma^2}$ に置き換えて、

$$T = \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sqrt{\hat{\sigma^2}(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n(s_x)^2})}} = \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sqrt{\hat{\sigma^2}\frac{V(\hat{\alpha})}{\sigma^2}}} = \frac{\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sqrt{V(\hat{\alpha})}}}{\sqrt{\frac{(n-2)\frac{\hat{\sigma^2}}{\sigma^2}}{n-2}}} \sim t_{n-2}$$

より、

$$P(|t_{n-2}| \leq t_{n-2}(\varepsilon/2)) = 1-\varepsilon \quad \text{として}$$

よって、信頼度 $1-\varepsilon$ での α の信頼区間

$$\hat{\alpha} - t_{n-2}(\varepsilon/2)\sqrt{\hat{\sigma^2}(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n(s_x)^2})} \leq \alpha \leq \hat{\alpha} + t_{n-2}(\varepsilon/2)\sqrt{\hat{\sigma^2}(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n(s_x)^2})}$$

■β の信頼区間　使う統計量は、$\hat{\beta}$ の標準化 $\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{V(\hat{\beta})}}$ を考え、$V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{n(s_x)^2})$ において、　σ^2 の代わりに $\hat{\sigma^2}$ に置き換えて、

$$T = \frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma^2}}{n(s_x)^2}}} = \frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\hat{\sigma^2}\frac{V(\hat{\beta})}{\sigma^2}}} = \frac{\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{V(\hat{\beta})}}}{\sqrt{\frac{(n-2)\frac{\hat{\sigma^2}}{\sigma^2}}{n-2}}} \sim t_{n-2}$$

よって、信頼度 $1-\varepsilon$ での β の信頼区間

$$\hat{\beta} - t_{n-2}(\varepsilon/2)\sqrt{\frac{\hat{\sigma^2}}{n(s_x)^2}} \leq \beta \leq \hat{\beta} + t_{n-2}(\varepsilon/2)\sqrt{\frac{\hat{\sigma^2}}{n(s_x)^2}}$$

また、実際の計算では、

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \frac{1}{n-2}(\text{残差変動}) = \frac{1}{n-2}(\text{全変動} - \text{回帰変動}) = \frac{1}{n-2}(1 - \text{決定係数 } R^2)(\text{全変動})$$
$$= \frac{1}{n-2}(1-(r_{xy})^2)(n(s_y)^2) \quad \text{で計算すると良い。}$$

■検定　次の手順で有意水準 ε の両側検定を行うことができる。

帰無仮説 $H_0 : \beta = \beta_0$

対立仮説 $H_1 : \beta \neq \beta_0$

$H_0 : \beta = \beta_0$ のもとで、$T = \dfrac{\hat{\beta}-\beta_0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma^2}}{n(s_x)^2}}} \sim t_{n-2}$

$P(|t_{n-2}| > t_{n-2}(\varepsilon/2)) = \varepsilon$ となる t_{n-2} の両側 ε 点 (上側 $\varepsilon/2$ 点)$t_{n-2}(\varepsilon/2)$ を求め、

$|t| > t_{n-2}(\varepsilon/2)$ なら H_0を棄却

$|t| \leq t_{n-2}(\varepsilon/2)$ なら H_0を採択

片側検定も同様

1.5.3　点予測、区間予測

■点予測, 区間予測　説明変数 x_{n+1} が与えられたときの、Y_{n+1} の予測量 $\hat{Y}_{n+1}$ は、$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ を用いて、$\hat{Y}_{n+1} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_{n+1}$ となり、これは正規分布に従う。
予測誤差 $Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1} = \varepsilon_{n+1} - (\hat{\beta} - \beta)x_{n+1} - (\hat{\alpha} - \alpha)$

すると、$E(Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}) = E(\varepsilon_{n+1}) - x_{n+1}E(\hat{\beta} - \beta) - E(\hat{\alpha} - \alpha) = 0$

$$\begin{aligned}
V(Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}) &= V(\varepsilon_{n+1} - (\hat{\beta} - \beta)x_{n+1} - (\hat{\alpha} - \alpha)) \\
&= V(\varepsilon_{n+1}) + V(x_{n+1}(\hat{\beta} - \beta) + (\hat{\alpha} - \alpha)) \quad (\because \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \text{は} \varepsilon_{n+1} \text{と独立}) \\
&= \sigma^2 + x_{n+1}^2 V(\hat{\beta} - \beta) + 2x_{n+1}\mathrm{Cov}(\hat{\beta} - \beta, \hat{\alpha} - \alpha) + V(\hat{\alpha} - \alpha) \\
&= \sigma^2 + x_{n+1}^2 \frac{\sigma^2}{n(s_x)^2} + 2x_{n+1}\frac{-\bar{x}\sigma^2}{n(s_x)^2} + \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n(s_x)^2}\right) \\
&= \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{n(s_x)^2}\right)
\end{aligned}$$

つまり、予測誤差 $Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1} \sim N\left(0, \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{n(s_x)^2}\right)\right)$　(ただし、σ^2が既知のとき)

σ^2 が未知のときは、

$$\frac{\frac{Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}}{\sqrt{V(Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1})}}}{\sqrt{\frac{(n-2)\frac{\hat{\sigma^2}}{\sigma^2}}{n-2}}} = \frac{Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}}{\sqrt{\hat{\sigma^2}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{n(s_x)^2}\right)}}$$

つまり、信頼度 $1 - \varepsilon$ の Y_{n+1} の信頼区間は

$$\hat{Y}_{n+1} - t_{n-2}(\varepsilon/2)\sqrt{\hat{\sigma^2}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{n(s_x)^2}\right)} \leq Y_{n+1} \leq \hat{Y}_{n+1} + t_{n-2}(\varepsilon/2)\sqrt{\hat{\sigma^2}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{n(s_x)^2}\right)}$$

1.6　第 1 章の練習問題

■練習問題 1.1　次の各場合に、$\bar{x}, \bar{y}, (s_x)^2, (s_y)^2, s_{xy}$ を求めよ．また、(3) については r_{xy} も求めよ。

(1)　$(x_i, y_i) = (1, i)$　　(2)　$(x_i, y_i) = (1, i^2)$

(3)$^{(*)}$　$(x_i, y_i) = (i, i^2)$　　(4)　$(x_i, y_i) = (2^i, 3^i)$

■練習問題 1.2　電卓を用いて、$\bar{x}, \bar{y}, (s_x)^2, (s_y)^2, s_{xy}, r_{xy}$ を求めよ。また、y を x で回帰したときの回帰直線、、x を y で回帰したときの回帰直線をそれぞれ求めよ。

(1)　$(x_i, y_i) = (i, \sqrt{i})$　　$(i = 1, 2, \ldots 5)$

(2)　$(x_i, y_i) = (i^2, \sqrt{i})$　　$(i = 1, 2, \ldots, 6)$

■練習問題 1.3　$(x_i, y_i) = (i, i^2)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ のとき、y を x について線形回帰する
このとき、$\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} e_i^2,$ 全変動 $\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2,$ 決定係数 R^2 をそれぞれ求めよ

■練習問題 1.4　データが 5 個 $(x_1, y_1), \ldots, (x_5, y_5)$ 与えられている。
ここで、$\sum x = 3, \sum y = 5, \sum xy = 13, \sum x^2 = 10, \sum y^2 = 20$ であった。
y を x で線形回帰する時、$\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \sum e_i, \sum x_i e_i, \sum e_i^2,$ 全変動 $\sum (y_i - \bar{y_i})^2,$ 決定係数 R^2 をそれぞれ求めよ

■練習問題 1.5　データが 5 個 $(x_{11}, x_{21}, y_1), \ldots, (x_{15}, x_{25}, y_5)$ 与えられている。
ここで、$\sum x_1 = 3, \sum x_2 = 2, \sum y = 5, \sum x_1 x_2 = 4, \sum x_1 y = 13,$
$\sum x_2 y = 8, \sum (x_1)^2 = 10, \sum (x_2)^2 = 15, \sum y^2 = 20$ であった。
y を x_1, x_2 で線形回帰する時、$\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ の満たす方程式を求めよ

■練習問題 1.6　練習問題 1.4 で、誤差項 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \sim N(0, \sigma^2)$ で$\sigma^2 = 3$ と既知の場合、$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の分布を α, β を用いてあらわせ。また、$\hat{\sigma^2}$ の分布はどうなるか？

■練習問題 1.7　練習問題 1.4 で、誤差項 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \sim N(0, \sigma^2)$ でσ^2 が未知の場合、α, β を推定する推定量をそれぞれ求めよ

■練習問題 1.8　以下の手順で、$\hat{\sigma^2}$ が σ^2 の不偏推定量であることを示せ

(1) $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \hat{\alpha} - \alpha)$ を求めよ
(2) $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \hat{\beta} - \beta)$ を求めよ
(3) $\mathrm{Cov}(\hat{\alpha} - \alpha, \hat{\beta} - \beta)$ を求めよ
(4) $V(e_i) = V(\varepsilon_i - (\hat{\alpha} - \alpha) - (\hat{\beta} - \beta)x_i)$ を求めよ
(5) $\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} e_i^2$ が σ^2 の不偏推定量であることを示せ

■練習問題 1.9　ある授業での中間試験 x と期末試験の結果 y は (x, y) の順番で、10 名が両方とも受験し、$(25, 35), (60, 72), (80, 80), (85, 92), (64, 40), (72, 46), (34, 52), (46, 56), (96, 88), (72, 86)$ であった。期末試験の成績 y を中間試験の成績 x で説明する。
(1) $\bar{x}, \bar{y}, s_x, s_y, s_{xy}, r_{xy}$ を計算せよ。

(2)y を x で線形回帰せよ。(被説明変数 y の説明変数 x に関する線形回帰式 $y=\alpha+\beta x$ を求めよ。)
(3) 全変動 R^2, 残差変動、回帰変動　を求めよ。
(4) 誤差確率変数 $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ とするとき、信頼度 90% での α, β, σ^2 の信頼区間をそれぞれ求めよ。
(5) 対立仮説 H_1: $\beta>0$ に対して　帰無仮説 H_0: $\beta=0$ を立てる。有意水準 1% でこの検定を行え。
(6) このデータの前半 5 人は留学生、後半 5 人は日本人学生であった。適当な定数項ダミー d を入れることにより、回帰式 $y=\alpha+\beta_1 d+\beta_2 x$ の回帰係数の満たす方程式を求めよ。
(7) このクラスではもう 1 名受講者がいたが、都合で期末試験は受けられなかった。中間試験の結果は 50 点であった。　彼の期末試験予測点数を求めよ。また、信頼度 90% での信頼区間を求めよ。

■練習問題 1.10　$\frac{\hat{\sigma^2}}{\sigma^2} \sim \frac{\chi^2_{n-2}}{n-2}$ を用いて、σ^2 の信頼度 ε の信頼区間を求めよ。

■練習問題 1.11　n 個のデータより、y を x で　回帰した時の回帰直線は　$y=1.5x+4$, x を y で回帰したときの回帰直線は　$x=y/3+1$ であった。このとき、　$\bar{x}$, $\bar{y}$, r_{xy}, s_y/s_x を求めよ。

■練習問題 1.12　4 個のデータ　$(x_i,y_i)=(2,2)$, $(4,16)$, $(6,20)$, $(8,18)$ がある。
このとき、　$\bar{x}$, s_x^2, $\bar{y}$, s_y^2, データの共分散 s_{xy}, 相関係数 r_{xy},
y を被説明変数とする線形回帰式, 決定係数 R^2 を求めよ。また、　$Y_i=\alpha+\beta x_i+\varepsilon_i$, $\varepsilon_i \sim N(0,12.5)$, $\hat{\beta}-\beta$ の分布, $\hat{\beta}$ の信頼度 95% の信頼区間を求めよ。ただし、　$P(|N(0,1)|>0.025)=1.96$ とする。

■練習問題 1.13　y を x で回帰した回帰直線は　$y=3x+a$, x を y で回帰した回帰直線は　$x=y/4+b$ であり、$(\bar{x},\bar{y})=(1,2)$ であった。
a,b,r_{xy} を求めよ。

■練習問題 1.14　10 個のデータを用いて y を x で　回帰した時の回帰直線は　$y=6x+1$, x を y で回帰したときの回帰直線は　$x=y/8+2$ であった。また、s_x^2=1 である。このとき、データ x を、$x'=2x+1$ と変換し、　y を x'　で線形回帰する。回帰直線 $y=a+bx'$ を求めよ。　$\bar{x}$, $\bar{y}$, r_{xy}, s_y^2 を求めよ。決定係数 R^2, 回帰変動 $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}(\hat{y}_i-\hat{y})^2$, 残差変動 $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}(y_i-\hat{y}_i)^2$ も求めよ。

■練習問題 1.15　5 個のデータ　$(x_i,y_i)=(-2,1)$, $(-1,2)$, $(0,0)$, $(1,-1)$, $(2,-2)$ がある。
このとき、　$\bar{x}$, s_x^2, $\bar{y}$, s_y^2, データの共分散 s_{xy}, 相関係数 r_{xy},
y を被説明変数とする線形回帰式, 決定係数 R^2,　残差変動 を求めよ。また、　$Y_i=\alpha+\beta x_i+\varepsilon_i$, $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ とするとき、$\hat{\beta}$ の信頼度 95% の信頼区間を求めよ。ただし、　$P(|t_3|>3.18)=0.025$, $P(|t_4|>2.78)=0.025$, $P(|t_5|>2.57)=0.025)$ とする。また、y を x, x^2 で説明する重回帰式、つまり、$\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(y_i-(\alpha+\beta_1 x_i+\beta_2 x_i^2))^2$ を最小にする $y=\hat{\alpha}+\hat{\beta}_1 x_1+\hat{\beta}_2 x^2$ を求めよ。

第 2 章

時系列解析要綱

2.1 時系列に現れる確率過程と用語の定義

Y_t : 確率過程

時系列解析においては、$t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ と、負の時間パラメータをとることに注意する。$t \to -\infty$ とし、過去にさかのぼるため。

■定義 Y_t が定常 (stationary) であるとは、

条件 1 $E(Y_t) = \mu$ (= 定数)

条件 2 $\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-h}) = \gamma_h$ とくに、$Cov(Y_t, Y_t) = V(Y_t) = \gamma_0 =$ 定数

■定義 $\gamma_h = Cov(Y_t, Y_{t-h})$ を時差 h の自己共分散

$\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} = \left(\frac{Cov(Y_t, Y_{t-h})}{V(Y_t)}\right) =$ を時差 h の自己相関 (コレログラム)

定常過程の典型例

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X_{t-i} \text{ここで、} X_t, X_{t-1}, \ldots \text{は独立で同分布}$$

$$\text{このとき、}\mu = E(Y_t) = m \sum_{i=0}^{\infty} a_i \quad (m = E(X_t),\ \sigma^2 = V(X_t))$$

$$\begin{aligned}
\gamma_h = Cov(Y_t, Y_{t-h}) &= Cov(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X_{t-i}, \sum_{j=0}^{\infty} a_j X_{t-h-j}) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i a_j Cov(X_{t-i}, X_{t-h-j}) \\
&= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_{h+j} a_j
\end{aligned}$$

y_t を Y_t の実現値とするとき、

■定義 2.4 $\hat{\gamma_h} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{t=h+1}^{n} (y_t - \bar{y})(y_{t-h} - \bar{y})$ を時差 h の標本自己共分散[*1]

[*1] 別の定義もあるが、通常標本数 n は大きく 時差 h はそれに比べて小さいので両者の定義に違いはないと考えられるので簡便なほうを採用した。

■**定義** 2.5　$\hat{\rho}_h = \dfrac{\hat{\gamma_h}}{\hat{\gamma_0}} \left(= \dfrac{\sum_{t=h+1}^{n}(y_t-\bar{y})(y_{t-h}-\bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(y_t-\bar{y})^2} \right)$ を時差 h の標本自己相関

2.2　AR(p) (p 次の自己回帰モデル、Auto-regressive Model)

Y_t が AR(p) に従うとは、

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

ここで、$\phi_0, \ldots, \phi_p$ は定数で、$\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots$ は独立で同分布、$E(\varepsilon_t) = 0, V(\varepsilon_t) = \sigma^2$

■**命題** 2.1　特性方程式 $\phi(x) = 1 - (\phi_1 x + \phi_2 x^2 + \cdots + \phi_p x^p) = 0$ の解の絶対値がすべて 1 より大きい時、AR(p) は定常性を持つ。
(注意　これは差分方程式 $a_{n+p} = \phi_1 a_{n+p-1} + \cdots + \phi_p a_n$ のすべての解が $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$（安定）を満たす条件と同じ)

$p = 1$, つまり、$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \epsilon_t$ の時は、定常 $\rightleftarrows$ $-1 < \phi_1 < 1$ で、$Y_t = \phi_0(1 + \phi_1 + \cdots + \phi_1^n) + \phi_1^{n+1} Y_{t-n-1} + (\varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \phi_1^n \varepsilon_{t-n})$ となるので、

このとき、$Y_t = \dfrac{\phi_0}{1-\phi_1} + \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \varepsilon_{t-i}$ と表せる.　<u>これは　$AR(1)$ の $MA(\infty)$ 表現である.</u>

[*2]

さらに、$E(Y_t) = \dfrac{\phi_0}{1-\phi_1}, \gamma_h = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{j+h} \phi_1^j \sigma^2 = \dfrac{\sigma^2 \phi_1^h}{1-\phi_1^2}$ となる

AR(p) において、$\mu = E(Y_t) = \phi_0 + \phi_1 \mu + \cdots + \phi_p \mu$ となるので、

$$Y_t - \mu = \phi_1(Y_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p(Y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t$$

これに、$Y_{t-i} - \mu$ をかけて期待値をとれば、

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \cdots + \phi_{p-1}\gamma_{p-1} + \phi_p\gamma_p + \sigma^2\\
&\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 + \phi_2\gamma_1 + \cdots + \phi_{p-1}\gamma_{p-2} + \phi_p\gamma_{p-1}\\
&\gamma_2 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_0 + \cdots + \phi_{p-1}\gamma_{p-1} + \phi_p\gamma_{p-2}\\
&\vdots\\
&\gamma_{p-1} = \phi_1\gamma_{p-2} + \phi_2\gamma_{p-3} + \cdots + \phi_{p-1}\gamma_0 + \phi_p\gamma_1\\
&\gamma_p = \phi_1\gamma_{p-1} + \phi_2\gamma_{p-2} + \cdots + \phi_{p-1}\gamma_1 + \phi_p\gamma_0\\
&\gamma_{p+1} = \phi_1\gamma_p + \phi_2\gamma_{p-1} + \cdots + \phi_{p-1}\gamma_2 + \phi_p\gamma_1\\
&\gamma_{p+t} = \phi_1\gamma_{p+t-1} + \phi_2\gamma_{p+t-2} + \cdots + \phi_{p-1}\gamma_{t+1} + \phi_p\gamma_t \quad (t \geq 0)
\end{aligned}$$

が成立する

[*2] さらにラグオペレーター $LX_t = X_{t-1}$ を用いて、$Y_t = \phi_0 + LY_t + \varepsilon_t, Y_t = (1-\phi_1 L)^{-1}(\phi_0 + \varepsilon_t)$ より、$Y_t = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}(\phi_1 L)^i(\phi_0 + \varepsilon_t) = \dfrac{\phi_0}{1-\phi_1} + \sum_{i=0}^{\infty}(\phi_1)^i \varepsilon_{t-i}$ としても良い。

逆に、$\mu, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$ の値がわかっている場合は、

$$\phi_0 = (1 - (\phi_1 + \cdots + \phi_p))\mu$$

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \ldots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \ldots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix}$$

を満たす。これをユールウォーカー方程式という。

■AR(1)　$\mu = \phi_0 + \phi_1\mu$より、$\mu = \frac{\phi_0}{1-\phi_1}$

$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \sigma^2, \gamma_1 = \phi_1\gamma_0$より

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}, \gamma_1 = \frac{\phi_1\sigma^2}{1-\phi_1^2}$$

また、$\gamma_h = \dfrac{\sigma^2\phi_1^h}{1-\phi_1^2}$, 自己相関$\rho_h = \phi_1^h$

■AR(2)　$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$

特性方程式 $\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 = 0$ のすべての解が絶対値 1 より大きい条件を求めると、

（イ）実解を持つ場合、$D = \phi_1^2 + 4\phi_2 \geq 0$

このときは、$\phi(-1) = 1 + \phi_1 - \phi_2 > 0, \phi(1) = 1 - \phi_1 - \phi_2 > 0$

（ロ）２虚解の場合、$D = \phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$

$$|\alpha|^2 = |\bar{\alpha}|^2 = \left(\frac{\phi_1}{2\phi_2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\phi_1^2 - 4\phi_2}}{-2\phi_2}\right)^2 = \frac{-1}{\phi_2} > 1 \quad \text{つまり} \quad \phi_2 > -1 \ \ (\because \phi_2 < 0)$$

以上を (イ),(ロ) をまとめると、

$AR(2)$ が定常性を持つ $\rightleftarrows 1 + \phi_1 - \phi_2 > 0 \ \cap \ 1 - \phi_1 - \phi_2 > 0 \ \cap \ \phi_2 > -1$

(とくに　必要条件として　$-1 < \phi_2 < 1$　かつ　$-2 < \phi_1 < 2$ でなければならないことを注意しておく．)

平均は、期待値をとって、$\mu = \phi_0 + \phi_1\mu + \phi_2\mu$　$\therefore\ \mu = \frac{\phi_0}{1-\phi_1-\phi_2}$

分散、自己共分散は、　$Y_t - \mu = \phi_1(Y_{t-1} - \mu) + \phi_2(Y_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t$ より、

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \sigma^2$$

$$\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 + \phi_2\gamma_1 \qquad (\gamma_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}\gamma_0)$$

$$\gamma_2 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_0 \qquad \left(\gamma_2 = (\frac{{\phi_1}^2}{1-\phi_2} + \phi_2)\gamma_0\right)$$

$n \geq 3$ のとき　$\gamma_n = \phi_1\gamma_{n-1} + \phi_2\gamma_{n-2}$　（この差分方程式 (漸化式）を解く)

$$\therefore \quad \gamma_0 = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2}\gamma_0 + \left(\frac{\phi_1^2\phi_2}{1-\phi_2} + \phi_2^2\right)\gamma_0 + \sigma^2$$

$$\therefore \quad \gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \left(\frac{\phi_1^2(1+\phi_2)}{1-\phi_2} + \phi_2^2\right)} = \frac{1-\phi_2}{1+\phi_2}\frac{\sigma^2}{(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2} \quad (> 0)$$

例えば、AR(2) は変数 y_t を被説明変数とし、その過去の値 y_{t-1}, y_{t-2} を説明変数にとった重回帰モデルと見ることができる。その意味で自己回帰モデルと呼ばれる。

すると、重回帰モデル $y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i}$ から得られる、

$$\begin{pmatrix} s_{x_1}^2 & s_{x_1x_2} \\ s_{x_1x_2} & s_{x_2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{x_1y} \\ s_{x_2y} \end{pmatrix}$$

は、AR(2) においては、

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \text{となる}$$

これより、

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \end{pmatrix} \text{として、}\phi_1, \phi_2 \text{の推定値} \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2 \text{が得られる}$$

2.3　MA(q) (q 次の移動平均モデル、Moving-average Model)

$$Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$\varepsilon_t \text{は } Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots \text{ と独立で、} E(\varepsilon_t) = 0, V(\varepsilon_t) = \sigma^2$$

明らかに、MA(q) は必ず定常性を満たす

$$\begin{aligned}
&\text{このとき、}\gamma_0 = V(Y_t) = (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2 \\
&\gamma_1 = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \mathrm{Cov}(\theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}, \theta_0 + \varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q-1}) \\
&\quad = (-\theta_1 + (-\theta_2)(-\theta_1) + \cdots + (-\theta_q)(-\theta_{q-1}))\sigma^2 = (-\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \cdots + \theta_{q-1}\theta_q)\sigma^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{同様に、}\gamma_2 = (-\theta_2 + \theta_1\theta_3 + \cdots + \theta_{q-2}\theta_q)\sigma^2 \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\qquad \gamma_q = (-\theta_q)\sigma^2 \\
&\qquad\qquad \gamma_{q+1} = \cdots = 0 \qquad (h = q + 1 \text{ 以降 } 0)
\end{aligned}$$

$$\text{自己相関}\rho_h\text{も、}\rho_0 = 1, \rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \cdots + \theta_{q-1}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2}, \dots$$

定常な AR(p) の Y_t は、$Y_t = \xi_0 + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \varepsilon_{t-i}$ と表されることより、MA(∞)

AR(p) の MA(∞) 表現を、$Y_t = \xi_0 + \varepsilon_t + \xi_1\varepsilon_{t-1} + \xi_2\varepsilon_{t-2} + \dots$ とすると、

$$\begin{aligned}
Y_t &= \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \\
&= \phi_0 + \phi_1(\xi_0 + \varepsilon_{t-1} + \xi_1\varepsilon_{t-2} + \xi_2\varepsilon_{t-3} + \dots) \\
&\qquad + \phi_2(\xi_0 + \varepsilon_{t-2} + \xi_1\varepsilon_{t-3} + \xi_2\varepsilon_{t-4} + \dots) \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad + \phi_p(\xi_0 + \varepsilon_{t-p} + \xi_1\varepsilon_{t-p-1} + \xi_2\varepsilon_{t-p-2} + \dots) + \varepsilon_t \\
&= \phi_0 + (\phi_1 + \cdots + \phi_p)\xi_0 + \varepsilon_t + \phi_1\varepsilon_{t-1} + (\phi_1\xi_1 + \phi_2)\varepsilon_{t-2} + (\phi_1\xi_2 + \phi_2\xi_1 + \phi_3)\varepsilon_{t-3} + \dots
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \xi_0 = \frac{\phi_0}{1 - (\phi_1 + \cdots + \phi_p)} \ (= \mu)$$

$$\xi_1 = \phi_1,\ \xi_2 = \phi_1\xi_1 + \phi_2,\ \xi_3 = \phi_1\xi_2 + \phi_2\xi_1 + \phi_3$$

■反転可能性 Y_t と ε_t の役割を入れ替えれば、 MA(q) が AR(∞) で表せるための条件 (反転可能性という）が次のようにわかる。(AR(q) は 定常 であることが MA(∞) であることの必要十分条件)

■命題 2.2 特性方程式 $\theta(x) = 1 - (\theta_1 x + \theta_2 x^2 + \cdots + \theta_q x^q) = 0$ の解の絶対値がすべて 1 より大きいときの時、MA(q) は反転可能

■識別可能性 平均、分散、自己共分散が与えられた時、モデルが一意に定まるならば識別可能という。AR のときはいつでも O.K.

■命題 2.3 特性方程式 $\theta(x) = 1 - (\theta_1 x + \theta_2 x^2 + \cdots + \theta_q x^q) = 0$ の解の絶対値がすべて 1 以上の時、$MA(q)$ は識別可能

■例 Y_t が MA(1), つまり、$Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$
$E(Y_t) = \mu, \gamma_0, \gamma_1$ が与えられたとき、MA(1) の 3 個のパラメータの組 $(\theta_0, \theta_1, \sigma^2)$ はどうなるか？
解 別の組 $(\delta_0, \delta_1, \omega^2)$ があったとすると、

まず、$\mu = \theta_0 \ (= \delta_0)$

$$\gamma_0 = \sigma^2(1+\theta_1^2) = \omega^2(1+\delta_1^2) \quad \text{——①}$$

$$\gamma_1 = (-\theta_1)\sigma^2 = (-\delta_1)\omega^2 \quad \text{——②}$$

①, ② より、

$$\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} = \frac{\delta_1}{1+\delta_1^2} \quad \therefore\ \theta_1(1+\delta_1^2) - \delta_1(1+\theta_1^2) = (\theta_1 - \delta_1)(1 - \theta_1\delta_1) = 0$$

$\therefore\ \delta_1 = \dfrac{1}{\theta_1}$ も別のパラメータで同じμ, γ_0, γ_1を与える。

ここで、特性方程式 $1 - \theta_1 x = 0$ の解は $x = \frac{1}{\theta_1}$ $\therefore |\frac{1}{\theta_1}| \geq 1$, すなわち $|\theta_1| \leq 1$ となる方を取ってくればよい

2.4 ARMA(p,q)

■ARMA(p,q) p=q=1 のとき、平均 0 の ARMA(1,1) モデル $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ において、$\phi_1, \theta_1, V(\varepsilon_t) = \sigma^2$ を用いて、自己相関 ρ_h $(h = 1, 2, \ldots)$ を求める

$V(Y_t - \phi_1 Y_{t-1}) = V(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})$ より、

$$\gamma_0 - 2\phi_1\gamma_1 + \phi_1^2\gamma_0 = \sigma^2 + \theta_1^2\sigma^2 = (1+\theta_1^2)\sigma^2$$

$$\begin{aligned} \text{また、}\gamma_1 &= Cov(Y_t, Y_{t+1}) \\ &= Cov(Y_t, \phi_1 Y_t + \varepsilon_{t+1} - \theta_1\varepsilon_t) = \phi_1\gamma_0 - \theta_1\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\therefore\ \gamma_0(1+\phi_1^2) - 2\phi_1(\phi_1\gamma_0 - \theta_1\sigma^2) = (1+\theta_1^2)\sigma^2 \ \text{より、}\gamma_0 = \frac{1+\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}{1-\phi_1^2}\sigma^2$$

$$\gamma_1 = \frac{(\theta_1 - \phi_1)(\phi_1\theta_1 - 1)}{1-\phi_1^2}\sigma^2 \quad \therefore\ \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(\theta_1 - \phi_1)(\phi_1\theta_1 - 1)}{1+\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}$$

また，$h \geqq 2$ に対して，

$$\begin{aligned}\gamma_h &= Cov(Y_{t+h}, Y_t) = Cov(\phi_1 Y_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h} - \theta_1 \varepsilon_{t+h-1}, Y_t) \\ &= \phi_1 \gamma_{h-1} \qquad \text{つまり、}\rho_h = \phi_1 \rho_{h-1}\end{aligned} \qquad (h \geqq 2)$$

■偏自己相関　確率過程の自己相関を ρ_1, ρ_2, ρ_3 とし、

$$\begin{array}{lll} \rho_1 = \phi_{11} & \rho_1 = \phi_{21} + \phi_{22}\rho_1 & \rho_1 = \phi_{31} + \phi_{32}\rho_1 + \phi_{33}\rho_2 \\ & \rho_2 = \phi_{21}\rho_1 + \phi_{22} & \rho_2 = \phi_{31}\rho_1 + \phi_{32} + \phi_{33}\rho_1 \quad \ldots \\ & & \rho_3 = \phi_{31}\rho_1 + \phi_{32}\rho_2 + \phi_{33} \end{array}$$

で決まる ϕ_{hh} を偏自己相関という

2.5　時系列モデルに基づく予測

■予測　一般に、Y の X による予測値として $E(Y|X)$ がとられる

(なぜなら、$E((Y - g(X))^2) = E((E(Y|X) - g(X))^2) + g$ によらない定数 が証明できるので、(例えば、ファイナンスの確率解析入門 藤田岳彦著 講談社 2002) 予測誤差を最小にするためには、予測として $E(Y|X)$ をとればよい)

■AR(p) の予測量　Y_{n+1} の予測量として、次の $\hat{Y}_{n+1}$ をとる。

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{n+1} &= E(Y_{n+1}|Y_n, Y_{n-1}, \ldots) = E(\phi_0 + \phi_1 Y_n + \cdots + \phi_p Y_{n-p+1} + \varepsilon_{n+1}|Y_n, Y_{n-1}, \ldots) \\ &= \phi_0 + \phi_1 Y_n + \cdots + \phi_p Y_{n-p+1} \qquad \leftarrow Y_{n+1}\text{の式の誤差項を } 0 \text{ としたもの}\end{aligned}$$

すると、$Y_{n+1} = \hat{Y}_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$ に注意して、

$$\begin{aligned}Y_{n+2} &= \phi_0 + \phi_1 Y_{n+1} + \phi_2 Y_n + \cdots + \phi_p Y_{n-p+2} + \varepsilon_{n+2} \\ &= \phi_0 + \phi_1(\hat{Y}_{n+1} + \varepsilon_{n+1}) + \phi_2 Y_n + \cdots + \phi_p Y_{n-p+2} + \varepsilon_{n+2}\end{aligned}$$

$$\therefore \hat{Y}_{n+2} = E(Y_{n+2}|Y_n, Y_{n-1}, \ldots) = \phi_0 + \phi_1 \hat{Y}_{n+1} + \phi_2 Y_n + \cdots + \phi_p Y_{n-p+2}$$

同様に、

$$\therefore \hat{Y}_{n+3} = E(Y_{n+3}|Y_n, Y_{n-1}, \ldots) = \phi_0 + \phi_1 \hat{Y}_{n+2} + \phi_2 \hat{Y}_{n+1} + \phi_3 Y_n + \cdots + \phi_p Y_{n-p+3}$$

■MA(q) の予測量

$$\hat{Y}_{n+h} = E(Y_{n+h}|\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \ldots) = \theta_0 + \varepsilon_{n+h} - \theta_1 \varepsilon_{n+h-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{n+h-q}$$

のうちで、$n+1$ 以降の ε_{n+1}〜ε_{n+h} をゼロにしたもの

2.6　第 2 章の練習問題

■練習問題 2.1　以下の定常過程の場合に、それぞれ γ_h, ρ_h を計算せよ。$|a| < 1$ とする。

(1)　$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^i \varepsilon_{t-i}$ で、$\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots, \varepsilon_{t-i}, \ldots$ は独立ですべての i で $\varepsilon_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

(2)　$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \varepsilon_{t-i}$ で、$\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots, \varepsilon_{t-i}, \ldots$ は独立ですべての i で $\varepsilon_i \sim Po(\lambda)$

(3)　(2) で $\varepsilon_i \sim Ge(p)$　つまり、$P(\varepsilon_i = k) = p(1-p)^k$　$(k = 0, 1, 2, \ldots)$ の場合

(4)　(2) で $\varepsilon_i \sim B(n, p)$ の場合

(5)　$Y_t = A\cos(t\lambda) + B\sin(t\lambda)$ ここで、A, B は独立で、$A \sim B \sim N(0, \sigma^2)$

(6)　$Y_t = \cos(A - Bt)$ ここで、ここで、A, B は独立で、$A \sim B \sim U(0, 2\pi)$

(7)　$^{(*)}$　$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1}(\varepsilon_{t-i} - 1)$ で、$\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots, \varepsilon_{t-i}, \ldots$ は独立ですべての i で $\varepsilon_i \sim \chi_1^2 = N(0,1)^2$

■練習問題 2.2　$y_i = i$　$(1 \leqq i \leqq n)$ について、$\hat{\gamma_1}, \hat{\rho_1}$ を計算せよ。

■練習問題 2.3　定常な $AR(1)$ モデル[*3]

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

で、　自己共分散 $\gamma_2 = 0.4, \gamma_3 = -0.1$ であった。
ϕ_1, γ_h を求めよ。

■練習問題 2.4　定常 AR(2) モデル $Y_t = 3 + \frac{5}{6}Y_{t-1} - \frac{1}{6}Y_{t-2} + \varepsilon_t, E(\varepsilon_t) = 0, V(\varepsilon_t) = \frac{10}{3}$ において、
$\mu = E(Y_t)$, 自己共分散$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_n$ $(n \geq 3)$, 自己相関ρ_1, ρ_2, ρ_n $(n \geq 3)$ を求めよ

■練習問題 2.5　定常 AR(2) モデル $Y_t = 1 + 0.6Y_{t-1} + 0.3Y_{t-2} + \varepsilon_t$ で、
(1) 定常性を示せ　(2)$\mu = E(X_t)$ を求めよ　(3)$\sigma^2 = 1$ として､$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$を求めよ

■練習問題 2.6　定常 AR(1) モデル $Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ で、
$\mu = 2.0, \gamma_0 = 0.6, \gamma_1 = 0.3$ と与えられている。$\phi_0, \phi_1, \varepsilon_t$ の分散 σ^2 を求めよ

■練習問題 2.7　定常 AR(2) モデル $Y_t = 1 + aY_{t-1} + 0.3Y_{t-2} + \varepsilon_t$ で、
定常性を持つための a の範囲を求めよ.

■練習問題 2.8　定常 AR(2) モデル $Y_t = 1 + 0.5Y_{t-1} + aY_{t-2} + \varepsilon_t$ で、
定常性を持つための a の範囲を求めよ.

■練習問題 2.9　MA(1) モデル　$Y_t = 3 + \varepsilon_t - a\varepsilon_{t-1}$ が反転可能性を持つ実数 a の範囲を求めよ。また、識別可能性を持つ実数 a の範囲を求めよ。

■練習問題 2.10　MA(2) モデル　$Y_t = 2 + \varepsilon_t - a\varepsilon_{t-1} - a\varepsilon_{t-2}$ が反転可能性を持つ実数 a の範囲を求めよ。また、識別可能性を持つ実数 a の範囲を求めよ。

[*3] 初期値 Y_0 が与えられていなければ　定常モデルである.

■**練習問題** 2.11　MA(2) モデル $Y_t = 3 + \varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} - \frac{1}{4}\varepsilon_{t-2}, E(\varepsilon_t) = 0, V(\varepsilon_t) = 1$ で $\mu = E(Y_t), \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ を求めよ。

■**練習問題** 2.12　MA(2) モデル

$$Y_t = 2 + \varepsilon_t - (1/2)\varepsilon_{t-1} - (1/2)\varepsilon_{t-2}$$

ただし、$\varepsilon_i \sim N(0, 3^2)$ とする。
このとき、自己共分散γ_0, γ_1, γ_2, γ_3 を求めよ。また、Y_t の分布、　(Y_t, Y_{t+1}) の同時分布 を求めよ。

■**練習問題** 2.13　定常 AR(2) モデル $Y_t = 1 + 0.6Y_{t-1} + 0.3Y_{t-2} + \varepsilon_t$ を MA(∞) 表現した時の ξ_0, ξ_1, ξ_2 を求めよ。($X_t = \xi_0 + \varepsilon_t + \xi_1\varepsilon_{t-1} + \xi_2\varepsilon_{t-2} + \dots$)

■**練習問題** 2.14　定常 ARMA(1,1) モデル

$$Y_t = 2 + \frac{1}{2}Y_{t-1} - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

ただし、$\varepsilon_i \sim N(0, 3^2)$ とする。
このとき，　$\mu = E(Y_t)$, $\gamma_h = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-h})$ を求めよ。

■**練習問題** 2.15　AR(1) モデル、AR(2) モデルは　マルコフ過程かどうか？

■**練習問題** 2.16　定常でない時系列モデル S_t が次の (1), (2), (3), (4), (5), (6) のいずれか一つを満たすとき、$E(S_t)$, 時点 $t-h(\ 0 \leqq h \leqq t)$ と時点 t の自己共分散 $\mathrm{Cov}(S_{t-h}, S_t)$ を各場合に求めよ。また、(1), (2), (3) については、S_t の分布、(S_t, S_{t-h}) の同時分布も各場合に求めよ。すべて、μは定数,　$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$は独立, $a \neq 1$ とする。

(1)　$S_t = S_{t-1} + \mu + \varepsilon_t, \quad S_0 = 0, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$
(2)　$S_t - 2S_{t-1} + S_{t-2} = \mu + \varepsilon_t, \quad S_0 = S_{-1} = 0, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$
(3)　$S_t = aS_{t-1} + \mu + \varepsilon_t, \quad S_0 = 0, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$
(4)　$S_t = S_{t-1} + \mu(t-1) + \varepsilon_t, \quad S_0 = 0, \quad \varepsilon_i \sim 2Be(1/2) - 1$
(5)　$S_t - 2S_{t-1} + S_{t-2} = \mu + \varepsilon_t, \quad S_0 = S_{-1} = 0, \quad \varepsilon_i \sim 2Be(1/2) - 1$
(6)　$S_t = aS_{t-1} + \mu + \varepsilon_t, \quad S_0 = 0, \quad \varepsilon_i \sim 2Be(1/2) - 1$

■**練習問題** $^{(*)}$2.17　ラグオペレーター $LX_t = X_{t-1}$ を用いて、　定常 $AR(2)$ モデル

$$Y_t = 2 + \frac{5}{6}Y_{t-1} - \frac{1}{6}Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

の $MA(\infty)$　表現を求めよ。

■**練習問題** $^{(*)}$2.18　ラグオペレーター $LX_t = X_{t-1}$ を用いて、　定常 $ARMA(1,1)$ モデル

$$Y_t = 2 + \frac{1}{3}Y_{t-1} - \frac{1}{4}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

の $MA(\infty)$　表現を求めよ。

■練習問題 2.19　定常 AR(1) モデル

$$Y_t = 2 + \frac{1}{3}Y_{t-1} + \varepsilon_t,\ (\varepsilon_i \sim N(0, \frac{1}{5}))$$

$Y_T = 2.7$ が与えられたとき、$t = T+1$ における (2 乗平均) 最良予測量 $\hat{Y}_{T+1}$ を求め 2 乗平均誤差 $E((Y_{T+1} - \hat{Y}_{T+1})^2 | Y_T = 2.7)$ を計算せよ。また、$t = T+2$ における (2 乗平均) 最良予測量 $\hat{Y}_{T+2}$ を求め 2 乗平均誤差　$E((Y_{T+2} - \hat{Y}_{T+2})^2 | Y_T = 2.7)$ を計算せよ。また、$P(|N(0,1)| \geqq 1.96) = 0.05$ として、Y_{T+1}, Y_{T+2} の信頼度 95% の信頼区間を求めよ。

■練習問題 2.20　MA(2) モデル

$$Y_t = 1 + \varepsilon_t - \frac{2}{3}\varepsilon_{t-1} - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-2} \quad \varepsilon_i \sim N(0, \frac{1}{2^2})$$

において、　$\varepsilon_{T-2} = -1/3, \varepsilon_{T-1} = 1/3, \varepsilon_T = 2/3$ が与えられたときの、$t = T+1$ における (2 乗平均) 最良予測量 $\hat{Y}_{T+1}$ を求め 2 乗平均誤差　$E((Y_{T+1} - \hat{Y}_{T+1})^2 | \varepsilon_T = 2/3, \varepsilon_{T-1} = 1/3, \varepsilon_{T-2} = -1/3)$ を計算せよ。また、$t = T+2$ における (2 乗平均) 最良予測量 $\hat{Y}_{T+2}$ を求め 2 乗平均誤差　$E((Y_{T+2} - \hat{Y}_{T+2})^2 | \varepsilon_T = 2/3, \varepsilon_{T-1} = 1/3, \varepsilon_{T-2} = -1/3)$ を計算せよ。　また、$P(|N(0,1)| \geqq 1.96) = 0.05$ として、Y_{T+1}, Y_{T+2} の信頼度 95% の信頼区間を求めよ。

■練習問題 $^{(*)}$2.21　平均 0 の定常な AR(2) モデル

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

で、自己共分散 γ_n は　$\lim_{n\to\infty} 2^n \gamma_n = 3$ を満たしており、 時差 1 の自己相関 $\rho_1 = \frac{1}{5}$ である。このとき、ϕ_1, ϕ_2, $\sigma^2, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_n$ を求めよ。

■練習問題 2.22　定常な AR(1) モデル

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

で、$\mu = E(Y_t) = 2,$　自己共分散 $\gamma_0 = 3, \gamma_1 = 1$ であった。
ϕ_0, ϕ_1, σ^2, 自己相関ρ_h, Y_tの $MA(\infty)$ 表現, $E(Y_t|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})$, $E(Y_t|\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-3}, \ldots)$, $E((Y_t)^2|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})$ をそれぞれ求めよ.

■練習問題 2.23　定常な AR(1) モデル

$$Y_t = 2 + \frac{1}{3}Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

ただし、誤差確率変数 ε_t は独立ではなく、定常 (平均 0, 分散 1) で自己共分散 $\gamma_h^{\varepsilon} = \begin{cases} 1 & (h = 0) \\ \frac{1}{4} & (|h| = 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$ である。

　このとき、以下を求めよ。(1)$V(\frac{\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}}{3})$　(2)$\mathrm{Cov}(Y_{t-1}, \varepsilon_t)$,　$\mathrm{Cov}(Y_t, \varepsilon_t)$

(3)$E(Y_t)$, Y の自己共分散γ_h を求めよ。

■**練習問題** 2.24　定常 AR(1) モデル

$$Y_t = 2 + 0.4Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, 5^2)$$

において　以下を求めよ.
(1)$E(Y_t), \gamma_0 = V(Y_t)$, $\gamma_h = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-h})$
(2)Y_t の $MA(\infty)$ 表現を求めよ.　 (3)Y_t の分布を求めよ.
(4) $E(Y_{t+1}|Y_t = a)$, $V(Y_{t+1}|Y_t = a)$, $E(Y_{t+2}|Y_t = a)$, $V(Y_{t+2}|Y_t = a)$ を求めよ.

■**練習問題** 2.25　定常 AR(2) モデル

$$Y_t = 3 + 0.4Y_{t-1} - 0.03Y_{t-2} + \varepsilon_t, \varepsilon_i \sim N(0, 5^2)$$

において　$Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i}$ とおけ　$a_{i+2} = 0.4a_{i+1} + 0.03a_i, a_0 = 1, a_1 = 0.4$ を満たすことを利用して Y_t の $MA(\infty)$ 表現を求めよ.

第 3 章

確率過程要綱

3.1 確率過程とは

■確率過程の定義　X_t　：確率過程 (時間 t とともに変わる確率変数) とする。
正確にいうと、任意の有限次元分布
● 離散の場合
$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $k_1, k_2, \cdots, k_n$ に対して、

$$P(X_{t_1} = k_1 \cap X_{t_2} = k_2 \cap \cdots \cap X_{t_n} = k_n)$$

● 連続の場合

同時密度関数　$f_{(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})}(x_{t_1}, x_{t_2}, \cdots, x_{t_n})$

が計算できることが要請される。
これが簡単に分かるための条件にマルコフ性、正規性などある。

3.2 マルコフ過程、マルコフ連鎖

■マルコフ性　一般に X_t がマルコフ過程（連鎖）であるとは
すべての $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$, $x_1, x_2, \cdots, x_n, x$ に対して

$$P(X_t \leq x | X_{t_n} = x_n, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \cdots, X_{t_2} = x_2, X_{t_1} = x_1) = P(X_t \leq x | X_{t_n} = x_n)$$

となること。

■マルコフ性の意味　マルコフ性とは、過去の情報が現在に集約されること。
つまり、未来の過去条件付分布＝未来の現在条件付分布。

このマルコフ性があれば、例えば

$$\begin{aligned} P(X_2 = x_2 \cap X_1 = x_1 \cap X_0 = x_0) &= P(X_2 = x_2 | X_1 = x_1 \cap X_0 = x_0) P(X_1 = x_1 \cap X_0 = x_0) \\ &= P(X_2 = x_2 | X_1 = x_1 \cap X_0 = x_0) P(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) P(X_0 = x_0) \\ &= P(X_2 = x_2 | X_1 = x_1) P(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) P(X_0 = x_0) \end{aligned}$$

となり、このように同時分布が推移確率 $P(X_{t+1}=y|X_t=x)$ と初期分布 $P(X_0=z)$ で計算可能となる。

■例題　マルコフ性は「現在が与えられたという条件のもとで、過去と未来が独立であること」と同値である。
例えば マルコフ性があれば、

$$P(X_4=x_4 \cap X_2=x_2|X_3=x_3)=P(X_4=x_4|X_3=x_3)P(X_2=x_2|X_3=x_3)$$

□

$\because$ 右辺 $=P(X_4=x_4|X_3=x_3\cap X_2=x_2)P(X_2=x_2|X_3=x_3)$　　$(\because$ マルコフ性$)$
$=\dfrac{P(X_4=x_4\cap X_3=x_3\cap X_2=x_2)}{P(X_3=x_3)}=$ 左辺

■

とくに推移確率　$P(X_{t+1}=y|X_t=x)=p(x,y)$,
推移確率密度関数　$f_{X_{t+s}|X_t}(y|x)=\dfrac{f_{(X_t,X_{t+s})}(x,y)}{f_{X_t}(x)}=p(s,x,y)$ が t によらないマルコフ過程は時間的一様（推移確率が定常）なマルコフ過程という。本稿ではこの場合のみを扱う。

■有限マルコフ連鎖　離散マルコフ連鎖 X_t が 2 つの値 1,2 しかとらないとする。(簡単のため　マルコフ連鎖の取る値は 2 個とするが n 個でも同じである。)
$P(X_{t+1}=j|X_t=i)=p_{ij}$ とおき、

$$P=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$$

を推移確率行列という。　$p_{11}+p_{12}=p_{21}+p_{22}=1$ に注意する。
${}_np_{ij}=P(X_n=j|X_0=i)$ とおくと、
マルコフ性より、チャップマンコルモゴロフの方程式

$${}_{n_2+n_1}p_{ij}=\sum_k {}_{n_1}p_{ik}\,{}_{n_2}p_{kj}$$

が成立する。
$(\because P(X_{n_1+n_2}=j|X_0=i)=\sum_k P(X_{n_1+n_2}=j\cap X_{n_1}=k|X_0=i)=\sum_k P(X_{n_1+n_2}=j|X_{n_1}=k\cap X_0=i)P(X_{n_1}=k|X_0=i)=\sum_k P(X_{n_1+n_2}=j|X_{n_1}=k)P(X_{n_1}=k|X_0=i))$

これより、${}_np_{ij}=P^n$ の (i,j) 成分であることがわかる。
また、$({}_{n+1}p_{11},{}_{n+1}p_{12})=({}_np_{11},{}_np_{12})P$ より、　$({}_np_{11},{}_np_{12})=(p_{11},p_{12})P^{n-1}$
また初期分布 $(P(X_0=1),\,P(X_0=2))=(p_1,\,p_2)$ とおくと

$$\begin{aligned}(P(X_n=1),\,P(X_n=2))&=(P(X_0=1),\,P(X_0=2))\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}P^{n-1}\\ &=(p_1,\,p_2)P^n\end{aligned}$$

となる。

また、$(P(X_{n+1}=1),\,P(X_{n+1}=2))=(P(X_n=1),\,P(X_n=2))\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$ が一般的に成立することにも注意しておく。

とくに $\lim_{n\to\infty} P^n$ が存在する場合[*1] 後に見る様に、$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \\ \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix}$ $(\pi_1 + \pi_2 = 1)$ となり

このとき、$\lim_{n\to\infty} (P(X_n = 1), P(X_n = 2)) = (P(X_0 = 1), P(X_0 = 2)) \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \\ \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2)$ となる。

$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \\ \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} P^{n+1} = \lim_{n\to\infty} P^n P = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \\ \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} P$ より

$\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2)$ は、$\vec{\pi} = \vec{\pi}P, \quad \pi_1 + \pi_2 = 1$ を解いて求めてもよい。[*2]

この $\vec{\pi}$ は定常分布と呼ばれる。定常分布から出発すれば 各時点での位置の確率分布 $(P(X_n = 1), P(X_n = 2))$ は n によらずに一定となる。[*3]

■２重マルコフ過程

$$P(X_{t+1} \leq x | X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}, \cdots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) = P(X_{t+1} \leq x | X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1})$$

が成立しているとき X_t を２重マルコフ過程という。

この場合は、$Y_t = (X_t, X_{t+1})$ をペアにして考えると Y_t はマルコフ過程となる。

■例 $\{1,2\}$ 値マルコフ連鎖 $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ $(0 \leq p \leq 1$ かつ $0 \leq q \leq 1)$ が $\{1,2\}$ 値マルコフ連鎖の推移確率行列である。このとき、P^n を (例えばスペクトル分解を用いて (数学付録参照)) を計算すると

$$P^n = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} + \frac{(1-p-q)^n}{p+q} \begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}$$

となり、

$$(P(X_n = 1), P(X_n = 2)) = \frac{1}{p+q}(q, p) + \frac{(1-p-q)^n (p(P(X_0 = 1) - qP(X_0 = 2))}{p+q}(1, -1)$$

である。

さらに成分の個数や極限状態を調べて以下のように分類できる。

■例 ($\{1,2\}$ 値正則マルコフ連鎖)(再帰的成分が１個だけ) $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ $(0 < p \leqq 1$ かつ $0 < q \leqq 1$ かつ $(p,q) \neq (1,1))$ のときは 明らかに正則 ($P > 0$ または $P^2 > 0$) で

[*1] $\exists N, \forall i, \forall j, \ {}_N p_{ij} > 0$ つまり $\exists N, \quad P^N > 0$ が満たされれば（このときマルコフ連鎖は正則であるという。）$\lim_{n\to\infty} P^n = P^\infty$ が存在することが知られている。この P^∞ の各行ベクトルは等しくすべて正の成分で、それを $\vec{\pi}$ とおくと、$\vec{\pi}$ は $\vec{\pi}P = \vec{\pi}$ の唯一解である。つまりそれはマルコフ連鎖の定常分布となる。

[*2] $\forall i, \forall j, \exists N, \ {}_N p_{ij} > 0$ が満たされるとき (このときマルコフ連鎖はエルゴード的であるという。もちろん、正則ならばエルゴード的である。)、$\lim_{n\to\infty} \frac{P+P^2+\cdots+P^n}{n}$ が存在し, その各行ベクトルは等しくすべて正の成分 (各行ベクトルのすべての座標は正) で、それを $\vec{\pi}$ とおくと、$\vec{\pi}$ は $\vec{\pi}P = \vec{\pi}$ の唯一解である。つまりそれはマルコフ連鎖の定常分布となる。

[*3] $\exists N, \ {}_N p_{ij} > 0$ のとき, $i \to j$ と書き, i から j に到達可能 といい, i から j にも j から i にも到達可能であるとき $i \leftrightarrow j$ とかく．この $i \leftrightarrow j$ という関係は明らかに，マルコフ連鎖のとる値 (状態空間) での同値関係であり，この同値関係で状態空間を類別したものを 成分という． 「エルゴード的」という条件は「成分」が一つと同等で 有限マルコフ連鎖においてはこれは定常分布が一意的であるための十分条件である． 有限マルコフ連鎖においては 定常分布が一意的であるための必要十分条件は 「再帰的成分（一旦、その成分に入ればそこから抜け出せない成分）が一つ」である．また，有限マルコフ連鎖では 定常分布は必ず存在する． なぜなら 状態が有限なので 「過渡的成分」だけからなることは不可能で必ず「再帰的成分」があり，そこにマルコフ過程を制限すると（そのなかだけで マルコフ連鎖を考えると）「エルゴード的」になるからである．

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$$

定常分布は、　$\vec{\pi} = \frac{1}{p+q}(q,p)$ となる。

■例 ($\{1,2\}$ **値非正則エルゴディックマルコフ連鎖)（再帰的成分が１個だけ）**　$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

このとき、$\lim_{n\to\infty} P^n$ は存在しないが、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P+P^2+\cdots+P^n}{n} = (1/2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。定常分布は、　$\vec{\pi} = \frac{1}{p+q}(q,p) = \frac{1}{2}(1,1)$ となる。

■例 (吸収状態が 1 **個の** $\{1,2\}$ **値マルコフ連鎖)（過渡的成分１個と再帰的成分１個）**　$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1-q \end{pmatrix}$　$(0 < q < 1)$ のときは　明らかに正則でもエルゴディックでもない。$p_{11} = 1$ となるがこの状態 1 にいったん入ればその後ずっと 1 にいる。　この状態 1 を「吸収状態」という。状態 2 は 1 に入ったあとでは決して戻ってこれないので　「過渡的状態」という。マルコフ連鎖の状態は　一般的には　「過渡的状態」とそれ以外の「再帰的状態」に分けることができる。　「吸収状態」は「再帰的状態」である。

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-(1-q)^n & (1-q)^n \end{pmatrix}$$

定常分布は、　$\vec{\pi} = (1,0)$ となるが、このように定常分布が標準単位ベクトルになることは　再帰的状態が吸収状態だけで、吸収状態が 1 個の場合はいつでも成立することである。

■例 (吸収状態が 2 **個の** $\{1,2\}$ **値マルコフ連鎖)（再帰的成分が２個)**　$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E =$ 単位行列 のときは　明らかに正則でもエルゴディックでもなく、状態 1 も状態 2 も吸収状態である。

定常分布は、　$\vec{\pi} = (x, 1-x)$ となり、一意的に決まらない。これは吸収状態が複数個あるときにはいつでも成立している。

■$\{1,2,3\}$ **値マルコフ連鎖**　マルコフ連鎖のとる値が 3 つのときは　以下に分類できる.

(1) 成分は 1 つで　過渡的成分は無く，再帰的成分のみ．この場合は定常分布は一意的に存在する．
  (a) 正則な場合　つまり　$P > 0$ *or* $P^2 > 0$ *or* $P^3 > 0$ の場合　この場合は極限確率も存在する．
  (b) 非正則だがエルゴード的な場合　つまり　すべての状態が互いに到達可能だが $P > 0$ *or* $P^2 > 0$ *or* $P^3 > 0$ とはならない場合，この場合は極限確率は存在しない．
(2) 過渡的成分が 1 つで 2 個の状態からなり，再帰的成分は 1 つで 1 個の状態 (吸収状態のみ）からなる．定常分布や極限確率は一意的に存在する．(吸収状態をとる確率が 1 であるもののみ)
(3) 過渡的成分が 1 つで 1 個の状態からなり, 再帰的成分は 1 つで 2 個の状態 (どちらも吸収状態ではない) からなる．定常分布は一意的に存在する．(再帰的成分ではエルゴード的マルコフ連鎖となり，そこでの定常分布と一致)
(4) 過渡的成分が 1 つで 1 個の状態からなり，再帰的成分は 2 つでどちらも 1 個の状態 (吸収状態のみ）からなる．定常分布は存在するが無限個ある.(吸収状態の値をとる任意の確率分布が定常分布) 極限確率は存在する．

(5) 過渡的成分が 2 つでどちらも 1 個の状態からなり，再帰的成分は 1 つで 1 個の状態 (吸収状態のみ) からなる．定常分布や極限確率は一意的に存在する．(吸収状態をとる確率が 1 であるもののみ)

(6) 過渡的成分は無く，再帰的成分は 2 個（これは２つの値をとるマルコフ連鎖と 1 つの値をとるマルコフ連鎖を同時にに考えたものと同じ）　または　再帰的成分は 3 個 (これは 1 つの値をとるマルコフ連鎖を３つを同時に考えたものと同じ)　$P = E =$ 単位行列．これらの場合　定常分布はあきらかに無限個ある．　極限確率はそれぞれのマルコフ連鎖で考えればよい．

以上の場合について推移図式や推移確率行列を考えてみるとよい．

■例 (吸収状態が複数個あるマルコフ連鎖)（過渡的成分１個と再帰的成分２個） [*4*5]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2/8 & 1/8 & 3/8 & 2/8 \\ 2/8 & 3/8 & 1/8 & 2/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ U & R \end{pmatrix} = P \quad \text{の場合、}$$

吸収状態は　$\{1,2\}$(再帰的成分は　$\{1\}$ と $\{2\}$) で　過渡的状態は　$\{3,4\}$(過渡的成分は $\{3\}$ と $\{4\}$) である。このように前に吸収状態だけを集めておくと見やすくなる。

$$P^n = \begin{pmatrix} E & 0 \\ (E+R+\cdots+R^{n-1})U & R^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ (E-R^n)(E-R)^{-1}U & R^n \end{pmatrix}$$

よって、

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} E & 0 \\ (E-R)^{-1}U & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\pi}_1 \\ \vec{\pi}_2 \\ \vec{\pi}_3 \\ \vec{\pi}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4/7 & 3/7 & 0 & 0 \\ 3/7 & 4/7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。ここで　$\vec{\pi}_i$ は状態 i から出発したときの極限分布

$\lim\limits_{n\to\infty}((P(X_n = 1|X_0 = i), P(X_n = 2|X_0 = i), P(X_n = 3|X_0 = i), P(X_n = 4|X_0 = i))$
$= \lim\limits_{n\to\infty} P^n$の第 i 行ベクトル) であり、
　$\vec{\pi}_1 = (1,0,0,0)$　$\vec{\pi}_2 = (0,1,0,0)$　$\vec{\pi}_3 = (4/7,3/7,0,0)$　$\vec{\pi}_4 = (3/7,4/7,0,0)$ となる。

また、第 1 列ベクトル ${}^t\vec{\omega}_1 = {}^t(1,0,4/7,3/7) = \lim\limits_{n\to\infty}((P(X_n = 1|X_0 = 1), P(X_n = 1|X_0 = 2), P(X_n = 1|X_0 = 3), P(X_n = 1|X_0 = 4))$ であり、各成分は 状態 i から出発したとき、吸収状態 1 に入ってしまう確率である。また、${}^t\vec{\omega}_1 = \lim\limits_{n\to\infty}(P^n)^t(1,0,0,0)$ であり、${}^t\vec{\omega}_1 = P^t\vec{\omega}_1$ を満たしている。

同様に第 2 列ベクトル ${}^t\vec{\omega}_2 = {}^t(0,1,3/7,4/7) = \lim\limits_{n\to\infty}((P(X_n = 2|X_0 = 1), P(X_n = 2|X_0 = 2), P(X_n = 2|X_0 = 3), P(X_n = 2|X_0 = 4))$ である。

■例 (2 重マルコフ連鎖)　2 重マルコフ連鎖 X_t から作られるマルコフ連鎖 $Y_t = (X_t, X_{t+1})$ のとる値は $\{(1,1),(2,1),(1,2),(2,2)\}$ の 4 個とする。すると、Y_t の推移確率行列 P は

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 1-p & 0 \\ q & 0 & 1-q & 0 \\ 0 & r & 0 & 1-r \\ 0 & s & 0 & 1-s \end{pmatrix}$$

となり、$0 < p, q, r, s < 1$ を仮定すると $P^2 > 0$ となり、正則でしたがって、$\lim\limits_{n\to\infty} P^n$ が存在し, 同一の行ベクトル (定常分布)$\vec{\pi}$　を持つ。$\vec{\pi} = \vec{\pi}P$ を解くと、

[*4] モデリングテキスト 3.6 練習問題 9 と同じ設定であり、その補足説明も兼ねている.

[*5] $(E+R+\cdots+R^{n-1})U$ の各要素は 1 以下で R の各要素は非負であることと、上に有界な単調増加数列は収束することより、$\lim\limits_{n\to\infty}(E+R+\cdots+R^{n-1}) = A$ は存在する。したがって、$\lim\limits_{n\to\infty} R^n = 0$ となり、$A(E-R) = E$ であり、$(E-R)^{-1}$ は存在する。

$\vec{\pi} = (\frac{sq}{sq+2s(1-p)+(1-r)(1-p)}, \frac{s(1-p)}{sq+2s(1-p)+(1-r)(1-p)}, \frac{s(1-p)}{sq+2s(1-p)+(1-r)(1-p)}, \frac{(1-r)(1-p)}{sq+2s(1-p)+(1-r)(1-p)})$

また、これから X_t の極限分布
$\lim_{n\to\infty}(P(X_n = 1), P(X_n = 2)) = (\frac{sq+s(1-p)}{sq+2s(1-p)+(1-r)(1-p)}, \frac{s(1-p)+(1-r)(1-p)}{sq+2s(1-p)+(1-r)(1-p)})$ がわかる。

■例 (独立確率変数の和はマルコフ過程)　$X_t = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_t$, $(X_0 = 0)$
ここで $Y_1, Y_2 \ldots, Y_t, \ldots$ は独立で同分布な離散確率変数とする。
すると $P(X_{t+1} \leqq x | X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}, \ldots, X_1 = x_1) = P(Y_{t+1} \leqq x - x_t | Y_t = x_t - x_{t-1}, \ldots, Y_1 = x_1) = P(Y_{t+1} \leqq x - x_t) = P(Y_{t+1} \leqq x - x_t | X_t = x_t) = P(X_{t+1} \leqq x | X_t = x_t)$
となるので X_t はマルコフ過程である。

3.3 マルチンゲール

X_t がマルチンゲールであるとは、

$$\text{すべての } t \text{ について} \qquad E(X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, \cdots, X_2, X_1) = X_t$$

となること。またこれより、

$$t > s \text{ について} \qquad E(X_t|X_s, X_{s-1}, \cdots, X_2, X_1) = X_s$$

[*6] となる。
また両辺の期待値をとって、$E(X_t) = E(X_s) = \cdots = E(X_0)$ も満たす。
X_t が $Y_1, Y_2, \ldots, Y_t$ に関してマルチンゲールであるとは、

$$\text{すべての } t \text{ について} \qquad E(X_{t+1}|Y_t, Y_{t-1}, \cdots, Y_2, Y_1) = X_t$$

と定義する。　すると、　定義から　X_t は $Y_1, Y_2, \ldots, Y_t$ の関数で書け、$E(X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, \cdots, X_2, X_1) = E(E(X_{t+1}|Y_t, Y_{t-1}, \cdots, Y_1)|X_t, X_{t-1}, \cdots, X_2, X_1) = E(X_t|X_t, X_{t-1}, \cdots, X_1) = X_t$ となり、　X_t が $Y_1, Y_2, \ldots, Y_t$ に関してマルチンゲールであるなら、X_t はマルチンゲールである。　$Y_1, Y_2, \ldots, Y_t$ が不確実性の源になるような場合 (確率微分方程式やブラックショールズモデルのブラウン運動がその典型である。) は、こちらの定義のほうが都合が良いことが多い。

■マルチンゲールの意味　時刻 s までの情報のもとでの未来 $t(> s)$ の期待財産＝時刻 s における財産。
つまり、s から t までの条件付期待財産増分=0
これは公平な賭けを行っているギャンブラーの財産過程と考えることができる。

■例 (平均 0 の独立確率変数の和はマルチンゲール)　$X_t = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_t$, $(X_0 = 0)$
ここで $Y_1, Y_2 \ldots, Y_t, \ldots$ は独立で同分布な平均 0 の離散確率変数とする。
すると $E(X_{t+1}|Y_t, Y_{t-1}, \ldots, Y_1) = E(X_t + Y_{t+1}|Y_t, Y_{t-1}, \ldots, Y_1) = X_t + E(Y_{t+1}) = X_t$
となるので X_t は $Y_1, Y_2, \ldots Y_t$ に関するマルチンゲール、したがってマルチンゲールである。

[*6] 証明は 時差 t-s=1 のときは成立するので　時差 t-s を仮定し時差 t-s+1 で成立をいう。$E(X_{t+1}|X_s, X_{s-1}, \cdots, X_2, X_1) = E(E(X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, \cdots, X_s, \cdots, X_2, X_1)|X_s, X_{s-1}, \cdots, X_2, X_1) = E(X_t|X_s, X_{s-1}, \cdots, X_2, X_1) = X_s$,　(途中は条件付期待値の基本的な性質 (第 6 章参照) とマルチンゲールの定義、帰納法の仮定を用いた.

■例 (１次元対称ランダムウォーク)　時間パラメータ t を 0 以上の整数として、$Z_t^a = a + \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_t,\quad Z_0 = a,\quad \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$ は独立で同分布。$P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$
これは、a を出発する１次元対称ランダムウォーク.
とくに $Z_t (= Z_t^0)$ と書く。
　また推移確率 $P(X_{t+1} = y | X_t = x) = p(x, y)$ は $p(x, x+1) = p(x, x-1) = \frac{1}{2}$ のマルコフ過程である。である。
これは、平均 0 の独立確率変数の和なので、マルチンゲールでもある。

■計算例

・ $P(Z_t = k) = \binom{t}{\frac{t+k}{2}} 2^{-t} \qquad (0 \leqq t \leqq k$ かつ　$t + k \in 2\mathbb{Z})$ つまり, $\frac{Z_t + t}{2} \sim B(t, 1/2)$.
・ $t > s$ のとき、$P(Z_s = k \cap Z_t = l) = P(Z_s = k \cap Z_t - Z_s = l - k) = P(Z_s = k) P(Z_t - Z_s = l - k) = P(Z_s = k) P(Z_{t-s} = l - k)$　(独立増分性を用いる.)
・ $E(Z_t) = \sum_{i=0}^{t} E(\xi_i) = 0,\ V(Z_t) = \sum_{i=0}^{t} V(\xi_i) = t$

3.4　ポアソン過程

　時間パラメータ t を 0 以上の実数として、N_t がポアソン過程であるとは　(パラメータ (強度)λ のポアソン過程)

(1) **(周辺分布はポアソン分布)**　$N_t \sim Po(\lambda t)$ $(N_0 = 0)$　つまり　$P(N_t = k) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

(2) **(独立増分性)**　$0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$ として、$N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_3} - N_{t_2}, \cdots$ は独立

(3) **(定常増分性)**　$t > s > 0$ として、$N_t - N_s \sim N_{t-s}$

が成立すること。

　また元のテキストにあるように (2), (3) に加え
(4)**(微少時間でジャンプが 2 回起こる確率は小さい.)**　$P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h)$
つまり $\lim_{h \to 0} \dfrac{P(N_{t+h} - N_t \geq 2)}{h} = 0$
を仮定しても下に見るようにポアソン過程となる。
$\because$ $g_0(t) = P(N_t = 0)$ とおくと、
$g_0(t + s) = P(N_{t+s} = 0) = P(N_s = 0) P(N_{t+s} - N_s = 0) = g_0(s) g_0(t)$
$\therefore$ この関数方程式と、$0 < g_0(t) < 1$ より $\exists \lambda (> 0),\quad g_0(t) = e^{-\lambda t}$

$g_1(t) = P(N_t = 1)$ とおくと

$$\begin{aligned} g_1(t+h) &= P(N_{t+h} = 1) \\ &= P(N_{t+h} = 1 \cap N_t = 0) + P(N_{t+h} = 1 \cap N_t = 1) \\ &= P(N_t = 0)P(N_{t+h} - N_t = 1) + P(N_t = 1)P(N_{t+h} - N_t = 0) \\ &= g_0(t)(1 - e^{-\lambda h} + o(h)) + g_1(t)e^{-\lambda h} \\ \therefore\ g_1'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{g_1(t+h) - g_1(t)}{h} = g_0(t)\lim_{h\to 0}\frac{1-e^{-\lambda h}}{h} + g_1(t)\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\lambda h}-1}{h} = \lambda g_0(t) - \lambda g_1(t) \\ &= \lambda e^{-\lambda t} - \lambda g_1(t) \end{aligned}$$

$\therefore\ \dfrac{d}{dt}(e^{\lambda t}g_1(t)) = \lambda e^{-\lambda t}e^{\lambda t} = \lambda$

$\therefore\ e^{\lambda t}g_1(t) = \lambda t + c,\quad g_1(0) = 0$ より，$g_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$

全く同様に、$g_k(t) = P(N_t = k)$ とおくと、 $g_{k+1}'(t) = \lambda g_k(t) - \lambda g_{k+1}(t)$ が得られ

後は帰納法より、$g_k(t) = \cdots = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} = P(P_o(\lambda t) = k)$　が得られる。

■計算例

- $P(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\quad (t \in \mathrm{R}_+ = \{t|t \geqq 0,\, t \in \mathrm{R}\},\, k \in \mathrm{N} \cup \{0\})$
- $t > s$ のとき、$P(N_s = k \cap N_t = l) = P(N_s = k)P(N_{t-s} = l - k)$　(独立増分性を用いる.)
- $E(N_t) = \lambda t,\, V(N_t) = \lambda t$
- $t > s$ のとき、　$E(N_sN_t) = E(N_s^2 + N_s(N_t - N_s)) = V(N_s) + E(N_s)^2 + E(N_s)E(N_{t-s}) = \lambda s + \lambda^2 st$
  つまり　$\mathrm{Cov}(N_s,\, N_t) = \lambda s$

- $t > s$ のとき、独立増分性を用いて、$E(N_t - \lambda t|N_u, u \leqq s) = N_s - \lambda t + E(N_t - N_s|N_u, u \leqq s) = N_s - \lambda t + E(N_t - N_s) = N_s - \lambda s$ よって、$N_t - \lambda t$ はマルチンゲール。

■計数過程としてのポアソン過程　$T_i = i$ 番目のイベントが発生する時刻 とし、$n_t = \max\{n|T_n \leqq t\}=$ 時刻 t 以前に起こったイベント発生回数を計数過程 (counting process) といい、とくにそのイベント発生間隔 $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \ldots$ が独立で同分布としたときの n_t を再生過程という。

ポアソン過程の場合　$T_i = \inf\{t|N_t = i\} = \inf\{t|N_t - N_{t_{i-1}} = 1,\ t > T_{i-1}\}$ であり、つまり　ジャンプ（すべてのジャンプは大きさ 1) が発生した時刻たちが $T_1 < T_2 < \cdots < T_n < \ldots$ である。このとき、$P(T_1 > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$

つまり、$T_1 \sim Exp(\lambda)$ （平均 $\frac{1}{\lambda}$ の指数分布）となる。

また、$P(T_2 - T_1 > t) = P(N_{t+T_1} - N_{T_1} = 0) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$

つまり、$T_1,\, T_2 - T_1,\, T_3 - T_2, \cdots$ は独立で全て分布は平均 $\frac{1}{\lambda}$ の指数分布 $Exp(\lambda)$ であることが分かる。

計算例　$P(T_2 > 5T_1) = P(T_2 - T_1 > 4T_1) = P(\lambda(T_2 - T_1) > 4\lambda T_1) = P(X > 4Y) = \int_0^\infty P(X > 4y)e^{-y}dy = \int_0^\infty e^{-4y}e^{-y}dy = 1/5$ ここで　$X \sim Y \sim Exp(1)$ で　X, Y は独立。

また，指数分布とガンマ分布の関係，ガンマ分布の再生性より（第 6 章参照), $T_k \sim \Gamma(k, \lambda) \sim \frac{1}{\lambda}\Gamma(k, 1)$ となり，また，この議論から，次のガンマ分布, カイ 2 乗分布とポアソン分布の関係式がわかる.

k を非負整数として，$P(Po(\lambda t) \leqq k) = 1 - P(Po(\lambda t) > k) = 1 - P(Po(\lambda t) \geqq k + 1) = 1 - P(T_{k+1} < t) = 1 - P(\Gamma(k + 1, \lambda) < t) = 1 - P(\Gamma(2(k + 1)/2, 1/2) < 2\lambda t) = P(\chi^2_{2(k+1)} \geqq 2\lambda t))$

まとめると,

$$P(Po(\mu) \leqq k) = P(\Gamma(k+1,1) > \mu) = P(\chi^2_{2(k+1)} > 2\mu)$$

[*7]となる.

3.5　ブラウン運動

$W_t = \lim_{\Delta t \to 0} Z_t{}^{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\Delta t}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{\frac{t}{\Delta t}})$
W_t：(標準) ブラウン運動　　(時間パラメータ t は 0 以上の実数)
つまり、$Z_t^{\Delta t}$：時間間隔 Δt, 空間間隔 $\sqrt{\Delta t}$ の１次元対称ランダムウォーク　の極限として　(標準) ブラウン運動が得られる。
$M_{W_t}(\alpha) = E(e^{\alpha W_t}) = \lim_{\Delta t \to 0} E(e^{\alpha Z_t{}^{\Delta t}}) = \lim_{\Delta t \to 0} E\Big(e^{\alpha\sqrt{\Delta t}(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{\frac{t}{\Delta t}})}\Big) = \lim_{\Delta t \to 0}\Big(E(e^{\alpha\sqrt{\Delta t}\xi_1})\Big)^{\frac{t}{\Delta t}}$
$= \lim_{\Delta t \to 0}\Big(\dfrac{e^{\alpha\sqrt{\Delta t}} + e^{-\alpha\sqrt{\Delta t}}}{2}\Big)^{\frac{t}{\Delta t}} = \lim_{\Delta t \to 0}\Big(1 + \dfrac{\alpha^2}{2}\Delta t + o(\Delta t)\Big)^{\frac{t}{\Delta t}} = e^{\frac{\alpha^2}{2}t} = M_{N(0,t)}(\alpha)$
つまり、t を固定したとき、$W_t \sim N(0,t)$　同様に $t > s$ として $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$
またランダムウォークに独立増分性があるので、ブラウン運動 W_t ($W_0 = 0$) も独立増分性を持つ。
つまり、$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ として、

$$\begin{array}{ccccc} W_{t_1}, & W_{t_2} - W_{t_1}, & W_{t_3} - W_{t_2}, & \cdots & , W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \\ \wr & \wr & & & \wr \\ N(0, t_1), & N(0,\, t_2 - t_1), & & & , N(0,\, t_n - t_{n-1}) \end{array}$$

も独立となる。
また見本関数　$t \longrightarrow W_t$ が（確率１で）連続も証明できる。

■計算例

- $f_{W_t}(x) = f_{N(0,t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-x^2}{2t}}$.
- $E(W_t) = E(N(0,t)) = 0$, $V(W_t) = V(N(0,t)) = t$
- $t > s$ のとき、$f_{(W_s, W_t - W_s)}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{\frac{-x^2}{2s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{\frac{-y^2}{2(t-s)}}$　($\because$ 独立増分性)
  これより、$f_{(W_s, W_t)}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{\frac{-x^2}{2s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{\frac{-(y-x)^2}{2(t-s)}}$
- $t > s$ のとき、$E(W_s W_t) = E(W_s^2 + W_s(W_t - W_s)) = s$
- $t > s$ のとき、$E(W_t|W_s) = W_s + E(W_t - W_s|W_s) = W_s + E(W_t - W_s) = W_s$, 同様に $E(W_t|W_u, u \leqq s) = W_s$ よって　W_t はマルチンゲール。

[*7] このガンマ分布、χ^2 乗分布、ポアソン分布の関係は　ポアソン母集団の母平均の精密法（正規近似を使わないという意味での）（国沢確率統計演習２統計９１ｐ）の根拠となるものである。

3.6　第 3 章の練習問題

■練習問題 3.1　3 枚の正しい硬貨がある。　それを同時に投げ、表の出た硬貨だけ取り除くという試行を繰り返す。t 回目の試行の直後に残っている硬貨の枚数を X_t とおくとこれはマルコフ連鎖となるが推移確率行列 P(第 i 行が硬貨の残り枚数が $i-1$ 枚に対応するとせよ) を求めよ。また P^2 を計算し、$(P(X_4=0|X_2=3), P(X_4=1|X_2=3), P(X_4=2|X_2=3), P(X_4=3|X_2=3))$ を求めよ。

■練習問題 3.2　X_t がマルコフ連鎖であるとき、

$$P(X_4=x_4 \cap X_2=x_2 \cap X_1=x_1|X_3=x_3) = P(X_4=x_4|X_3=x_3)P(X_2=x_2 \cap X_1=x_1|X_3=x_3)$$

を示せ。また、
$P(X_1=x_1|X_2=x_2 \cap X_3=x_3 \cap X_4=x_4) = P(X_1=x_1|X_2=x_2)$ も示せ。

■練習問題 3.3　$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ のとき、$(P(X_n=1|X_0=1)$ (つまり $P(X_0=1)=1$ のときの $P(X_n=1))$, $P(X_n=2|X_0=1))$, 定常分布 $\vec{\pi}$ を求めよ。

■練習問題 3.4　$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ で、$(P(X_0=1), P(X_0=2)) = (1/4, 3/4)$ のとき、$(P(X_n=1)$, $P(X_n=2))$, 定常分布 $\vec{\pi}$ を求めよ。

■練習問題 3.5　$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/8 & 2/8 & 1/8 & 2/8 & 2/8 \\ 2/8 & 0 & 3/8 & 1/8 & 2/8 \end{pmatrix}$ のとき、吸収状態、過渡的状態、$\vec{\pi}_i$, $(i=1,\ldots,5)$, $\vec{\omega}_i$, $(i=1,2,3)$ を求めよ。

■練習問題 3.6　2 重マルコフ連鎖 X_t から作られるマルコフ連鎖 $Y_t = (X_t, X_{t+1})$ のとる値は $\{(1,1),(2,1),(1,2),(2,2)\}$ の 4 個とする。また、Y_t の推移確率行列 P は $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$ とするとき、Y_t の定常分布, X_t の極限分布 $\lim_{n\to\infty}(P(X_n=1), P(X_n=2))$ を求めよ。

■練習問題 3.7　推移確率行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \\ 4/9 & 4/9 & 1/9 \end{pmatrix}$ が与えられている。$P(X_0=1)=1/2, P(X_0=2)=1/3, P(X_0=3)=1/6$ のとき、$(P(X_n=1), P(X_n=2), P(X_n=3))$ を求めよ。

■練習問題 3.8　f を 1 対 1 写像とするとき、　X_t がマルコフ過程なら、$f(X_t)$ もマルコフ過程であることを示せ。

■練習問題 3.9　$X_t = Y_1 \cdot Y_2 \cdots Y_t$, $(X_0=1)$
ここで $Y_1, Y_2 \ldots, Y_t, \ldots$ は独立で同分布な正値離散確率変数とする。
このとき、X_t は　マルコフ連鎖であることを示せ。

■練習問題 3.10　$X_t = Y_1 \cdot Y_2 \cdots Y_t,\ (X_0 = 1)$
ここで $Y_1, Y_2 \ldots, Y_t, \ldots$ は独立で同分布な正値離散確率変数で平均 1 とする。
このとき、X_t は　マルチンゲールであることを示せ。

■練習問題 3.11　$Z_t^2 - t$ は　$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_t$　に関してマルチンゲールであることを示せ。

■練習問題 3.12　$(N_t - \lambda t)^2 - \lambda t$ は N_u に関してマルチンゲールであることを示せ。

■練習問題 3.13　$(W_t)^2 - t$ は W_u に関してマルチンゲールであることを示せ。

■練習問題 3.14　$E(N_s(N_s-1)(N_s-2)),\ E(N_s^3),\ t > s$ のとき、$E(N_s^2 N_t)$ を求めよ。

■練習問題 3.15　$E(W_t^3),\ E(W_t^4),\ E(e^{\alpha W_t}),\ E(W_t e^{W_t}),\ t > s$ として, $E(W_s^2 W_t^2)$ を求めよ。

■練習問題 3.16　3.4 節において、$T_2,\ T_n$ の密度関数を求めよ。また $P(T_2 > 3T_1),\ P(T_3 > 3T_2 > 4T_1)^{(*)}$ を求めよ。

■練習問題 3.17$^{(*)}$　$M_t = \max_{0 \le s \le t} W_s$ としたとき、(M_t, W_t) の同時密度関数は鏡像原理より、

$$f_{(M_t,W_t)}(x,y) = \begin{cases} \frac{2(2x-y)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(2x-y)^2}{2t}} & x \ge y,\ x \ge 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

が知られている。(藤田岳彦著・ファイナンスの確率解析入門 or 数学セミナー連載「ランダムウォーク」)
これを用いて M_t の密度関数 $f_{M_t}(x),\ E(M_t),\ E({M_t}^2),\ M_t - W_t$ の密度関数を求めよ。また $|W_t|$ の密度関数を求めよ。

■練習問題 3.18　$\{1,2\}$ 値マルコフ連鎖があり、$\{1\}$ は吸収状態,　$\{2\}$ は過渡的状態である。$P(X_0 = 2) = 1$ とする。　初めて吸収状態 $\{1\}$ に到達する時間 $T = \min\{i | X_i = 1\}$ の $E(T)$=6 であった。 推移確率行列 P を求めよ。

■練習問題 $^{(*)}$3.19　$\{1,2,3\}$ 値マルコフ連鎖があり、$\{1\}$ は吸収状態,　$\{2,3\}$ は過渡的状態である。
初めて吸収状態 $\{1\}$ に到達する時間 $T = \min\{i | X_i = 1\}$ の $E(T) = \frac{9}{4}$,　$V(T) = \frac{39}{16}$ である。また, 推移確率行列 P の固有値は　$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ である。$P(X_n = 1)$ を求めよ。(Hint: $E(T) = \sum_{n=1}^{\infty} P(T \geqq n)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP(T \geqq n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{i=n}^{\infty} P(T = i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(T = i) \sum_{n=1}^{i} n = E(\frac{T(T+1)}{2})$$

■練習問題 3.20　壺 A は赤球 1 個白球 2 個、壺 B は　赤球 2 個白球 1 個入っており、それぞれの壺から球を 1 個取り出し交換する試行を繰り返す。　n 回の試行の直後の壺 A の赤球の個数を X_n とする。$X_0 = 1$ に注意する。　明らかに X_n はマルコフ連鎖となるがその推移確率行列 P を求めよ。(第 i 行が赤球 $i-1$ 個に対応するものとする。) $(P(X_2 = 0), P(X_2 = 1), P(X_2 = 2), P(X_2 = 3))$ を求めよ。またこのマルコフ連鎖は正則 ($P^3 > 0$ より) となるので極限分布 $\vec{\pi} = \lim_{n \to \infty}(P(X_n = 0), P(X_n = 1), P(X_n = 2), P(X_n = 3))$ が存在するがそれを求めよ。　また $P(X_{n+1} = 1), P(X_{n+1} = 2)$ をそれぞれ $P(X_n = 0), P(X_n = 1), P(X_n = 2), P(X_n = 3)$ で表せ。　$a_n = P(X_n = 1) + P(X_n = 2)$ を求めよ。

■練習問題 3.21 正しい硬貨が 2 枚ある。2 枚同時に投げ、表が出た硬貨を取り除く試行を繰り返す。t 回の試行の直後の硬貨の枚数を X_t とする。$X_0 = 2$ に注意する。 明らかに X_t はマルコフ連鎖となるがその推移確率行列 P を求めよ。(第 i 行が硬貨 $i-1$ 枚に対応するものとする。) $(P(X_2 = 0), P(X_2 = 1), P(X_2 = 2))$ を求めよ。P^n を計算し、$(P(X_n = 0), P(X_n = 1), P(X_n = 2))$ を求めよ。 また, 極限分布 $\lim_{n\to\infty}(P(X_n = 0), P(X_n = 1), P(X_n = 2))$ を求めよ。

■練習問題 3.22 正しいサイコロを何回も投げる。 i 回目の目を Y_i とし、$X_n = Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$, $Z_n = X_n$ を 4 で割った余りとする。次の問いに答えよ。

(a) Z_n はあきらかに正則マルコフ連鎖であるが、その推移確率行列 P と極限確率 $\lim_{n\to\infty}((P(Z_n = 0), P(Z_n = 1), P(Z_n = 2), P(Z_n = 3))$ を求めよ。

(b) $T = \min\{i \geqq 1 | Y_i = 6\}$ =初めて 6 の目が出た回数 と定義するとき、T の分布 ($P(T = k)$ で答えても良い。), $E(T)$, $V(T)$ を求めよ。

(c) X_T= 初めて 6 の目が出た回数までのサイコロの目の総計としたとき、 $E(X_T|T)$, $V(X_T|T)$, $E(X_T)$, $V(X_T)$ を求めよ。

以下の問題は マルコフ連鎖でも解けるが漸化式を直接立てて解いたほうが早い問題である。また、他にも漸化式や方程式を用いて求値する問題を集めておいた。

■練習問題 3.23 1 回の試行で事象 A の起こる確率が p とするとき、n 回の独立試行で A の起こる回数が偶数となる確率を求めよ。

■練習問題 3.24 A, B, C の 3 名と一個の球がある。 サイコロを投げて、$1, 2$ の目がでたら、A, B の間で球をやりとり (A が球をもっていたら B に渡す。B が球をもっていたら A に渡す。C が球を持っていたら何も交換は行われない。) し、$3, 4, 5, 6$ の目がでたら、A, C の間で球をやりとりする。最初は A が球を持っているものとする。n 回目にサイコロを投げた直後に A が球を持っている確率を p_n, B が球を持っている確率を q_n, C が球を持っている確率を r_n とするとき 以下の問いに答えよ。

(1) p_{n+1} を p_n, q_n, r_n で表せ。

(2) p_n を求めよ。

■練習問題 3.25 箱 A, B のそれぞれに赤球 1 個、白球 4 個入っている。 一回の試行で 箱 A の球 1 個を箱 B の球 1 個と交換する。n 回の試行の後箱 A に赤球 1 個、白球 1 個入っている確率を p_n とする。 p_n を求めよ。

■練習問題 3.26 サイコロを何回も投げるゲームをする。 1 がでたら得点 1 を加え、2,3 が出たら得点 2 を加え, 4,5,6 が出たらそこでゲームをやめる。 ゲームを始める前の得点を 0 とするとき、得点 n でゲームが終わる確率を p_n とする。 p_n を求めよ。 またこのゲームの得点を X としたとき、平均得点 $E(X)$, $E(X(X-1))$ を求めよ。

■練習問題 3.27　ABC の 3 人が　$ABCABCABC....$ の順番で正しいサイコロを投げる。　最初に 6 の目を出した人が勝ちとする。　A が勝つ確率を求めよ。

■練習問題 3.28　A, B の二人が　$ABBABBABBABB....$ の順番で　正しいサイコロを投げる。　A は 5 か 6 が出れば勝ち、B は 1 が出れば勝ちとし、1 回勝者が出たらそれ以降の試行は行わない。A が勝つ確率を求めよ。 また、勝者が決まるまでの試行回数を T とするとき、平均持続時間 $E(T)$ を求めよ。

■練習問題 3.29　鉱夫が 3 つのドアを持つ鉱山に閉じ込められた。 最初のドア A を選ぶと 2 時間で出口にたどりつき、　2 番目のドア B を選ぶと 3 時間後に始めの状態に戻り、3 番目のドア C を選ぶと 5 時間後に初めの状態に戻ってしまう。　鉱夫は 3 つのドアを確率 $\frac{1}{3}$ で選ぶとすると、出口にたどり着くまでの時間 T の期待値 $E(T)$, 分散 $V(T)$ $^{(*)}$ を求めよ。

■練習問題 3.30　表が出る確率が p の硬貨を独立に何回も投げる。
(1) はじめて表が出るまでの回数 T_1 の期待値, 分散を求めよ。また、 T_1 が奇数回となる確率を求めよ。
(2) 表が 2 回でるまでの回数 T_2 の期待値、分散を求めよ。
(3) 初めて表が 2 回続けて出るまでの回数 T_3 の期待値を求めよ。

■練習問題 3.31　次のゲームの得点の期待値を求めよ。
硬貨 A は　表が出る確率 p、　硬貨 B は表が出る確率 r である。　まず、硬貨 A を投げ　表が出たら得点 1 を加え、次にまた硬貨 A を投げる．　硬貨 A の裏が出たら、次に硬貨 B を投げ、裏が出たらそこでゲームは終了し、表が出たら得点を加えないで次に硬貨 A を投げる．以上を繰り返していくとする。

■練習問題 3.32　3 人でじゃんけんを一人の勝者が決定するまで行う．　ただし負けた人はじゃんけんから除いて次のじゃんけんを行う．
n 回目のじゃんけんのすぐ後で残っている人数を X_n とするとき，($(P(X_0 = 3) = 1$ である．) 以下の問いに答えよ．
　ただし，$X_n = 1$ になった以降は $X_{n+1} = X_{n+2} = \cdots = 1$ とする．
(1)$P(X_1 = 3)$, $P(X_1 = 2)$, $P(X_1 = 1)$, $P(X_2 = 3)$, $P(X_2 = 2)$, $P(X_2 = 1)$ を求めよ．
(2)$P(X_4 = 2|X_2 = 3)$, $P(X_4 = 2|X_2 = 2)$, $P(X_4 = 2|X_2 = 2, X_1 = 3)$, $P(X_4 = 2|X_2 = 2, X_1 = 2)$
$P(X_2 = 3|X_3 = 2)$, $P(X_2 = 3|X_4 = 2, X_3 = 2)$ を求めよ．
(3)$P(X_n = 3)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 1)$ を求めよ．
(4) n 回目のじゃんけんで初めて一人の勝者が決まる確率を p_n と一人の勝者が決まるまでのじゃんけんの期待回数を求めよ．

■練習問題 3.33　正しいサイコロを n 回投げるとき，i 回目の目を X_i とする．$Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ とするとき，以下を求めよ．
(1) $k = 1, 2, \ldots, 6$ として　$P(Y_n \leqq k)$　(2)$P(Y_n = k)$　(3)$E(Y_n)$　(4)$V(Y_n)$
(5)$\lim_{n\to\infty} E(Y_n)$,)$\lim_{n\to\infty} V(Y_n)$

(6) また，$X_0 = Z_0 = 4$　として　$Z_n = \max(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ とするとき，Z_n は　マルコフ連鎖となるがその推移確率行列を求めよ．

(7)$P(Z_n = 4)$, $P(Z_n = 5)$, $P(Z_n = 6)$　の満たす漸化式を作りそれらを求めよ．

第 4 章

シミュレーション要綱

4.1 シミュレーションとは

確率変数 X の密度関数を $f(x)$ とすると、

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

これを解析的に定積分を計算することで求めるのではなく、モンテカルロ法によって求める

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を独立で同分布 $X_i \sim X$ とすると、

$$\text{大数の強法則より} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{g(X_1) + \cdots + g(X_n)}{n} = E(g(X))$$

つまり、独立確率変数列 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を作ることができれば、それを $g(x)$ に代入し平均をとることにより、定積分の近似値を得ることができるのである。
また、誤差評価や収束するスピードは

$$\text{中心極限定理より} \quad \frac{\frac{g(X_1)+\cdots+g(X_n)}{n} - E(g(X_1))}{\sqrt{\frac{V(g(X_1))}{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} N(0,1)$$

となり、つまり、$\frac{g(X_1)+\cdots+g(X_n)}{n} - E(g(X_1)) = \sqrt{\frac{V(g(X_1))}{n}} N(0,1) + o(\frac{1}{\sqrt{n}})$　であり、収束オーダーは $\frac{1}{\sqrt{n}}$ で、その係数が $\sqrt{\frac{V(g(X_1))}{n}}$ であることより、　この分散項を小さくすれば誤差評価は良くなる。(後に見る分散減少法)

4.2 確率変数を生成する技法

この節では　一様乱数を用いて与えられた確率分布を持つ確率変数を生成する方法を述べる。まず一般論を述べていくが、各具体的確率分布に対する生成方法は第 6 章を参照して欲しい。

4.2.1 逆関数法

まず、一様分布に従う確率変数 U から密度関数 $f(x)$ を持つ確率変数 X を作ってみよう。

■逆関数法　X の分布関数を $F(x)$ つまり $F(x) = P(X \leq x)$ これは一般に単調非減少関数であるが、とくに単調増加を仮定する。すると、F の逆関数が存在し、それを $y = F^{-1}(x)$ とする。

■定理　$X=F^{-1}(U)$ とすると、X の分布関数は $F(x)$
$(\because \quad P(X\le x)=P(F^{-1}(U)\le x)=P(U\le F(x))=F(x)\ )$

■例 (一様乱数から指数分布を作る)　$y=1-e^{-\lambda x} \iff x=\frac{-\log(1-y)}{\lambda}$ より、$\frac{-\log(1-U)}{\lambda}\sim\frac{-\log(U)}{\lambda}\sim Exp(\lambda)$ (平均 $\frac{1}{\lambda}$ の指数分布)

■離散型の逆関数法　例えば　$P(X=x_1)=p_1, P(X=x_2)=p_2, P(X=x_3)=p_3 \quad (p_1+p_2+p_3=1)$ となる確率分布を作りたければ

$$\begin{aligned} U \leqq p_1 \longrightarrow &\quad X=x_1 \\ p_1<U\leqq p_1+p_2 \longrightarrow &\quad X=x_2 \\ p_1+p_2<U\leqq p_1+p_2+p_3=1 \longrightarrow &\quad X=x_3 \end{aligned}$$

のように X の値を決めればよい。

4.2.2　棄却法

■棄却法 (rejection method)　$\exists c, \forall y, f(y)\le cg(y)$ とする。g がシミュレートできるという条件のもとで、f をシミュレートする

手順 1　Y の密度が g である Y をとってくる.(例えば逆関数法で作る.)
手順 2　$U\sim U(0,1)$ をとってくる
手順 3　$U\le\frac{f(Y)}{cg(Y)}$ なら $X=Y(X$ として Y をとる.), $U>\frac{f(Y)}{cg(Y)}$ なら (何もしないで) 手順 1 にもどる

■定理　X の密度関数は f
証明

$$P(X\le x)=P(Y\le x|U\le\frac{f(Y)}{cg(Y)})=\frac{P(Y\le x\cap U\le\frac{f(Y)}{cg(Y)})}{P(U\le\frac{f(Y)}{cg(Y)})}$$

$$=\frac{E(\frac{f(Y)}{cg(Y)}\cap Y\le x)}{E(\frac{f(Y)}{cg(Y)})}=\frac{\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u)}{cg(u)}g(u)du}{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)}{cg(u)}g(u)du}=\frac{\int_{-\infty}^{x}f(u)du}{\int_{-\infty}^{\infty}f(u)du}=\int_{-\infty}^{x}f(u)du$$

■例　$\Gamma(2,2)$ を $Exp(1)$ から棄却法を用いて作る。$\frac{f_{\Gamma(2,2)}(x)}{f_{Exp(1)}(x)}=4xe^{-x}$ より、 上の c=$\frac{4}{e}$. 後は逆関数法を注意し上の手順に従えばよい。つまり、手順 1．独立な $U_1,U_2\sim U(0,1)$ を用意し まず $-\log U_1$ を作る。
手順 2．$U_2\leqq -eU_1\log U_1$なら $-\log U_1$ を採用。そうでなければ何もしないで手順 1. に戻る。
　を繰り返せばよい。　ここで　$-\log U_1\sim Exp(1)$　に注意しておく。

4.2.3　合成法

離散と連続の逆関数法を両方用いて混合分布 (確率分布の mixture、確率密度関数 (resp. 確率分布関数) たちの凸結合を確率密度関数 (resp. 確率分布関数) とする確率分布) をシミュレートできる。具体的には次のようにする。

■合成法　$f(x)=h_1g_1(x)+h_2g_2(x)+h_3g_3(x)$, $h_1,h_2,h_3\geq 0, h_1+h_2+h_3=1$ で、g_i はシミュレートできると仮定すると、次の示す合成法によって密度関数 $f(x)$ をもつ Y が作れる。

$F_i(x)=\int_{-\infty}^{x} g_i(u)du$ とすると、$F_i^{-1}(U_2)$　$(U_2\sim U(0,1))$ の密度は $g_i(x)$

すると、

$$\begin{aligned} 0 \leqq U_1 \leqq h_1 &\longrightarrow \quad Y=F_1^{-1}(U_2) \\ h_1 < U_1 \leqq h_1+h_2 &\longrightarrow \quad Y=F_2^{-1}(U_2) \\ h_1+h_2 < U_1 \leqq h_1+h_2+h_3=1 &\longrightarrow \quad Y=F_3^{-1}(U_2) \end{aligned}$$

とすれば、Y の密度は $h_1g_1(x)+h_2g_2(x)+h_3g_3(x)$

証明

$$\begin{aligned} F_y(x)=P(Y\leq x) &= P(F_1^{-1}(U_2)\leq x\cap 0\leq U_1\leq h_1)+P(F_2^{-1}(U_2)\leq x\cap h_1\leq U_1\leq h_1+h_2) \\ &\quad +P(F_3^{-1}(U_2)\leq x\cap h_1+h_2\leq U_1\leq 1) \\ &= P(F_1^{-1}(U_2)\leq x)P(0\leq U_1\leq h_1)+P(F_2^{-1}(U_2)\leq x)P(h_1\leq U_1\leq h_1+h_2) \\ &\quad +P(F_3^{-1}(U_2)\leq x)P(h_1+h_2\leq U_1\leq 1) \\ &= h_1\int_{-\infty}^{x} g_1(u)du+h_2\int_{-\infty}^{x} g_2(u)du+h_3\int_{-\infty}^{x} g_3(u)du \end{aligned}$$

■例　$f_X(x)=\begin{cases} \frac{4}{5}x^3+\frac{12}{5}x^2 & 0<x<1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$ となる確率変数 X を合成法を用いて作れ.

(答え)

$U_1,U_2\sim U(0,1)$ で独立なものをとり,

$0\leqq U_1<1/5$ なら　$X={U_2}^{1/4}$ ととり，$1/5\leqq U_1\leqq 1$ なら　$X={U_2}^{1/3}$ ととればよい.

(注意) この X の分布関数の逆関数は複雑なので，このような X をシミュレートするには合成法か棄却法 $(f_U(x)=1\quad(0<x<1)$ に対しての）で作るとよい.

注意

密度関数 $f_{X_i}(x)$ を持つ確率変数 X_i とし、それらと独立な離散確率変数 I を $P(I=i)=p_i\quad(i=1,2,3)$ をとると、$X_I\sim Y$ となる。　このような場合や、確率分布のパラメータがまた確率変数の場合を　確率変数の混合 (mixture) という。第 6 章で諸例をいろいろあげているので　参照されたい。

4.3　分散減少法

すでに　introduction で述べたが、2 乗平均誤差の立場で誤差評価を述べ直しておく。

$$\theta=E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \quad (X \text{ の密度 } f(x))$$

$$\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\ ,\ X_1,\ldots,X_n \text{は独立で、} X_i \text{の密度 } f$$

すると、$E(\hat{\theta}_n)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(g(X_i))=\dfrac{1}{n}n\theta=\theta$

また、$V(\hat\theta_n) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Var(g(x)) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

すると、$V(\hat\theta_n) = E((\hat\theta_n - \theta)^2) = \dfrac{\sigma^2}{n}$　つまり、$\sqrt{E((\hat\theta_n - \theta)^2)} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

モンテカルロ法による標準誤差（平均 2 乗誤差の平方根）は $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
つまり、モンテカルロ法により θ を推定する場合の標準誤差は $\sqrt{n}^{-1}$ のオーダー , これを、$O(\frac{1}{\sqrt{n}})$
ここで、分散 σ^2 の部分を減らせば、シミュレーションの効率は上がる。

4.3.1　負の相関法

$V(\frac{1}{2}(X+Y)) = \frac{1}{4}V(X) + \frac{1}{4}V(Y) + \frac{1}{2}Cov(X,Y) = \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}Cov(X,Y)$
ここで、$Cov(X,Y) < 0$ なら、もっと分散は小さくなり、シミュレーションの精度を上げることができる。

■定理　f, g が増加関数なら、$Cov(f(X), g(X)) = E(f(X)g(X)) - E(f(X))E(g(X)) \geq 0$

証明
$f(x) \geq f(y) \rightleftarrows g(x) \geq g(y)$ より、$(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geq 0$
$\therefore$ X, Y を独立で、$X \sim Y$ とすると、

$$0 \leq E((f(X)-f(Y))(g(X)-g(Y))) = 2\left(E(f(X)g(X)) - E(f(X))E(g(X))\right)$$

すると、$U \sim U(0,1), h$ を増加関数[*1]とすると、

$$Cov(h(U), h(1-U)) \leq 0 \ (\because -h(1-x) \text{ は増加関数})$$

つまり、$U_1, U_2, \ldots, U_n$ をとってくれば、$1-U_1, 1-U_2, \ldots, 1-U_n$ もシミュレーションに使えば分散減少することがわかる.

■例　$g(x) = \frac{1}{1+x}$ として、　$E(g(U)) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \log 2$,　$V(g(U)) = 1/2 - (\log 2)^2$
すると、$U_1, U_2, \ldots, U_{2M}$ の $2M$ 個の一様乱数を用いると
$V(\frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{2M} g(U_i)) = \dfrac{V(g(U)}{2M} = \dfrac{1/2-(\log 2)^2}{2M} = \dfrac{0.019547}{2M}$
また、$\mathrm{Cov}(g(U), g(1-U)) = \frac{2\log 2}{3} - (\log 2)^2 = -0.0183549$ より、
負の相関法を用い, $U_1, U_2, \ldots, U_M, 1-U_1, 1-U_2, \ldots, 1-U_M$ を一様乱数を用いると
$V(\frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{M}(g(U_i)+g(1-U_i))) = \dfrac{V(g(U)) + \mathrm{Cov}(g(U), g(1-U))}{2M} = \dfrac{0.001192}{2M}$ とかなり分散が減少しており、シミュレーションの精度が良くなる。

[*1] 減少関数でもよい。　増加と減少が混在すればそのままではまずいが　増加の区間と減少の区間を分けて考えればよい。

4.3.2 制御変量法

$\hat{\theta}_n^{(3)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(g(X_i) + c(h(X_i) - \theta_h))$ ここで、$E(h(X_i)) = \theta_h$は既知と仮定 すると、

$$\begin{aligned} V(\hat{\theta}_n^{(3)}) &= \frac{1}{n}V(g(X) + c(h(X) - \theta_h)) \\ &= \frac{1}{n}\left(V(g(X)) + 2cCov(g(X), h(X)) + c^2V(h(X))\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(V(h(X))\left(c + \frac{Cov(g(X), h(X))}{V(h(X))}\right)^2 + V(g(X)) - \frac{(\mathrm{Cov}(g(X), h(X)))^2}{V(h(X))}\right) \end{aligned}$$

$\therefore\ c = -\dfrac{\mathrm{Cov}(g(X), h(X))}{V(h(X))}$ととると、分散は最小となり

このとき、

$$V(\hat{\theta}_n^{(3)}) = \frac{1}{n}\left(V(g(X)) - \frac{(\mathrm{Cov}(g(X), h(X)))^2}{V(h(X))}\right) \leq \frac{1}{n}V(g(X)) = V(\hat{\theta}_n)\ \text{となる}$$

$$\text{ここで、}\frac{V(\hat{\theta}_n^{(3)})}{V(\hat{\theta}_n)} = 1 - \frac{(\mathrm{Cov}(g(X), h(X)))^2}{V(h(X))V(g(X))} = 1 - Corr(g(X), h(X))^2$$

この方法によって、どれだけ分散減少するかもシミュレーションの結果を用いて推定する

$$\widehat{Cov}[g(X), h(X)] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(g(X_i) - \hat{g}(X))(h(X_i) - \hat{h}(X))$$

$$\widehat{Var}[h(X)] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(h(X_i) - \hat{h}(X)\right)^2$$

$$\text{ここで、}\hat{g}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(X_i), \hat{h}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(X_i)$$

$$c\ \text{を}\hat{c^*} = -\frac{\widehat{Cov}[g(X), h(X)]}{\widehat{Var}[h(X)]}\text{で推定する}$$

以上より、

$$\hat{\theta}_n^{(3)} = \hat{g}(X) - \frac{\widehat{Cov}[g(X), h(X)]}{\widehat{Var}[h(X)]}(\hat{h}(X) - \theta_h)\ \text{ととれば　標本値だけで計算できる。}$$

■例 $g(U) = \exp(U)$, 制御変量として、$h(U) = U$
$E(h(U)) = E(U) = \frac{1}{2}, Var(h(U)) = Var(U) = \frac{1}{12}$
$\mathrm{Cov}(g(U), h(U)) = Cov(e^U, U) = E(e^U U) - E(e^U)E(U) = \int_0^1 xe^e dx - \frac{e-1}{2} = 1 - \frac{e-1}{2} \fallingdotseq 0.140859086$
$Var(g(U)) = Var(e^U) = \frac{e^2-1}{2} - (e-1)^2 \fallingdotseq 0.242035607$
$Var(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{n}Var(e^U) = \frac{1}{n}0.242035607$
$Var(\hat{\theta}_n^{(3)}) = \frac{1}{n}\left(Var(e^U) - \frac{\mathrm{Cov}(e^U, U)^2}{Var(U)}\right) = \frac{1}{n}\left(Var(e^U) - 12\mathrm{Cov}(e^U, U)^2\right) = \frac{1}{n}0.0394022292$

4.4　第 4 章の練習問題

■**練習問題** 4.1　(1) $U_1, \ldots, U_n \sim U(0,1)$ で独立とする。
$X = \max(U_1, \ldots, U_n)$ の分布関数、密度関数を求めよ。
(2) X を U から逆関数法で作れ。また、$Y = \min(U_1, \ldots, U_n)$ も同様にせよ

■**練習問題** 4.2　$P(X > 0) = 1$ なる確率変数 X の分布関数を $F(x)$ とする。以下の確率変数の分布関数を求めよ。
(1) X^2　(2) $\sqrt{X}$　(3)$^{(*)}$ $\sin X$　(4) $h(X)$ (h は単調増加)　(5) $F(X)$　(6) $(F(X))^2$　(7) $h(F(X))$

■**練習問題** 4.3　$g(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$ ととって rejection method を行い、$N(0,1)$ を作れ。$\lambda = 1$ が最適を示せ。

■**練習問題** 4.4$^{(*)}$　(e のシミュレーション)
(1)$N = \min\{n | \sum_{i=1}^{n} U_i > 1\}$ のとき、$E(N) = e$ を示せ。$V(N)$ も求めよ。ただし、$U_1, \ldots, U_n$ は独立で同分布、$U_i \sim U(0,1)$ とする。
(2)$M = \min\{n | U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_{n-1} > U_n\}$ のとき、$E(M) = e$ を示せ。$V(M)$ も求めよ。

■**練習問題** 4.5　$g(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$ に対して、4.3.1 の負の相関法を適用せよ。

■**練習問題** 4.6　練習問題 4.4 の (1) で、負の相関法を用いればどうなるか調べてみよ

■**練習問題** 4.7　4.3.2 の例題で制御変量として、$h(X) = X^2$ をとればどうか？
また、$(g(X) = \sqrt{1 - X^2}, h(X) = X), (g(X) = \sqrt{1 - X^2}, h(X) = X^2)$ の場合も調べてみよ

■**練習問題** 4.8　密度関数 $g(x)$ および c,rejection method を用いて密度関数 $f(x)$ を有する確率変数を生成したい。

$$f(x) = 30x^2(1-x)^2 \quad (0 < x < 1)$$

$$g(x) = 1 \quad (0 < x < 1)$$

定数 c を適当に定めることにより、確率変数を求めるための繰り返し回数を最小にしたい。c を求めよ。また、繰り返し回数の平均値を求めよ。

■**練習問題** 4.9　　株価の変動をシミュレートした
1．株価は幾何ブラウン運動するとし、$\mu = 0.1, \quad \sigma^2 = 0.04$ とする
2．時間の単位はステップ毎に 1 とする。つまり、S_i を i 時点の株価とすると、$S_{i+1} = S_i \times e^{N(\mu,\sigma^2)}$
3．株価変動は分布の逆関数法で作られるものとする
4．$t = 0$ における価格は 100 とする
5．[0,1] 区間の一様分布の確率変数が a, b と与えられ、それぞれ $\Phi^{-1}(a) = 1.2, \ \Phi^{-1}(b) = -0.6$
ここで、$\Phi(x) = P(N(0,1) \leq x)$ であったとする
シミュレーションの結果、$t = 1$ における価格が $F, \quad t = 2$ における価格が G であったとする。
このとき、GF を求めよ。

■**練習問題** 4.10　混合分布 Y をシミュレートしたい。
Y は、確率 0.4 で平均 1.6 の指数分布に従い、確率 0.6 で平均 4 の指数分布に従うものとする。[0,1] 上の一様分布に従う確率変数として、0.6, 0.25 をこの順で得た。
シミュレーションの結果 Y を求めよ。ただし、始めの一様確率変数の値で合成法によりどちらの指数分布かを決めるものとし、後の一様確率変数の値で逆関数法により Y の値を決定することとする。

■**練習問題** 4.11　密度関数 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}e^{-3x} & (x > 0) \\ \frac{3}{2}e^{3x} & (x < 0) \end{cases}$ を持つ確率変数 X をシミュレートせよ。(一様確率変数から生成せよ。)

■**練習問題** 4.12　$a, b > 0$ として、次の分布関数を持つ確率変数 X(ワイブル分布) をシミュレートせよ。

$$F_X(x) = 1 - e^{-ax^b} \quad x \geqq 0$$

■**練習問題** 4.13　$a, b > 0$ として、次の分布関数を持つ確率変数 X(極値分布の 1 種) をシミュレートせよ。

$$F_X(x) = e^{-e^{-x}} \quad -\infty < x < \infty$$

■**練習問題** 4.14　X_iの分布関数を F_i とし、それぞれ $X_i = g_i(U)$ とシミュレートできるものとする。このとき、$F_X(x) = \Pi_{i=1}^n F_i(x)$, $F_Y(x) = 1 - \Pi_{i=1}^n (1 - F_i(x))$ を分布関数に持つ確率変数 X, Y をシミュレートせよ。

■**練習問題** 4.15　密度関数 $f_X(x) = \frac{1}{6}e^{-x} + \frac{2}{3}e^{-2x} + \frac{3}{2}e^{-3x} \quad (x > 0)$ を持つ確率変数 X をシミュレートせよ。

■**練習問題** 4.16　次の分布関数を持つ確率変数 X をシミュレートせよ。

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 - e^{-2x}) + \frac{3}{4}x & (0 \leqq x \leqq 1) \\ \frac{1}{4}(1 - e^{-2x}) + \frac{3}{4} & (x \geqq 1) \end{cases}$$

■**練習問題** 4.17　次の分布関数を持つ確率変数 X をシミュレートせよ。

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{5}(1 - e^{-5x}) + \frac{1}{5}x^2 & (0 \leqq x \leqq 1) \\ \frac{4}{5}(1 - e^{-5x}) + \frac{1}{5} & (x \geqq 1) \end{cases}$$

■**練習問題** $^{(*)}$4.18　2 次元確率変数 (X, Y) をシミュレートする方法として、
(a) 周辺分布 X と、$X = x$ のもとで Y の条件付分布を求め、この順番でシミュレートする方法
(b) 独立確率変数の関数で表し、その独立確率変数をシミュレートする方法
などがある。
以下の分布をシミュレートせよ。
(1) 3 項分布 $mul(n, p_1, p_2)$
(2)(X, Y) の同時密度関数が、　$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 2 & (x > 0, y > 0, x + y < 1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$
(3)$N(\binom{\mu_1}{\mu_2}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma^2 \end{pmatrix})$

■練習問題 4.19　次の密度関数を持つ確率変数 X をシミュレートせよ。($U \sim U(0,1)$ で逆関数を用いて作れ。)

(a)

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < \infty)$$

(b)

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x) & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(c)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\log 2}\frac{x}{1+x^2} & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(d)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

■練習問題 4.20　$X_1 \sim X_2 \sim N(0,1)$ で独立とする。　$\sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ をシミュレートせよ。。($U \sim U(0,1)$ で逆関数を用いて作れ。)

■練習問題 4.21　$\int_0^1 xe^x dx$ を $U_1, U_2, \ldots, U_{2M}$ の $2M$ 個の一様乱数を用いてモンテカルロシミュレーションしたときの誤差の分散　と　負の相関法 ($U_1, U_2, \ldots, U_M, 1-U_1, 1-U_2, \ldots, 1-U_M$ の $2M$ 個の一様乱数を用いた場合) の誤差の分散を計算せよ。

■練習問題 4.22　$\int_0^1 e^{-x} dx$ を $U_1, U_2, \ldots, U_{2M}$ の $2M$ 個の一様乱数を用いてモンテカルロシミュレーションしたときの誤差の分散　と　負の相関法 ($U_1, U_2, \ldots, U_M, 1-U_1, 1-U_2, \ldots, 1-U_M$ の $2M$ 個の一様乱数を用いた場合) の誤差の分散を計算せよ。

■練習問題 4.23　$\int_0^1 xe^x dx$ を制御変量 $h(U) = U$ をとってモンテカルロシミュレーションしたときの誤差項の分散を計算し、制御変量をとらずに n 個の一様乱数でシミュレートした場合の誤差項の分散も計算せよ。制御変量 $h(U) = U^2$ の場合、制御変量 $h(U) = e^U$ の場合も計算せよ。

■練習問題 (*)4.24　X は　$P(X > 0) = 1$ で分布関数 $F_X(x) = x(1 - e^{-1/x})$　　$(0 < x < \infty)$ を持つとする。以下の問いに答えよ。
(1) $\frac{1}{A} \sim Exp(1)$ で　$A = a$ のもとで　$Y \sim U(0,a)$ である確率変数 Y の分布関数を求めよ。
(2) X をシミュレートせよ。

第 5 章

線形計画法要綱

5.1　線形計画法とは

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq 0 \text{ の制約条件の下で、}$$

$$z = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ を最大化する。}$$

以下では　max と書いたら最大化する意味とする。

例　$z = x + y$ を max

$$\text{ただし、} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$$

$(x, y) = (10, 10)$ のとき、最大値 20

5.2　標準形の線形計画法

5.1 の例題を、スラック変数を導入し、$z = x + y + 0u + 0v$
ただし、$x + 4y + u = 50, 4x + y + v = 50, x, y, u, v \geq 0$[*1]
これの行列ベクトル表現は、

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} \text{ を max}$$

$$\text{ただし、} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} \geq 0$$

[*1] このように 50 と $x + 4y$ の差は非負となりそれを u とおく。　なお、スラック (slack) という単語はゆるみという意味である。

$$\text{実行可能領域}\ M=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\u\\v\end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{pmatrix}1&4&1&0\\4&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50\\50\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\u\\v\end{pmatrix}\geq 0\right\}$$

このように変形したものを　標準形の線形計画法 (標準 L.P.(Linear Programming)) という。また、目的関数 z が最小とするものは、標準形では $z'=-z$ が最大という問題に変形しておく。

5.3　頂点 (端点) の求め方

■凸集合　$M\subset R^n$ が凸集合であるとは、$\forall\vec{x}\in M,\forall\vec{y}\in M,\forall t\ (0\leq t\leq 1),t\vec{x}+(1-t)\vec{y}\in M$

■標準 L.P. の実行可能領域　$M=\{\vec{x}|A\vec{x}=\vec{b},\vec{x}\geq 0\}$ は R^n の凸集合
$\because A\vec{x}=\vec{b},\vec{x}\geq 0,A\vec{y}=\vec{b},\vec{y}\geq 0$ とすると、$A(t\vec{x}+(1-t)\vec{y})=tA\vec{x}+(1-t)A\vec{y}=t\vec{b}+(1-t)\vec{b}=\vec{b}$
$0\leq t\leq 1$ より、$t\vec{x}+(1-t)\vec{y}\geq 0,\quad\therefore t\vec{x}+(1-t)\vec{y}\in M$

■凸集合の頂点　$\vec{x}$ が凸集合 M の頂点 (端点) であるとは、$\vec{x}=\frac{\vec{y}+\vec{z}}{2}$ $(\vec{y}\in M,\vec{z}\in M,\vec{y}\neq\vec{z})$ とは書けないこと

■定理

$$M=\{\vec{x}\mid(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\vec{b},\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}\geq 0\}\subset R^5$$

ここで、$\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_5,\vec{b}\in R^3$ とする
$\{1,2,3,4,5\}\supset\{i,j,k\}$ として、$x_i\vec{a}_i+x_j\vec{a}_j+x_k\vec{a}_k=\vec{b}$ で、

$x_i<0$ or $x_j<0$ or $x_k<0\rightarrow\tilde{\vec{x}}\notin M$
$x_i\geq 0$ かつ $x_j\geq 0$ かつ $x_k\geq 0$ かつ $\vec{a}_i,\vec{a}_j,\vec{a}_k$ が 1 次独立 $\rightarrow\tilde{\vec{x}}$ は M の頂点 (このとき、$\vec{a}_i,\vec{a}_j,\vec{a}_k$ を頂点を表す基底、x_i,x_j,x_k を基底変数という)
$x_i\geq 0$ かつ $x_j\geq 0$ かつ $x_k\geq 0$ かつ $\vec{a}_i,\vec{a}_j,\vec{a}_k$ が 1 次従属 $\rightarrow\tilde{\vec{x}}$ は M の頂点ではない

（ここで、$\tilde{\vec{x}}$ の定義は　$\vec{x}$ で選んだ i,j,k 以外の成分は 0 としたもの.)
(参考 $\vec{a}_i,\vec{a}_j,\vec{a}_k$ が一次独立であるとは、$\alpha_i\vec{a}_i+\alpha_j\vec{a}_j+\alpha_k\vec{a}_k=\vec{0}\rightarrow\alpha_i=\alpha_j=\alpha_k=0$
$\vec{a}_i,\vec{a}_j,\vec{a}_k$ が一次従属であるとは、一次独立でないこと
つまり、$\alpha_i\neq 0\cup\alpha_j\neq 0\cup\alpha_k\neq 0$ となる $\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k$ が存在し、$\alpha_i\vec{a}_i+\alpha_j\vec{a}_j+\alpha_k\vec{a}_k=\vec{0}$)

まとめると、頂点（端点）の求め方は　$\vec{b}$ が m 次元ベクトルのときは、n 個の $\vec{a}_i$ から m 個取り出しそれらで $\vec{b}$ の 1 次結合を作ったとき、上のケース　だけ取り出せばよい。また、最大 $\binom{n}{m}$ 通り調べる必要があるがそのうちで選んだ m 個のベクトルたちが 1 次独立なものだけを調べると良い。また、$m+1$ 個以上は必ず 1 次従属となるので調べなくてもよい。

■例題

$$M=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{pmatrix}1&5&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}180\\100\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\geq 0\right\}$$ の頂点を求めよ

■解　$\vec{a}_1=\binom{1}{1}, \vec{a}_2=\binom{5}{1}, \vec{a}_3=\binom{1}{0}, \vec{a}_4=\binom{0}{1}$ とおく。

$i\neq j$ なら $\vec{a}_i,\vec{a}_j$ は一次独立は明らか。よって、$\binom{4}{2}=6$ 個全て調べる

$\vec{a}_1,\vec{a}_2$ のとき、$P_1=\begin{pmatrix}80\\20\\0\\0\end{pmatrix}$ は M の頂点，　$\vec{a}_1,\vec{a}_3$ のとき、$P_2=\begin{pmatrix}100\\0\\80\\0\end{pmatrix}$ は M の頂点

$\vec{a}_1,\vec{a}_4$ のとき、$\begin{pmatrix}180\\0\\0\\-80\end{pmatrix}\notin M$，　$\vec{a}_2,\vec{a}_3$ のとき、$\begin{pmatrix}0\\100\\-320\\0\end{pmatrix}\notin M$

$\vec{a}_2,\vec{a}_4$ のとき、$P_3=\begin{pmatrix}0\\36\\0\\64\end{pmatrix}$ は M の頂点，　$\vec{a}_3,\vec{a}_4$ のとき、$P_4=\begin{pmatrix}0\\0\\180\\100\end{pmatrix}$ は M の頂点

また、次の定理が成立することも 頂点 の定義より、ほぼ明らかである。

■定理　線形計画法において　最大値は（存在するなら）頂点でとられる。[*2]

□

これでさらに $z=6x_1+12x_2$を max という目的関数であったとすると、

P_1で $z=720, P_2$で $z=600, P_3$で $z=432, P_4$で $z=0$ より、$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}80\\20\\0\\0\end{pmatrix}$ で、

z は最大値 720 をとることがわかる

■練習問題　上で、$z'=-6x_1+12x_2, z''=6x_1-6x_2$ それぞれの最大値を求めよ.

答え　z'は P_3で最大値 432 をとり、　z''は P_2で最大値 600 をとる。

[*2] $z=x+y$ を max ただし、$x-y\leqq 2,\ x,y\geqq 0$ のように最大値が存在しない (最大値$=+\infty$) 場合もある。　これは　後のシンプレックス法でいうと　目的行 (目的関数に対応する行（最下行、下線の下の行) の負の係数の同じ列の上の係数がすべて負となるものが存在することであり、この例を実際書いてみると良い。

5.4　シンプレックス法

[*3]

■シンプレックス基準　ここでは、頂点を表現する基底のとりかえによって、目的関数の値を増やすことを考える

具体的に例題で見てみよう

$z = 2x_1 + x_2$を max

制約条件　$x_1 + x_2 \leq 5,\ 3x_1 + x_2 \leq 10,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

スラック変数を用いて、標準化すると、

$z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4$を max

$x_1 + x_2 + x_3 = 5,\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 10, x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$

行列表現すると、

$$z = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

これを、$-2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + z = 0$ も入れ、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \text{と考える}$$

この式は、頂点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ において目的関数 z の値が 0 であることを示している

これを、頂点を表す基底 $\{\vec{a}_3, \vec{a}_4\}$[*4]から $\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}, \{\vec{a}_1, \vec{a}_4\}, \{\vec{a}_2, \vec{a}_3\}, \{\vec{a}_2, \vec{a}_4\}$ のどれかに変更することにより目的関数 z の値を増やすが、目的行の 負の 係数のうち一番小さいものが　-2 なので　まず第 1 列を選ぶ。この第 1 列をピボット列という。　つまり、頂点を表す基底を $\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}, \{\vec{a}_1, \vec{a}_4\}$ のどちらかに変更する。$\frac{5}{1}$ と $\frac{10}{3}$ を比べれば、$\frac{10}{3}$ の方が小さいので、$\frac{10}{3}$ を選び、したがって基底を $\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}$ に変更する。この選んだ第 2 行をピボット行、(2,1) 成分（第 2 行、第 1 列要素でこの場合は ③) をピボット成分という。[*5]

[*3] ここでは、元のアクチュアリ-会テキストのやりかたを変更した。元のテキストの方法は数学的には正しいが、実際に解くには時間がかかる (目的関数の値の増やし方がしらみつぶしになる) ため、本節でのシンプレックス法を採用した。

[*4] このように頂点を表す基底がすぐにとれるのはスラック変数に対応する基底で、そうなるためには制約条件の定数のところ（例題の場合は 5,10) が正であることが必要である。そうでない場合は、例えば　罰金法などでまず出発する頂点を見つけねばならず、これに関しては下にあげた　参考書参照

[*5] この部分が　元のテキスト 5-17 での　「最初の基底 $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_m}$ から　$\vec{a_2}$ を外して、$\vec{a_i}$ を導入」　の部分に対応している。　つまり、頂点を表す基底 $\vec{a_3}, \vec{a_4}$ から　$\vec{a_4}$ を外して、$\vec{a_1}$ を導入することにより、目的関数の値を上昇させたのである。
さらにやや発展的な話題を含めた参考書として　ファイナンスの最適化入門　藤田岳彦著　講談社　をあげておく。

つまり、

$$
\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
③ & 1 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ \hline
-2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{10}{3} \\ \hline
-2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{ccccc|c}
0 & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\
1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{10}{3} \\ \hline
0 & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{20}{3}
\end{array}
$$

一般的に示すと、

$$
\begin{array}{ccccc|c}
a & * & * & * & * & a' \\
b & * & * & * & * & b' \\ \hline
c & * & * & * & * & c'
\end{array}
$$
で、$a > 0, b > 0, c < 0$ とすると、

2行目で掃き出すと
$$
\begin{array}{ccccc|c}
a & * & * & * & * & a' \\
1 & * & * & * & * & \frac{b'}{b} \\ \hline
c & * & * & * & * & c'
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{ccccc|c}
0 & * & * & * & * & a' - a\frac{b'}{b} \\
1 & * & * & * & * & \frac{b'}{b} \\ \hline
0 & * & * & * & * & c' - c\frac{b'}{b}
\end{array}
$$
となり、

ここで $a' - a\frac{b'}{b} \geq 0 \rightleftarrows \frac{a'}{a} \geq \frac{b'}{b}$ となり、これが $\frac{a'}{a} \geq \frac{b'}{b}$ のうち小さい方を選ぶ理由で、
このとき目的関数の値は $c' - c\frac{b'}{b} - c' = (-c)\frac{b'}{b} \geq 0$ となり、$(-c)\frac{b'}{b}$ 上昇している。

さらに、$-\frac{1}{3} < 0$ より、基底を $\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}$ から基底 $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ か基底 $\{\vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ に選べば目的関数の値は上昇する。
$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{2}, \frac{\frac{10}{3}}{\frac{1}{3}} = 10$ より、1行目を選ぶ

$$
\begin{array}{ccccc|c}
0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\
1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{10}{3} \\ \hline
0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{20}{3}
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{ccccc|c}
0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\
1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ \hline
0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{15}{2}
\end{array}
$$

以上より最適（目的行の係数がすべて非負だから）[*6]

■まとめ

① 標準線形計画問題に直す
② 出発する頂点をとってくる。簡単なのはスラック変数から作られる頂点
③ 頂点を (隣に)[*7]移動させること。このとき、まず　ピボット列を選び、その後ピボット行を選ぶ。基底の変更を示した手順どおりに行うと目的関数の値は上昇する。
④ これが最適かどうか（目的行の係数がすべて非負かどうか？）を判定し、最適でなければ　に戻りこのサイクルを繰り返す。

[*6] $1/2u + 1/6v + z = 15/2$ より、$u = v = 0$ のとき　z は最大となる。このように　目的行の係数がすべて非負になるまでシンプレックス法をやり続ける。
[*7] 頂点を表す基底を作るベクトルの一つだけを取り換えることが　隣に移動することの定義である。

5.5　第 5 章の練習問題

■練習問題 5.1　次の標準線型計画法の実行可能領域 $\{\vec{x}|A\vec{x}=\vec{b},\vec{x}\geqq 0,\vec{x}\in \mathrm{R^n}\}=\{\vec{x}|(\vec{a_1},\vec{a_2},\ldots,\vec{a_n})\vec{x}=\vec{b},\ \vec{x}\geqq 0,\vec{x}={}^t(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$
の頂点を求めよ。
また、それぞれで与えられた目的関数に関する線形計画問題を解け。

(1)$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\binom{9}{1}$
(1.1)$w=2x_1+x_2+x_3$
(1.2)$w=x_1-x_2+3x_3$

(2)$A=(1,2,3),\vec{b}=4$
(2.1) $w=x_1+x_2+x_3$
(2.2) $w=2x_1-x_2+6x_3$

(3) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}6\\6\\3\end{pmatrix}$
(3.3) $w=x_1+x_2+x_3+x_4$
(3.4) $w=-10x_1+x_2-x_3-x_4$

■練習問題 5.2　次のモデリングテキストの練習問題 5.7.1 を標準形に直した上でシンプレックス法で解け。

(1)$w=x+y$ を max

条件　$3x+y\leqq 12,\ x+3y\leqq 12,\ \ x,y\geqq 0$

(2)$w=x+2y$ を max

条件　$x+y\leqq 5,\ x+3y\leqq 12,\ 3x+y\leqq 10,\ x,y\geqq 0$

(3)$w=x+y$ を max

条件　$4x+y\leqq 8,\ x+2y\leqq 10,\ 10x+y\leqq 15,\ x,y\geqq 0$

(4)$w=3x+2y$ を max

条件　$6x+15y\leqq 390,\ 2x+y\leqq 40,\ x,y\geqq 0$

(5)$w = x + 2y + z$ を max

条件　$x + y + z \leqq 18,\ x + 3y + z \leqq 21,\ 3x + y + z \leqq 24,\ x, y, z \geqq 0$

(6)$w = 2x + y + z$ を max

条件　$x + y + z \leqq 18,\ x + 3y + z \leqq 21,\ 4x + y + z \leqq 24,\ x, y, z \geqq 0$

第 6 章

確率・統計のまとめ

6.1　確率の基礎

■確率空間　• $\Omega =$ 標本空間（任意の集合）

【例】

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$=有限標本空間

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots\}$=可算標本空間

$\Omega = [0, 1]$=非可算標本空間

• 標本空間の部分集合を事象という。

• A を事象とするとき、$P(A) =$ 事象 A が起こる確率 $(0 \leq P(A) \leq 1)$ が決まり、

$A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ (排反のとき)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \text{ (可算加法性)}$$

を満たすとき、P を確率（測度）という。

この時、$A \cap B = \emptyset \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

一般には、$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ などが成立する。

この (Ω, 事象全体, P) の組を確率空間という。　これは、Ω が同じでも正しいサイコロとインチキなサイコロのように P の部分が違うと異なる確率空間と考えたいからである。

■確率変数　• $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

つまり $\omega \in \Omega$ が決まれば、ある実数 $X(\omega) \in \mathbb{R}$ が決まり、全ての $x (\in \mathbb{R})$ について $\{\omega | X(\omega) \leq x\} = X^{-1}((-\infty, x])$ が事象となるものを確率変数という。

すると、$\{a \leq X \leq b\}$, $\{a < X < b\}$, $\{X > a\}$ などは事象となりそれが起こる確率 $P(a \leq X \leq b)$, $P(a < X < b)$, $P(X > a)$ が定まる。

■確率分布　X のとる値が $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \{1, 2, \cdots, N\}$ など有限集合、可算集合となるものを離散確率変数という。

このとき、$f(k) = P(X = k)$ を X の確率関数といい $f(k)$ は X の確率分布を決定する。場合によっては $f(k)$ を X の離散確率分布という。

X, Y を離散確率変数とするとき、$f(k, l) = P(X = k \cap Y = l)$ を (X, Y) の同時確率関数といい、$f(k, l)$ は (X, Y) の同時確率分布を決定する。$P(X = k) = \sum_l P(X = k \cap Y = l)$ となるが、このように考えたとき、$P(X = k)$ を $P(X = k \cap Y = l)$ から得られた周辺分布という。

X のとる値が $\mathbb{R}$ のように非可算集合で、全ての x について $P(X = x) = 0$ となるものを連続確率変数という。

このとき、ある非負値関数 $f_X(x)$ が存在して、すべての $a, b\,(a < b)$ に対して

$$P(a{\leq}X{\leq}b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

となる。$P(X = x) = 0$ より、$P(a{\leq}X{\leq}b) = P(a < X < b)$ である。この $f_X(x)$ を X の確率密度関数という。

この X により $\mathbb{R}$ 上の確率測度 P^X, $P^X([a, b]) = P(a{\leq}X{\leq}b)$ が決定されるが、この P^X を X の確率分布という。(注意：実は離散確率分布の場合もこれが本来の定義である）

すると、X の確率分布は確率密度関数 $f_X(x)$ によって決定される。同様に X, Y が連続確率変数とするとき、非負値関数 $f_{(X,Y)}(x, y)$ が存在して、全ての $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D(厳密にいうとルベーグ可測集合) に対して

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f_{(X,Y)}(x, y)\,dx\,dy$$

(注意: 上の定義は厳密には絶対連続分布というべきであるが、本書では連続であるが絶対連続でないものは考えない)

離散の場合と同様に、周辺密度関数 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ は

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\,dx$$

を満たす。

■分布関数　離散・連続どちらの場合も $F_X(x) = P(X{\leq}x)$ を X の分布関数という。$F_X(x)$ は x の関数として単調非減少、$\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1, \ \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ を満たす。

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du \qquad \text{また、} f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$$

$F_{(X,Y)}(x,\, y) = P(X \leqq x \cap Y \leqq y)$ を (X, Y) の同時分布関数という。

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}F_{(X,Y)}(x,\, y)$$

が成立している。

計算例　$x, y \geqq 0$ に対して、$F_{(X,Y)}(x, y) = 1 - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+x+y}$ のとき、

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{(1+x+y)^3} & (x, y \geqq 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

■独立の定義　離散確率変数に対しては、

すべての i, j について $P(X = i \cap Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$

連続確率変数に対しては、

すべての $a, b, c, d\,(a < b,\ c < d)$ に対して $P(a < X < b \cap c < Y < d) = P(a < X < b)P(c < Y < d)$

つまり $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ が成立するとき、X, Y は独立であるという。

■期待値の定義

$$E(h(X)) = \int_\Omega h(X(\omega))dP(\omega) = \begin{cases} \displaystyle\sum_k h(k)P(X=k) & X\text{:離散のとき} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f_X(x)\,dx & X\text{:連続のとき} \end{cases}$$

$$E(h(X,Y)) = \int_\Omega h(X(\omega),\,Y(\omega))dP(\omega) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k,\,l} h(k,\,l)P(X=k\cap Y=l) & X,\,Y\text{ が離散のとき} \\ \displaystyle\iint_{\mathbf{R^2}} h(x,\,y)f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy & X,Y\text{ が連続のとき} \end{cases}$$

■計算例　$E(Po(\lambda)) = \sum_{k=0}^\infty kP(Po(\lambda)) = k) = \sum_{k=1}^\infty \frac{(\lambda)^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$

■計算例　$P(X=k) = \frac{18}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$　$(k=0,1,2,\dots)$ とすると、$E(X+1) = \sum_{k=0}^\infty \frac{18}{(k+2)(k+3)(k+4)} = \sum_{k=0}^\infty(\frac{9}{(k+2)(k+3)} - \frac{9}{(k+3)(k+4)}) = \frac{3}{2}$ よって　$E(X) = \frac{1}{2}$ 同様に $E((X+1)(X+2)) = 6$ より、　$E(X^2) = \frac{5}{2}$, $V(X) = \frac{5}{2} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$

■計算例　$f_X(x) = 2x$　$(0 < x < 1)$ のとき、$E(X) = \int_0^1 x(2x)dx = \frac{2}{3}$, $E(e^X) = \int_0^1 e^x(2x)dx = 2[(x-1)e^x]_0^1 = 2$

■練習問題 6.1　$f_X(x) = \frac{c}{x}$　$(1 < x < 2)$ のとき、以下を求めよ。
(1) 定数 c　(2) $E(X)$ (3)$E(\log X)$　(4) $E(X^2e^X)$

通常は　上の公式を用いて期待値を計算するが、テイル確率（しっぽ確率)($P(X \geqq x)$ が与えられているとき、期待値、分散などを計算する場合も多い。この場合はテイル確率から　確率関数や密度関数を計算していては手間がかかるし、テイル確率のままで計算するほうが簡単である場合が多い。

■テイル確率による期待値計算（離散の場合)　$P(X \geqq 0) = 1$ とする。
このとき、

$$E(X) = \sum_{k=1}^\infty P(X \geqq k) = \sum_{k=0}^\infty P(X > k)$$

□

証明 $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty P(X \geqq k) = \sum_{k=1}^\infty\sum_{l=k}^\infty P(X=l) = \sum_{l=1}^\infty\sum_{k=1}^{l} P(X=l) = \sum_{l=1}^\infty lP(X=l) = E(X)$

同じことであるが　指示関数を用いると、$\displaystyle\sum_{k=1}^\infty P(X \geqq k) = E(\sum_{k=1}^\infty 1_{X\geqq k}) = E(\sum_{k=1}^{X} 1) = E(X)$

■

また、$\sum_{k=1}^{\infty} kP(X \geqq k) = E(\sum_{k=1}^{\infty} k1_{X \geqq k}) = E(\sum_{k=1}^{X} k) = E\frac{X(X+1)}{2}$ もときどき用いられる。 また、負の値もとる場合は　$X = \max(X,0) + \min(X,0) = \max(X,0) - \max(-X,0)$ より,
$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty}(P(\max(X,0) \geqq k) - P(\max(-X,0) \geqq k)) = \sum_{k=1}^{\infty}(P(X \geqq k) - P(X \leqq -k))$ で計算する。
■計算例　$P(Ge(p) \geqq k) = \sum_{l=k}^{\infty} P(Ge(p) = l) = (1-p)^k$ よって
$E(Ge(p)) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k = \frac{1-p}{1-(1-p)} = \frac{1-p}{p}$

■計算例　$P(X \geqq k) = \frac{6}{(k+1)(k+2)(k+3)}$　$(k \geqq 0)$ のとき、$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{3}{(k+1)(k+2)} - \frac{3}{(k+2)(k+3)}) = \frac{1}{2}$
また, $\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\frac{6}{(k+1)(k+2)(k+3)} = 2$ 一方、これは $E(\frac{X(X+1)}{2} + X)$ とも等しい。 よって　$E(X^2) = \frac{5}{2}, V(X) = \frac{9}{4}$

■練習問題 6.2　X の取る値が $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ で すべての　$k \in \mathbb{N}$ に対して $P(X \geqq k) = \frac{c}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$ が満たされている。　以下を求めよ。
(1) 定数 c　(2) $E(X)$　(3) $V(X)$

■テイル確率による期待値計算（連続の場合）　$P(X \geqq 0) = 1$ とする。このとき、

$$E(X) = \int_0^{\infty} P(X \geqq t)dt$$

□

証明　指示関数を用いると、$\int_0^{\infty} P(X \geqq t)dt = E(\int_0^{\infty} 1_{X \geqq t})dt = E(\int_0^X 1dt) = E(X)$

■

また、$\int_0^{\infty} tP(X \geqq t)dt = E(\int_0^{\infty} t1_{X \geqq t}dt) = E(\int_0^X tdt) = E(\frac{X^2}{2})$ もときどき用いられる。 また、負の値もとる場合は
$X = \max(X,0) + \min(X,0) = \max(X,0) - \max(-X,0)$ より,
$E(X) = \int_0^{\infty}(P(\max(X,0) \geqq t) - P(\max(-X,0) \geqq t))dt = \int_0^{\infty}(P(X \geqq t) - P(X \leqq -t))dt$ で計算する。
また後でも用いるが条件付期待値の場合にももちろんこれは使える。例えば, $x > 0$ として、　$E(X|X > x) = \int_0^{\infty} P(X > t|X > x)dt = \int_0^{x} P(X > t|X > x)dt + \int_x^{\infty} P(X > t|X > x)dt = x + \int_x^{\infty} P(X > t|X > x)dt$ で計算される。

■計算例　$P(Exp(\lambda) \geqq t) = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt = e^{-\lambda t}$ よって $E(Exp(\lambda)) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}$

■計算例　$X \sim Exp(\lambda)$ とすると、$x > 0$ として,$E(X|X > x) = x + \int_x^\infty P(X > t|X > x)dt = x + \int_x^\infty e^{-\lambda(t-x)}dt = x + \frac{1}{\lambda}$
$E(X|X < x) = \int_0^\infty P(X > t|X < x)dt = \int_0^x P(X > t|X < x)dt = \int_0^x \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda x}}dt = \frac{1}{\lambda} - x\frac{e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}}$
$E(X^2|X > x) = \int_0^\infty 2tP(X > t|X > x)dt = \int_0^x 2tdt + \int_x^\infty 2te^{-\lambda(t-x)}dt = x^2 + 2\int_0^\infty (u+x)e^{-u}du = x^2 + \frac{2x}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}$, これより、条件付分散 $V(X|X > x) = E(X^2|X > x) - (E(X|X > x))^2 = x^2 + \frac{2x}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} - (x + \frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ [*1]

■練習問題 6.3　(1) 非負整数に値をとる確率変数 X が　$P(X \geqq k) = (k+1)2^{-k}$　$(k \geqq 0)$ を満たしている。$E(X), V(X)$　を求めよ。

(2) 非負実数に値をとる連続確率変数 X が　$P(X > t) = (t+1)e^{-t}$　$(t > 0)$ を満たしている。$E(X)$, $V(X)$　を求めよ。

■期待値の性質　• a, b, c, d を定数とすると、$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$ (X, Y の独立性は必要なし)

- X, Y を独立とするとき、$E(XY) = E(X)E(Y)$, $E(h(X)g(Y)) = E(h(X))E(g(Y))$

■分散、標準偏差、共分散、相関係数の定義　$V(X) = E((X - m)^2)$　$(m = E(X))$ を X の分散

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ を X の標準偏差といい、どちらも X のバラツキを表す量である。

$Cov(X, Y) = E((X - m)(Y - m'))$ を (X, Y) の共分散 (ここで、$m = E(X)$, $m' = E(Y)$）といい、

$\rho(X, Y) = \dfrac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = Cov(X$ の標準化$, Y$ の標準化$)$　を (X, Y) の相関係数という。

■$V(X)$, $\sigma(X)$, $Cov(X, Y)$, $\rho(X, Y)$ の基本的性質　(a, b, c, d は定数とする)

- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- $V(a + bX) = b^2V(X)$, $\sigma(a + bX) = |b|\sigma(X)$
- $V(X) \geq 0$
  $V(X) = 0 \Longrightarrow X =$ 定数 c　つまり $P(X = c) = 1$
  分散や標準偏差は、いついかなるときでも非負であり定数の場合を除いて正である。
- $V(aX + bY) = a^2V(X) + 2ab\,Cov(X, Y) + b^2V(Y)$
  とくに、X, Y が独立ならば、$Cov(X, Y) = 0$ (無相関) なので、
  $V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y)$
- $Cov(X, X) = V(X)$　・$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- $Cov(aX + bY, cS + dT) = ac\,Cov(X, S) + ad\,Cov(X, T) + bc\,Cov(Y, S) + bd\,Cov(Y, T)$
- $Cov(X, c) = 0$
- $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$
  $\rho(X, Y) = 1 \Longrightarrow Y = aX + b$ $(a > 0)$ (完全な正の相関)
  $\rho(X, Y) = -1 \Longrightarrow Y = aX + b$ $(a < 0)$ (完全な負の相関)
- $ac > 0$ のとき、$\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y)$ （相関係数は単位のとり方によらない）

[*1] 後で見るように指数分布の無記憶性を使えば $X > x$(x 歳で生きている) と余命 $X - x$ は独立なので　$E(X|X > x) = x + E(X - x|X > x) = x + E(Exp(\lambda)) = x + \frac{1}{\lambda}$, $V(X|X > x) = V(X - x|X > x) = V(Exp(\lambda)) = \frac{1}{\lambda^2}$ とできる。

■例　正しいサイコロを１個投げる確率空間　$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$　$P(\{i\})=\frac{1}{6}\ (i=1,2,\cdots,6)$

$X(\omega)=\omega^2$(=サイコロの目 ^{2}) とすると、$E(X)=\dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{i=1}^{6}i^2=\dfrac{91}{6}$

$E(X^{\frac{3}{2}})=\dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{i=1}^{6}i^3=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{6\cdot 7}{2}\right)^2=\dfrac{147}{2}$

■例　表が出る確率が p である硬貨を 2 枚投げる確率空間　$\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$

$P(\{(H,H)\})=p^2,\ \ P(\{(H,T)\})=P(\{(T,H)\})=p(1-p),\ \ P(\{(T,T)\})=(1-p)^2$

$X(\omega)=\omega$ の H の個数=表の枚数。

$P(X=2)=p^2,\ \ P(X=1)=2p(1-p),\ \ P(X=0)=(1-p)^2$

$E(X)=2p^2+2p(1-p)=2p\,(=E(B(2,p))),\ \ E(X^2)=4p^2+2p(1-p)=2p(1-p)\,(=V(B(2,p)))$

■例　$[0,1]$　$\Omega=[0,1],\ P([a,b])=b-a$　(ルベーグ測度) $X(\omega)=\omega^2\ (0\le\omega\le 1)$,　$0\le x\le 1$ とし、$F_X(x)=P(X\le x)=P([0,\sqrt{x}])=\sqrt{x}$

$$\therefore f_X(x)=\frac{d}{dx}F_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} & (0\le x\le 1)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

$X_1(\omega)=\begin{cases}1 & (0\le\omega\le p)\\ 0 & (p<\omega\le 1)\end{cases}$ とすると、$P(X_1=1)=P([0,p])=p,\ \ P(X_1=0)=1-p$。つまり $X_1\sim Be(p)$

ω を 2 進展開して、$\omega=0.\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$　(1 が無限に続かない形で書く)

このとき、$X_i(\omega)=\omega_i$ と定義すると、$X_1,X_2,\cdots$ は独立で同分布で $P(X_i=1)=\dfrac{1}{2},\ P(X_i=0)=\dfrac{1}{2}$ $(X_i\sim Be(\frac{1}{2}))$

$P\left(\dfrac{X_1}{2}+\dfrac{X_2}{2^2}+\dfrac{X_3}{2^3}\le\dfrac{13}{16}\right)=P(X_1=0)+P(X_1=1\cap X_2=0)+P(X_1=1\cap X_2=1\cap X_3=0)=\dfrac{7}{8}$

$V(X_1+X_2+X_3)=V(B(3,\frac{1}{2}))=3\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$

■例　データの作る確率空間　$\Omega=\{\omega_1=(x_1,y_1),\omega_2=(x_2,y_2),\cdots,\omega_n=(x_n,y_n)\}$,

$P(\{\omega_1\})=\cdots=P(\{\omega_n\})=\frac{1}{n}$　(2 次元データ (x_i,y_i) を n 個とったもの)

$X(\omega_i)=x_i,\ Y(\omega_i)=y_i$ と 2 つの確率変数を考えると、

$E(X)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x},\ \ E(Y)=\overline{y},\ \ E(XY)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\overline{xy}$

$V(X)=\overline{x^2}-(\overline{x})^2,\ \ \rho(X,Y)=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=\dfrac{\overline{xy}-\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\overline{x^2}-(\overline{x})^2}\sqrt{\overline{y^2}-(\overline{y})^2}}=\rho_{x,y}$

$f(a,b)=E((Y-a-bX)^2)$ を最小にする $\hat{a},\hat{b}$ は、

$0=\frac{\partial f}{\partial a}=-E((Y-\hat{a}-\hat{b}X)),\quad 0=\frac{\partial f}{\partial b}=-2E(X(Y-\hat{a}-\hat{b}X))$

$$\therefore\ \hat{a}+\hat{b}E(X)=E(Y),\quad \therefore\ \hat{a}E(X)+\hat{b}E(X^2)=E(XY)$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & E(X)\\ E(X) & E(X^2)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}E(Y)\\ E(XY)\end{pmatrix} = \frac{1}{V(X)}\begin{pmatrix}E(X^2) & -E(X)\\ -E(X) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E(Y)\\ E(XY)\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{V(X)}\begin{pmatrix}E(X^2)E(Y)-E(X)E(XY)\\ E(XY)-E(X)E(Y)\end{pmatrix} = \frac{1}{V(X)}\begin{pmatrix}V(X)E(Y)-E(X)Cov(X,Y)\\ Cov(X,Y)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}E(Y)-\rho(X,Y)E(X)\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\\ \rho(X,Y)\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

すると回帰直線は $y=\hat{a}+\hat{b}x$ であるが
これから、

$$\begin{aligned}\frac{y-E(Y)}{\sigma(Y)} &= \rho(X,Y)\frac{x-E(X)}{\sigma(X)}\\ \frac{y-\overline{y}}{\sigma_y} &= \rho_{x,y}\frac{x-\overline{x}}{\sigma_x}\end{aligned}$$

と書ける。つまり回帰直線とは、y の標準化変数＝相関係数 $\times x$ の標準化変数と解釈できる。

■確率母関数、モーメント母関数　X を離散確率変数とするとき、$g_X(t)=E(t^X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)t^k$ を X の確率母関数といい、

- $g_X(1)=1$
- $g'_X(t)=E(Xt^{X-1}),\quad E(X)=g'_X(1)$
- $g''_X(1)=E(X(X-1)),\quad V(X)=g''_X(1)+g'_X(1)-(g'_X(1))^2$
- $g_X(0)=P(X=0)$ (検算にも用いる)
- $g_X(t)=g_Y(t)\iff P(X=k)=P(Y=k)$　つまり確率母関数は確率分布を決定する。
- X と Y が独立のとき、$g_{X+Y}(t)=E(t^{X+Y})=E(t^X)E(t^Y)=g_X(t)g_Y(t)$
  逆は成立しないことに注意。つまり $g_{X+Y}(t)=g_X(t)g_Y(t)$ でも X,Y は独立は言えない。

同時確率母関数、$g_{(X,Y)}(t,s)=E(t^Xs^Y)$ を考えると
　X,Y が独立 $\iff g_{(X,Y)}(t,s)=g_X(t)g_Y(s)$　が成立する。
つまり X,Y の独立性を証明したいときは、$E(t^Xs^Y)=E(t^X)E(s^Y)$ を示す。

X を確率変数（離散でも連続でもよい）
$M_X(\alpha)=E(e^{\alpha X})$ を X のモーメント母関数（積率母関数）といい、

- $M_X(0)=1$
- $M'_X(\alpha)=E(Xe^{\alpha X}),\ E(X)=M'_X(0)$
- $M^{(n)}_X(\alpha)=E(X^ne^{\alpha X}),\ E(X^n)=M^{(n)}_X(0)$
- $M_X(\alpha)=M_Y(\alpha)\iff X$ の分布$=Y$ の分布
- X,Y が独立のとき、　$M_{X+Y}(\alpha)=M_X(\alpha)M_Y(\alpha)$
- $E(e^{\alpha X+\beta Y})=E(e^{\alpha X})E(e^{\beta Y})\iff X,Y$ は独立

■キュムラント母関数　$C_X(\alpha)=\log M_X(\alpha)=\log E(e^{\alpha X})$ を X のキュムラント母関数という。このキュムラント母関数の特徴は　次に見るように中心化 (平均を引くこと）した $\tilde{X}=X-E(X)=X-m$ に対するものと、もとの X に対するキュムラント母関数の 2 階以上の α での微分は等しくなることである。

a を定数として、$C_{X+a}(\alpha)=a\alpha+C_X(\alpha)$ より、　$C''_{X+a}(\alpha)=C''_X(\alpha)$ である.
とくに　$\tilde{X}=X-E(X)=X-m$ にたいして、　$C''_{\tilde{X}}(\alpha)=C''_X(\alpha)$ である。すると、　$E(\tilde{X})=0$ より、$M'_{\tilde{X}}(0)=0$ なので $m=E(X)$ として、$E(\tilde{X}^2)=V(X)$ などに注意して、

$$\begin{aligned}
C_X(\alpha)&=m\alpha+\log(M_{\tilde{X}}(\alpha))\\
&=m\alpha+\log(1+E(\tilde{X}^2)\frac{\alpha^2}{2}+E(\tilde{X}^3)\frac{\alpha^3}{3!}+E(\tilde{X}^4)\frac{\alpha^4}{4!}+E(\tilde{X}^5)\frac{\alpha^5}{5!}+\cdots)\\
&=m\alpha+(E(\tilde{X}^2)\frac{\alpha^2}{2}+E(\tilde{X}^3)\frac{\alpha^3}{3!}+E(\tilde{X}^4)\frac{\alpha^4}{4!}+E(\tilde{X}^5)\frac{\alpha^5}{5!}+\cdots)\\
&\quad-\frac{1}{2}(E(\tilde{X}^2)\frac{\alpha^2}{2}+E(\tilde{X}^3)\frac{\alpha^3}{3!}+E(\tilde{X}^4)\frac{\alpha^4}{4!}+E(\tilde{X}^5)\frac{\alpha^5}{5!}+\cdots)^2+\cdots\\
&=E(X)\alpha+V(X)\frac{\alpha^2}{2}+E(\tilde{X}^3)\frac{\alpha^3}{3!}+(E(\tilde{X}^4)-3V(X)^2)\frac{\alpha^4}{4!}+(E(\tilde{X}^5)-10V(X)E(\tilde{X}^3))\frac{\alpha^5}{5!}+\cdots
\end{aligned}$$

となり、次の結果が得られる。

$\underline{C'_X(0)=E(X),\ C''_X(0)=V(X),\ C'''_X(0)=E(\tilde{X}^3),\ C^{(4)}_X(0)=E(\tilde{X}^4)-3V(X)^2},\ C^{(5)}_X(0)=E(\tilde{X}^5)-10V(X)E(\tilde{X}^3)$

■計算例　　$X\sim Po(\lambda)$ とすると、　$M_X(\alpha)=e^{-\lambda(1-e^\alpha)}$ よって　$C_X(\alpha)=-\lambda+\lambda e^\alpha$ すると、上を α でテーラー展開して、

$$E(X)=\lambda,\quad V(X)=\lambda,\quad E(\tilde{X}^3)=\lambda,\quad E(\tilde{X}^4)=3\lambda^2+\lambda$$

が得られる。

■確率変数の変換　ϕ を単調増加とするとき、$Y=\phi(X)$ の密度関数 $f_Y(x)$ は $F_Y(x)=P(Y\leqq x)=P(X\leqq\phi^{-1}(x)=F_X(\phi^{-1}(x))$ の両辺を微分して、

$$f_Y(x)=f_X(\phi^{-1}(x))\frac{d}{dx}\phi^{-1}(x)$$

また、　$P(X\in dx)=f(x)dx$ や　$P(X\in dx,Y\in dy)=f_{(X,Y)}(x,y)dxdy$ という書き方を利用して、$f_X(x)dx=P(X\in dx)=P(Y\in dy)=f_Y(y)dy$ と考え、向きも考慮して

$$f_Y(y)=f_X(x)|\frac{dx}{dy}|$$

とできる。　同様に多変数では、$W=f(X,Y),Z=g(X,Y)$ が 1 対 1 とするとき、$f_{(X,Y)}(x)dxdy=P(X\in dx,Y\in dy)=P(W\in dw,Z\in dz)=f_{(W,Z)}(w,z)dwdz$ より、

$$f_{(W,Z)}(w,z)=f_{(X,Y)}(x,y)|\frac{dxdy}{dwdz}|=(f_{(X,Y)}(x,y)|\frac{1}{\frac{dwdz}{dxdy}}|)$$

ここで、$\frac{dxdy}{dwdz}=$ ヤコビアン $=\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial z}-\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial w}$

■ 計算例　$x>0$ として、$F_{e^{N(0,1)}}(x)=P(N(0,1)<\log x)$ ∴　$f_{e^{N(0,1)}}(x)=f_{N(0,1)}(\log x)\frac{1}{x}$

■ **計算例** $X \sim \Gamma(p_1, a), Y \sim \Gamma(p_2, a), X, Y$ を独立とし、$S = X + Y\,(S > 0), T = \frac{X}{X+Y}\,(0 < T < 1)$ とおくと、$f_{(S,T)}(s,t) = f_{(X,Y)}(x,y)|\frac{dxdy}{dsdt}| = f_X(ts)f_Y((1-t)s)|s| = \frac{a^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2)}s^{p_1+p_2-1}e^{-as}\frac{t^{p_1-1}(1-t)^{p_2-1}}{B(p_1,p_2)} = f_{\Gamma(p_1+p_2,a)}(s)f_{\beta(p_1,p_2)}(t)$ となり、 $X + Y$ と $\frac{X}{X+Y}$ は独立で $X + Y \sim \Gamma(p_1 + p_2, a)$ (ガンマ分布の再生性), $\frac{X}{X+Y} \sim \beta(p_1, p_2)$ (ガンマ分布とベータ分布の関係) がわかる。

■**練習問題** 6.4 $(1) f_X(x) = \frac{1}{x^2}\quad (x > 1)$ で $X_1 \sim X_2 \sim X$ で独立とするとき、$S = \frac{X_1}{X_2}, T = X_1X_2$の同時密度 $f_{(S,T)}(s,t)$, 周辺密度 $f_S(s), f_T(t), f_{\log X}(x)$
$(2) X \sim Y \sim Exp(1)\,(X, Y$ は独立) で $S = X+Y, T = X-Y$ の同時密度 $f_{(S,T)}(s,t)$, 周辺密度 $f_S(s), f_T(t)$ 条件付密度 $f_{T|S}(t|s)$

1 対 1 ではない場合、たとえば $P(-\infty < X < \infty) = 1$ で $Y = X^2$ の密度関数は $x > 0$ として、$F_X(x) = P(-\sqrt{x} \leqq X \leqq \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$ より
$f_Y(x) = f_X(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} + f_X(-\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}$

■**練習問題** 6.5 $X \sim U(-1, 2)$ のとき、 $Y = X^2$ の密度関数を求めよ。

6.2 確率分布を表す母数 (パラメーター)

期待値（=平均）, 分散に加え以下のような量を考える。

$m = E(X), \sigma = \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ として、

■**歪度（わいど）**, skewness $E\left((\frac{X-m}{\sigma})^3\right) = X$ の標準化変数の 3 次モーメント $= E(\tilde{X}^3)/\sigma^3$

歪度の意味は正なら右裾が厚い（右のテイル確率が大きい）という意味
($\because$ 偏差の 3 乗 $(X - m)^3$の正の部分が負の部分より大きい)

■**尖度（せんど）**, kurtosis $E\left((\frac{X-m}{\sigma})^4\right) = X$ の標準化変数の 4 次モーメント $= E(\tilde{X}^4)/\sigma^4$[*2]

尖度の意味は尖度が大きいほど左右テイル確率が大きいという意味、正規分布の尖度は 3 なので尖度が 3 より大きければ正規分布より裾が厚いということ。
歪度や尖度の求め方は 例えば歪度だと $E((X - m)^3) = E(X^3) - 3mE(X^2) + 3m^2E(X) - m^3$ として各項をモーメント母関数で計算する方法、X の標準化変数のモーメント母関数 $M_{\frac{X-m}{\sigma}}(\alpha) = e^{-\frac{m\alpha}{\sigma}}M_X(\frac{\alpha}{\sigma})$ を計算し,3 回微分し 0 を代入する方法, また、α でテーラー展開してもよい。最後の方法で $Po(\lambda)$ の歪度、尖度を

[*2] 損保数理の教科書では キュムラント母関数を用いて、尖度$=\frac{C_X^{(4)}(0)}{(C''_X(0))^2}$ と定義されており、この場合は 上の定義より 3 小さくなるので注意しておくこと. この定義の意味は 正規分布の上の定義での尖度は 3 であり、そこからの差をみるということで、尖度の定義をこちらにしている文献、論文も多く見られるので注意しておくこと

求めてみると、$E(Po(\lambda))=V(Po(\lambda))=\lambda$　に注意して 標準化変数のモーメント母関数$=e^{-\alpha\sqrt{\lambda}}e^{-\lambda(1-e^{\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}})}=e^{\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{6\sqrt{\lambda}}+\frac{\alpha^4}{24\lambda}+\cdots}=1+\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{6\sqrt{\lambda}}+\frac{1}{24}(3+\frac{1}{\lambda})\alpha^4+\cdots$ よって　歪度$=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, 尖度$=3+\frac{1}{\lambda}$

また、前に見たキュムラント母関数を用いて

$$\text{歪度}=\frac{C_X'''(0)}{(C_X''(0))^{3/2}},\quad \text{尖度}=\frac{C_X^{(4)}(0)}{(C_X''(0))^2}+3$$

でも計算できる。

■計算例　$Po(\lambda)$ の歪度$=\frac{\lambda}{\lambda^{3/2}}=\lambda^{-1/2}$, $Po(\lambda)$ の尖度$=\frac{\lambda}{\lambda^2}+3=3+\frac{1}{\lambda}$
ここで、ポアソン分布の再生性と中心極限定理より、　$\lambda\to\infty$ とすると それぞれ正規分布（標準正規分布）の歪度 0, 尖度 3　に近づいていくことに注意しておく。

■練習問題 6.6　次の確率分布の歪度、尖度を求めよ。(1) $Exp(\lambda)$　(2)$N(0,1)$　(3) $B(n,p)$　(4)$\Gamma(p,a)$ (5) $U(0,1)$　(6)$\max(U_1,U_2)$ ($U_i\sim U(0,1)$ で独立)

■メディアン（中位数）　$P(X<c)\leq\frac{1}{2}\leq P(X\leq c)$ を満たす実数 c
とくに X が連続の場合は、$P(X\leq c)=\frac{1}{2}$ を満たす実数 c
【例】$B(3,\frac{1}{2})$ のメディアン $=m$ $(1\leq m\leq 2)$,　$B(3,\frac{1}{3})$ のメディアン $=2$,　$Exp(1)$ のメディアン $=\log 2$

■モード　確率関数 $P(X=x)$, 密度関数 $f_X(x)$ の最大値を与える x

- 離散の場合は、$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}$ を考え
  $\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}<1\iff k<n_0$,　$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=1\iff k=n_0$,　$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}>1\iff k>n_0$
  となるなら、$P(X=1)<P(X=2)<\cdots<P(X=n_0)=P(X=n_0+1)>P(X=n_0+2)\cdots$
  となるので、モードは n_0 と n_0+1
- 連続の場合は、密度関数 $f_X(x)$ を微分し、$f_X(x)$ が最大値をとる x を求める。

6.3　標本統計量

■標本統計量（(標本）推定量）　(無限) 母集団 (母平均 μ, 母分散 σ^2) から n 個の標本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ を選ぶと、$X_1,X_2,\cdots,X_n$ は独立で同分布な確率変数である。
n 個の標本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ の関数 $\theta(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ を統計量、標本統計量と呼ぶ。
とくに母集団のパラメータ θ の推定量と考えるときは推定量と呼ぶ。

■例　• 標本平均　$\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$

- 不偏標本分散　$\hat{S}^2=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

母平均 μ が既知のとき、$\hat{u^2} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ も一種の標本分散

これらは、$E(\overline{X})=\mu,\quad E(\hat{S^2})=\sigma^2$ を満たすので、それぞれ母平均、母分散の不偏推定量である。

■最尤（ゆう）推定量　　尤度関数 L を

$$L(x_1,x_2,\cdots x_n;\theta)=\begin{cases}P(X_1=x_1)\cdots P(X_n=x_n) & (\text{離散の場合})\\ f_X(x_1)\cdots f_X(x_n) & (\text{連続の場合})\end{cases}$$

を母パラメータ θ の尤度関数といい、標本の実現値 $X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n$ のもとで尤度関数の値が最大となる $\theta=\hat{\theta}$ を $x_1,x_2,\cdots,x_n$ の関数として最尤推定量という。$\log L$ を最大にすればよいから、通常[*3]、

$0=\frac{\partial \log L}{\partial\theta}$ を解いて、θ を $x_1,x_2,\cdots,x_n$ で表せばよい。

■クラーメルラオの不等式と有効推定量　T_n を母パラメーター θ の不偏推定量とするとき、そのなかで分散が最小なものを有効推定量[*4]という。という。　これについては次のクラーメルラオの不等式が成立する。(証明は　穴埋め式確率統計らくらくワークブック参照)

$$V(T_n)\geqq\frac{1}{E((\frac{\partial}{\partial\theta}\log L)^2)}=\frac{1}{nI(\theta)}$$

つまり 等号が成り立てば　T_n は有効推定量となる。また、$I(\theta)=E((\frac{\partial\log f}{\partial\theta})^2)=V(\frac{\partial\log f}{\partial\theta})$ で、フィッシャー情報量と呼ばれる。f は　連続のときは確率密度関数、　離散のときは　確率関数 $P(X=k)$

等号成立条件を考えて、有効推定量なら最尤推定量である。

■例　　$X\sim Po(\lambda)$ のとき　$\bar{X}$ は有効推定量。$V(\bar{X})=\frac{\lambda}{n},\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\log P(X=k)=\frac{x}{\lambda}-1,\ I(\theta)=V(\frac{X}{\lambda}-1)=\frac{1}{\lambda}$ より、　$V(\bar{X})=\frac{1}{nI(\theta)}$ より、$\bar{X}$ は有効推定量。

6.4　条件付期待値

■条件付確率の復習　$P(B)>0$ の時、$P(A|B)\overset{\text{def}}{=}\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$(=事象 B という条件のもとで事象 A が起こる確率)

特に A と B が独立のとき、$P(A|B)=P(A)$

■練習問題 6.7　以下を計算せよ。

(1) $P(X\geq m|X\geq n)$ （ここで $m,n\in\mathbf{Z},\ m\geq n\geq 0,\ X\sim Ge(p)$ つまり $P(X=k)=p(1-p)^k\ (k=0,1,2,\cdots)$)

[*3] 一様分布のような場合には別のやり方で求めることに注意。　例　$U(0,a)$ において a の最尤推定量は　$\max(x_1,\ldots,x_n)$ $\because L=\frac{1}{a^n}\leqq\frac{1}{\max(x_1,\ldots,x_n)^n}$

[*4] 2 つの不偏推定量で $V(T)<V(T')$ となっているとき, T は T' より有効であるという。

(2)　$P(X_1 = n|X_1 + X_2 = m)$　(ここで $X_1 \sim B(N_1, p)$, $X_2 \sim B(N_2, p)$, X_1, X_2 は独立)

(3)　$P(X_1 = n|X_1 + X_2 = m)$　(ここで $X_1 \sim Ge(p)$, $X_2 \sim Ge(p)$, X_1, X_2 は独立)

(4)　$P(X_1 = n|X_1 + X_2 = m)$　(ここで $X_1 \sim Po(\lambda_1)$, $X_2 \sim Po(\lambda_2)$, X_1, X_2 は独立)

■ベイズの定理　$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ かつ　それらは排反とするとき、$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)}$

■例　箱 A は　黒球 $2n-1$ 個、白球 1 個、箱 B は、黒球 n 個、白球 n 個　箱 C は黒球 1 個、白球 $2n-1$ 個　入っている。　この 3 つの箱を無作為に選び、さらに箱から無作為に球を取り出したところ 黒球であった。このとき、　選ばれた箱が A である確率$=P(A|\text{黒}) = \frac{P(\text{黒}\,|A)P(A)}{P(\text{黒}\,|A)P(A)+P(\text{黒}\,|B)P(B)+P(\text{黒}\,|C)P(C)} = \frac{\frac{2n-1}{2n}}{\frac{2n-1}{2n}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}} = \frac{2n-1}{3n}$

■条件付期待値の定義　まず、　A が事象のとき、$E(X|A) = \frac{E(X,A)}{P(A)} = \frac{E(X1_A)}{P(A)}$ である。
これは　離散のときは $\frac{\sum kP(X=k\cap A)}{P(A)}$　で計算し、連続で例えば　$A = \{a < X < b\}$　のときは　$\frac{\int_a^b xf_X(x)dx}{\int_a^b f_X(x)dx}$
で計算する。

$$E(Y|X=x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_b yP(Y=y|X=x) = (\sum_b y\frac{P(Y=y\cap X=x)}{P(X=x)}) & \cdot\cdot\cdot\text{離散確率分布のとき} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} yf_{Y|X}(y|x)\,dy & \cdot\cdot\cdot\text{連続確率分布のとき} \end{cases}$$

(ここで $f_{Y|X}(y|x)$=Y の $X = x$ のもとでの条件付密度関数=$\dfrac{f_{(Y,X)(y,x)}}{f_X(x)}$).
　$E(Y|X = x) = f(x)$ とおき、$E[Y|X] = f(X)$ つまり $E[Y|X] = E(Y|X = x)|_{x=X}$
$E(Y|X)$ を $\underline{X\text{ のもとでの }Y\text{ の条件付期待値}}$ という。
$\|$
X の関数，つまり確率変数であることに注意する。
意味は、近未来財産が X という条件のもとでさらに未来の財産 Y の期待値。それは明らかに X に依存するが現在から見れば近未来の財産 X も確率変数。

■条件付期待値の基本的な性質　・　$E(C|X) = C$　(C は定数)
- $E(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2|X) = \alpha_1 E(Y_1|X) + \alpha_2 E(Y_2|X)$　(条件付期待値の線型性)
- $E(h(X)Y|X) = h(X)E(Y|X)$
- X と Y が独立なら　$E(Y|X) = E(Y)$, また $E(h(Y)|g(X)) = E(h(Y))$

　$(\because E(Y|X = x) = \sum_y yP(Y = y|X = x) = \sum_y yP(Y = y) = E(Y))$

- $E(E(h(X)Y|X)) = E(h(X)Y)$

$$\begin{aligned}\because E(E(h(X)Y)|X)) &= \sum_x E(h(x)Y|X=x)P(X=x)\\ &= \sum_x h(x)\sum_y yP(Y=y|X=x)P(X=x)\\ &= \sum_x\sum_y h(x)yP(Y=y\cap X=x) = E(h(X)Y)\end{aligned}$$

特に $h\equiv 1$ として、$E(E(Y|X)) = E(Y)$

-

■L^2 **最良予測量としての条件付期待値** (第 2 章の最後においても用いた。)

$E((Y-g(X))^2)$ が最小になる $g(X)$ は $g(X) = E(Y|X)$

$$\begin{aligned}\because E((Y-g(X))^2) &= E(\{(Y-E(Y|X)) + (E(Y|X)-g(X))\}^2)\\ &= E((Y-E(Y|X))^2) + 2E((Y-E(Y|X))(E(Y|X)-g(X))) + E((E(Y|X)-g(X))^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ここで第 2 項}\times\frac{1}{2} &= E(YE(Y|X) - E(Y|X)E(Y|X) - g(X)Y + g(X)E(Y|X))\\ &= E(YE(Y|X)) - E(E(E(Y|X)Y|X)) - E(g(X)Y) + E(E(g(X)Y|X))\\ &= E(YE(Y|X) - E(YE(Y|X)) - E(g(X)Y) + E(g(X)Y) = 0\end{aligned}$$

別の言い方をすると、 $E((Y-g(X))^2|X=x)) = (g(x)-E(Y|X=x))^2 + E(Y^2|X=x) - (E(Y|X=x))^2 = (g(x)-E(Y|X=x))^2 + V(Y|X=x)$ となるので， 最小にする $g(x)$ は $g(x) = E(Y|X=x)$ で最小値は $V(Y|X=x)$[*5]

条件付ける確率変数の数が増えても同様に、

$$E(Z|Y=y\cap X=x) = \sum_z zP(Z=z|Y=y\cap X=x), \quad E(Z|Y,Z) \overset{\text{def}}{=} E(Z|Y=y\cap X=x)|_{y=Y,\,x=X}$$

などが定義でき上と同じような性質を持つ。

すると、$E(E(Y|X_1,X_2,\cdots,X_m)|X_1,X_2,\cdots,X_n) = E(Y|X_1,X_2,\cdots,X_n) \quad (m\geq n)$ が成立する。

(3 垂線の定理、射影の射影は射影)

[*5] 同様に $E((Y-c)^2)$ を最小にする c は $c = E(Y)$ で最小値は $V(Y)$, また $E(|Y-c|)$ を最小にする c はメディアン (連続の場合は $F(c) = \frac{1}{2}$ となる c), ($\because$ $E(|Y-c|) = \int_0^\infty P(|Y-c|>t)dt = \int_0^\infty (P(Y \geqq t+c) + P(Y \leqq t-c))dt$ よって $\frac{\partial}{\partial c}E(|Y-c|) = \int_0^\infty (-f_Y(t+c) + f_Y(c-t)dt = -(1-F_Y(c)) + F_Y(c)$

$m=2, n=1$ で証明すると、

$$\begin{aligned}
E(E(Y|X_1,X_2)|X_1=x) &= E(E(Y|X_1=x\cap X_2)|X_1=x)\\
&= \sum_u E(Y|X_1=x\cap X_2=u)P(X_2=u|X_1=x)\\
&= \sum_u\sum_y yP(Y=y|X_1=x\cap X_2=u)P(X_2=u|X_1=x)\\
&= \sum_u\sum_y y\frac{P(Y=y\cap X_1=x\cap X_2=u)}{P(X_1=x\cap X_2=u)}\times\frac{P(X_1=x\cap X_2=u)}{P(X_1=x)}\\
&= \sum_y \frac{y}{P(X_1=x)}\sum_u P(Y=y\cap X_1=x\cap X_2=u)\\
&= \sum_y \frac{y}{P(X_1=x)}P(Y=y\cap X_1=x)\\
&= \sum_y yP(Y=y|X_1=x)=E(Y|X_1)
\end{aligned}$$

■条件付分散　X のもとでの Y の条件付分散を $V(Y|X)$ とかき、　$V(Y|X=x)=E(Y^2|X=x)-(E(Y|X=x))^2$ の x に $x=X$ を代入したもので定義される。
すると、

$$V(Y)=E(V(Y|X))+V(E(Y|X))$$

が成立する。[*6]
($\therefore$ 右辺 $=E(E(Y^2|X)-(E(Y|X))^2)+E((E(Y|X))^2-(E(E(Y|X)))^2=E(Y^2)-(E(Y))^2=V(Y)$).

■応用例, ランダム番号までの和、複合分布　$Y=\sum_{i=1}^N X_i$, $X_1,X_2,\ldots,N$ は独立 とする。さらに X_i は同分布で $E(X_i)=\mu, V(X_i)=\sigma^2$, また　N は非負整数値確率変数で $N=0$ のときは　$Y=0$ とする。　このとき、　$E(Y|N=n)=\sum_{i=1}^n E(X_i|N=n)=\sum_{i=1}^n E(X_i)=\mu n$ つまり、$E(Y|N)=\mu N$
同様に $V(Y|N)=\sigma^2 N$ よって　$V(Y)$=$E(V(Y|N))+V(E(Y|N))=E(\sigma^2 N)+V(\mu N)=\sigma^2 E(N)+(\mu)^2 V(N)$
また、モーメント母関数は　$M_Y(t)=E(e^{tY})=E(E(e^{tY}|N))=E((M_X(t))^N)=g_N(M_X(t))$　X が離散のときは　確率母関数 $g_Y(t)=g_N(g_X(t))$.

(1) $N\sim B(n,p_1), X\sim Be(p)$ の場合
$g_Y(t)=(1-p_1+p_1(1-p+pt))^n$, $Y\sim B(n,p_1p)$, $P(Y=0)=g_Y(0)=(1-p_1p)^n$
(注意　これは $N=k$ なら、 $\sum_{i=1}^k X_i\sim B(k,p)$ なので、　$N\sim B(n,p_1)$ で　条件 $N=k$ のもとで、$Y\sim B(k,p)$ のとき、$Y\sim B(n,pp_1)$ という複合分布と同じことである。)

(2) $N\sim Po(\lambda), X\sim Be(p)$ の場合
$g_Y(t)=e^{\lambda((1-p+pt)-1)}=e^{\lambda p(t-1)}$, $Y\sim Po(\lambda p)$, $P(Y=0)=g_Y(0)=e^{-\lambda p}$
(注意　これは $N=k$ なら、 $\sum_{i=1}^k X_i\sim B(k,p)$ なので、　$N\sim Po(\lambda)$ で　条件 $N=k$ のもとで、$Y\sim B(k,p)$ のとき、$Y\sim Po(\lambda p)$ という複合分布と同じことである。)

[*6] X の条件付期待値の分散のほうが小さくなる (X 以外の情報は平均化しているので) ことは直感的に明らかだろう。

(3)$N \sim NB(n,p_1), X \sim Be(p)$ の場合
$g_Y(t)=(\frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p+pt)})^n=(\frac{\frac{p_1}{p+p_1-pp_1}}{1-\frac{p-pp_1}{p+p_1-pp_1}t})^n$, $Y \sim NB(n,\frac{p_1}{p+p_1-pp_1})$, $P(Y=0)=g_Y(0)=(\frac{p_1}{p+p_1-pp_1})^n$
(注意 これは $N=k$ なら、 $\sum_{i=1}^k X_i \sim B(k,p)$ なので、 $N \sim NB(n,p_1)$ で 条件 $N=k$ のもとで、$Y \sim B(k,p)$ のとき、$Y \sim NB(n,\frac{p_1}{p+p_1-pp_1})$ という複合分布と同じことである。 とくに $NB(1,p_1)=Ge(p_1)$ なので、$N \sim Ge(p_1)$ で 条件 $N=k$ のもとで、$Y \sim B(k,p)$ のとき、$Y \sim Ge(\frac{p_1}{p+p_1-pp_1})$ である。)

(4)$N \sim Po(\lambda), X$((変形) 対数級数分布) $\left(P(X=k)=\begin{cases}1+\frac{\alpha}{\lambda}\log(p) & k=0\\ \frac{\alpha(1-p)^k}{\lambda k} & k=1,2,\ldots\end{cases}\right)$ の場合
$g_X(t)=1+\frac{\alpha}{\lambda}\log(p)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha((1-p)t)^k}{k\lambda}=1+\frac{\alpha}{\lambda}\log\frac{p}{1-(1-p)t}$
$g_Y(t)=g_N(g_X(t))=e^{\lambda(1+\frac{\alpha}{\lambda}\log\frac{p}{1-(1-p)t}-1)}=(\frac{p}{1-(1-p)t})^{\alpha}$ より、$Y \sim NB(\alpha,p)$

(5)$N \sim Fs(p_1), X \sim Ge(p)$ の場合
$g_Y(t)=g_N(g_X(t))=\frac{p_1\frac{p}{1-(1-p)t}}{1-(1-p_1)\frac{p}{1-(1-p)t}}=\frac{\frac{pp_1}{1-p+pp_1}}{1-\frac{pp_1}{1-p+pp_1}t}$, $\therefore Y \sim Ge(\frac{pp_1}{1-p+pp_1})$
同様に $N \sim n+NB(n,p_1), X \sim Ge(p)$ の場合
$g_Y(t)=(\frac{\frac{pp_1}{1-p+pp_1}}{1-\frac{pp_1}{1-p+pp_1}t})^n$, $\therefore Y \sim NB(n,\frac{pp_1}{1-p+pp_1})$

(6)$N \sim Fs(p), X \sim Exp(\lambda)$ の場合
$M_Y(t)=g_N(M_X(t))=\frac{p\frac{\lambda}{\lambda-t}}{1-(1-p)\frac{\lambda}{\lambda-t}}=\frac{\lambda p}{\lambda p-t}$, $\therefore Y \sim Exp(\lambda p)$
同様に $N \sim n+NB(n,p), X \sim Exp(\lambda)$ の場合
$M_Y(t)=(\frac{\lambda p}{\lambda p-t})^n$, $\therefore Y \sim \Gamma(n,\lambda p)$

■応用例 和, 差, 積, 商の分布の求め方 ここでは 条件付期待値を用いて 連続確率変数に対する和, 差, 積, 商の分布を求めてみよう。簡単のため最初は $P(X>0 \cap Y>0)=1$ で独立の場合のみを考察する。

(1) 和 の場合
$x>0$ として、$F_{X+Y}(x)=P(X+Y \leqq x)=E(P(X+Y \leqq x|Y))=E(F_X(x-Y))=\int_0^x F_X(x-y)f_Y(y)dy$,
x で微分して $f_{X+Y}(x)=F_X(x-x)f_Y(x)+\int_0^x f_X(x-y)f_Y(y)dy=\int_0^x f_X(x-y)f_Y(y)dy$[*7]
(計算例 $X \sim Y \sim Exp(\lambda)$ のとき、$x>0$ として, $f_{X+Y}(x)=\int_0^x \lambda e^{-(x-y)}\lambda e^{-y}dy=\lambda^2 xe^{-\lambda x}=f_{\Gamma(2,\lambda)}(x)$

(2) 差の場合
$x>0$ のとき、$F_{X-Y}(x)=P(X-Y \leqq x)=E(P(X-Y \leqq x|Y))=E(F_X(x+Y))=\int_0^{\infty} F_X(x+y)f_Y(y)dy$,
$x<0$ のとき、$F_{X-Y}(x)=P(X-Y \leqq x)=E(P(X-Y \leqq x|Y))=E(F_X(x+Y))=\int_{-x}^{\infty} F_X(x+y)f_Y(y)dy$,
x で微分して $f_{X-Y}(x)=\begin{cases}\int_0^{\infty} f_X(x+y)f_Y(y)dy & (x>0)\\ \int_{-x}^{\infty} f_X(x+y)f_Y(y)dy & (x<0)\end{cases}$

[*7] 一般に A を事象とするとき、 指示関数 $1_A=\begin{cases}1 & (A\text{ が起こるとき})\\ 0 & (A\text{ が起こらないとき})\end{cases}$ とすると $P(A)=E(1_A)$ (確率も指示関数の期待値), $P(A|Y)=E(1_A|Y)$ であり、これらの関係式はよく用いられる。

(計算例　$X \sim Y \sim Exp(\lambda)$ のとき、$f_{X-Y}(x) = \begin{cases} \int_0^\infty \lambda e^{-(x+y)} \lambda e^{-y} dy = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} & (x > 0) \\ \int_{-x}^\infty \lambda e^{-(x+y)} \lambda e^{-y} dy = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x} & (x < 0) \end{cases}$

(3) 積の場合

$x > 0$ として, $F_{XY}(x) = P(XY \leqq x) = E(P(XY \leqq x|Y)) = E(F_X(\frac{x}{Y})) = \int_0^\infty F_X(\frac{x}{y}) f_Y(y) dy$

$f_{XY}(x) = \int_0^\infty f_X(\frac{x}{y}) f_Y(y) \frac{dy}{y}$

(計算例 $X \sim Exp(\lambda), f_Y(y) = \frac{1}{\log b/a} \frac{1}{y}$ $(0 < a < y < b)$)

$f_{XY}(x) = \int_a^b \lambda e^{-\frac{x}{y}} \frac{1}{\log b/a} \frac{1}{y^2} dy = \frac{1}{\log b/a} \frac{e^{-\frac{\lambda x}{b}} - e^{-\frac{\lambda x}{a}}}{x}$

(4) 商の場合

$x > 0$ として, $F_{\frac{X}{Y}}(x) = E(P(\frac{X}{Y} \leqq x|Y)) = E(F_X(xY)) = \int_0^\infty F_X(xy) f_Y(y) dy$

$f_{\frac{X}{Y}}(x) = \int_0^\infty f_X(xy) f_Y(y) y dy$

(計算例 $X \sim Y \sim N(0,1)$ のとき、$f_{\frac{|X|}{|Y|}}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2y^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} y dy = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ $(x > 0)$

(注意 対称性より、$f_{\frac{X}{Y}}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$　$(-\infty < x < \infty)$)

■練習問題 6.8　$X \sim Exp(\lambda_1), Y \sim Exp(\lambda_2)$　で独立のとき、$f_{\frac{X}{Y}}(x)$　を求めよ。

次に独立だが正とは限らない場合を考察する。

(1) 和 の場合

$F_{X+Y}(x) = P(X + Y \leqq x) = E(P(X + Y \leqq x|Y)) = E(F_X(x - Y)) = \int_{-\infty}^\infty F_X(x - y) f_Y(y) dy$, x で微分して $f_{X+Y}(x) = F_X(x - x) f_Y(x) + \int_{-\infty}^\infty f_X(x - y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^\infty f_X(x - y) f_Y(y) dy$

(計算例　$X \sim Y \sim U(-1,1)$ のとき、$x > 0$ として, $f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^\infty f_X(x - y) f_Y(y) dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_X(x - y) dy = \begin{cases} \frac{1}{4} \int_{-1}^{x+1} dx = \frac{x+2}{4} & (-2 \leqq x \leqq 0) \\ \frac{1}{4} \int_{x-1}^1 dy = \frac{2-x}{4} & (0 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$

(2) 差の場合

$F_{X-Y}(x) = P(X - Y \leqq x) = E(P(X - Y \leqq x|Y)) = E(F_X(x + Y)) = \int_{-\infty}^\infty F_X(x + y) f_Y(y) dy$, x で微分して $f_{X-Y}(x) = \int_{-\infty}^\infty f_X(x + y) f_Y(y) dy$

(計算例 $X \sim Exp(1), Y \sim U(-1,1)$ のとき、$f_{X-Y}(x) = \int_{-\infty}^\infty f_X(x+y) f_Y(y) dy = \frac{1}{2} \int_{\max(-1,-x)}^1 e^{-(x+y)} dy = \begin{cases} \frac{1-e^{-(1+x)}}{2} & (-1 < x < 1) \\ \frac{e-e^{-1}}{2} e^{-x} & (x > 1) \end{cases}$

(注意　この問題は　$X \sim -X$ なので　(1) を使っても同じになるので確かめるとよい。)

(3) 積の場合

$F_{XY}(x) = P(XY \leqq x) = E(1_{XY \leqq x}) = E(1_{XY} \leqq x), Y > 0) + E(1_{XY \leqq x}, Y < 0)) = \int_0^\infty F_X(\frac{x}{y}) f_Y(y) dy + \int_{-\infty}^0 (1 - F_X(\frac{x}{y}) f_Y(y) dy$

x で微分して　$f_{XY}(x) = \int_0^\infty f_X(\frac{x}{y}) f_Y(y) \frac{dy}{y} + \int_{-\infty}^0 f_X(\frac{x}{y}) f_Y(y) \frac{dy}{-y}$

(4) 商の場合

(3) と同様にして $f_{\frac{X}{Y}}(x)=\int_0^\infty f_X(xy)f_Y(y)ydy+\int_{-\infty}^0 f_X(xy)f_Y(y)(-y)dy$

さらに 独立でもない場合に少し触れておく。$F_{X+Y}(x)=P(X+Y\leqq x)=\int_{-\infty}^\infty P(X\leqq x-y|Y=y)f_Y(y)dy$ 微分して $f_{X+Y}(x)=\int_{-\infty}^\infty f_{X|Y}(x-y|y)f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^\infty f_{(X,Y)}(x-y,y)dy$
同様に $f_{X-Y}(x)=\int_{-\infty}^\infty f_{(X,Y)}(x+y,y)dy$

■例題 $E(X)=2,V(X)=1,E(Y)=3,V(Y)=4$ で、X,Y は独立のとき、

(1)$E(Y|X)=E(Y)=3$ (2)$E(X|X)=X$ (3)$E(X^2|Y)=E(X^2)=V(X)+(E(X))^2=5.$
(4) $E(X|X,Y)=X$ (5) $E(XY^2|X)=XE(Y^2|X)=XE(Y^2)=13X$
(6) $E((X-Y)^2|X)=X^2-6X+13$ (注意 $E((X-Y)^2)=E(X^2)-6E(X)+13$ を確かめておくと良い。
(7) $E(X|X^2=x)=\frac{E(X,X^2=x)}{P(X^2=x)}=\frac{\sqrt{x}P(X=\sqrt{x})-\sqrt{x}P(X=-\sqrt{x})}{P(X=\sqrt{x})+P(X=-\sqrt{x})}.$

■例題 $P(X=i\cap Y=j)=C(i+j)$ ・・・ $(1\leqq i,j\leqq N)$ において
(1) 定数 c

$$1=c\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N(i+j)=cN^2(N+1) \text{ より } c=\frac{1}{N^2(N+1)}.$$

$$(2)P(X=i)=\sum_{j=1}^N P(X=i\cap Y=j)=\frac{i+\frac{(N+1)}{2}}{N(N+1)}.$$

$$(3)\ E(Y|X=i)=\sum_{j=1} j\frac{P(X=i\cap Y=j)}{P(X=i)}=\frac{\frac{i(N+1)}{2}+\frac{(N+1)(2N+1)}{6}}{i+\frac{(N+1)}{2}}.$$

■練習問題 6.9 上の例題でさらに (1)$E(Y^2|X)$ (2)$E(E(Y|X))$ (3)$V(X)$ (4)$\mathrm{Cov}(X,Y)$ を求めよ。

■練習問題 6.10 $a>0,b>0$ とし、$P(X=i\cap Y=j)=e^{-(a+bi)}\frac{a^i}{i!}\frac{(bi)^j}{j!}$ $(i,j=0,1,2\ldots)$ のとき、$P(Y=j|X=i)$,$\mathrm{Cov}(X,Y)$, $V(Y)$ を求めよ

■練習問題 6.11 $|a|<1$ として、$P(X=i\cap Y=j)=(1-a)^2a^i$ $(0\leqq j\leqq i)$ である。$P(X=i|Y=j)$, $P(Y=j|X=i)$, $E(Y|X)$, $E(X|Y)$ を求めよ。

■例題

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{5}(x^2+y) & 0\leqq x,y\leqq 1\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

とするとき、周辺密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $E(X)$, $E(Y)$, $f_{Y|X}(y|x)$, $f_{X|Y}(x|y)$, $E(Y|X)$, $E(X|Y)$, $E(Y^2|X)$ を求めよ。

(1) $0\leqq x\leqq 1$ に対して、$f_X(x)=\int_0^1 f_{(X,Y)}(x,y)dy=\frac{6}{5}(x^2+\frac{1}{2})$
(2)$0\leqq y\leqq 1$ に対して、$f_Y(y)=\int_0^1 f_{(X,Y)}(x,y)dx=\frac{6}{5}(y+\frac{1}{3})$
(3)$E(X)$=3/5 (4)$E(Y)=3/5$
(5)$f_{Y|X}(y|x)=\frac{x^2+y}{x^2+1/2}$ $(0\leqq x,y\leqq 1)$ (6)$f_{X|Y}(x|y)=\frac{y+x^2}{y+1/3}$ $(0\leqq x,y\leqq 1)$
(7)$E(Y|X)=\frac{\frac{X^2}{2}+\frac{1}{3}}{X^2+\frac{1}{2}}$ $(0\leqq x\leqq 1)$ (8)$E(X|Y=y)=\frac{y+\frac{1}{4}}{y+\frac{1}{3}}$ $(0\leqq y\leqq 1)$

(9)$E(Y^2|X=x)=\frac{\frac{x^2}{3}+\frac{1}{4}}{x^2+\frac{1}{2}}\quad(0\leqq x\leqq 1)$

■例題

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{(1+x+y)^4} & 0<x,y<\infty\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

とするとき、周辺密度 $f_X(x)$, $E(X)$, $f_{X|Y}(x|y)$, $E(X|Y)$ を求めよ。

$x,y>0$ として、(1) $f_X(x)=\int_0^\infty f_{(X,Y)}(x,y)dy=\frac{2}{(1+x)^3}$　(2)$E(X)$=1　(3)$f_{X|Y}(x|y)=\frac{3(1+y)^3}{(1+x+y)^4}$ (4)$E(X|Y)=\frac{Y+1}{2}$

■例題

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}8xy & 0\leqq y\leqq x\leqq 1\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

とするとき、周辺密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $E(X)$, $E(Y)$, $f_{Y|X}(y|x)$, $f_{X|Y}(x|y)$, $E(Y|X)$, $E(X|Y)$, $E(Y^2|X)$ を求めよ。

$0\leqq x\leqq y\leqq 1$ とする。(1) $f_X(x)=\int_0^x f_{(X,Y)}(x,y)dy=4x^3$　(2)$f_Y(y)=\int_y^1 f_{(X,Y)}(x,y)dx=4y(1-y^2)$　(3)$E(X)$=4/5　(4)$E(Y)=8/15$ (5)$f_{Y|X}(y|x)=\frac{2y}{x^2}$　(6)$f_{X|Y}(x|y)=\frac{2x}{1-y^2}$　(7)$E(Y|X)=\int_0^x yf_{Y|X}(y|X)dy=\frac{2X}{3}$　(8)$E(X|Y)=\int_y^1 xf_{X|Y}(x|Y)dx=\frac{2(1+Y+Y^2)}{3(1+Y)}$
(9)$E(Y^2|X)=\frac{X^2}{2}$

■練習問題 6.12　$X\sim N(\mu_1,{\sigma_1}^2)$, $Y\sim N(\mu_2,{\sigma_2}^2)$, X と Y は独立とする。以下を求めよ。
(1)$E(X|X)$　(2)$E(Y|X)$　(3)$E(X^2|X)$　(4)$E(XY|X)$　(5)$E((X+Y)^2|X)$
(6) 条件付分散 $V(X+Y|X)$　$(=E((X+Y)^2|X)-(E(X+Y|X))^2)$

■練習問題 6.13　$E(Y|X)=2X+1, E(X)=1, V(X)=3$ のとき、　$E(Y), E(XY)$　を求めよ。

■練習問題 6.14

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}24y(1-x) & 0\leqq y\leqq x\leqq 1\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

とするとき、周辺密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $E(X)$, $E(Y)$, $f_{Y|X}(y|x)$, $f_{X|Y}(x|y)$, $E(Y|X)$, $E(X|Y)$, $E(Y^2|X)$ を求めよ。

■練習問題 6.15

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}2xye^{-x(1+y^2)} & 0<y,\,x<\infty\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

とするとき、周辺密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $E(X)$, $E(Y)$, $f_{Y|X}(y|x)$, $f_{X|Y}(x|y)$, $E(Y|X)$, $E(X|Y)$, $E(X^2|Y)$ を求めよ。

■練習問題 6.16

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} & x, y > 0, x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とするとき、周辺密度 $f_X(x)$, $E(X)$, $f_{Y|X}(y|x)$, $E(Y|X)$ を求めよ。

■練習問題 6.17

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} c\sin(x+y) & 0 \leqq x, y \leqq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とするとき、定数 c, 周辺密度 $f_X(x)$, $E(X)$, $f_{Y|X}(y|x)$, $E(Y|X)$ を求めよ。

■練習問題 6.18

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} ce^{-2x-y} & 0 < y < x < \infty \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とするとき、(1) 定数 c　(2) 周辺密度 $f_X(x)$　(3) $f_Y(y)$　(4) $E(X)$　(5)$E(Y)$　(6) $f_{Y|X}(y|x)$
(7) $f_{X|Y}(x|y)$　(8) $E(X|Y)$　(9)$V(X|Y)$　(10)$E(XY|Y)$　(11) $E(XY)$　(12)$\mathrm{Cov}(X,Y)$ を求めよ。

■練習問題 6.19　$X \sim Exp(1)$,　$X = x$ のもとで、$Y \sim Exp(x)$ である。　以下を求めよ。
(1)$f_{(X,Y)}(x,y)$　(2)$f_Y(y)$　(3) $E(Y|X=x)$　(4)$V(Y|X)$　(5)$f_{X|Y}(x|y)$　(6)$E(X|Y)$　(7) $V(X|Y)$

■練習問題 6.20　$X_1 \sim N(2,3^2)$,　$X_1 = x$ のもとで $X_2 \sim N(2x+1,x^2)$,　$X_1 = x_1, X_2 = x_2$ のもとで $X_3 \sim N(3x_1+x_2,(x_1+x_2)^2)$ である。　以下を求めよ。

(1) $E(X_2|X_1=x)$　(2)$E(X_2)$　(3) $V(X_2|X_1=x)$　(4) $V(X_2)$　(5) $E(X_1X_2)$　(6)$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$
(7)$E(X_3)$　(8)$^{(*)}$ $V(X_3)$

(その他の条件付期待値の練習問題は　藤田岳彦・高岡浩一郎著　穴埋め式　確率統計らくらくワークブック　講談社　参照)

■十分統計量　まず、離散の場合　尤度関数　$L(x_1,\ldots,x_n;\theta) = P(X_1 = x_1 \cap \cdots \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1)\cdots P(X_n = x_n)$ をとり、さらに統計量 (母パラメータ θ の推定量) $T = \hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n)$ をとる。
このとき、$P(X_1 = x_1 \cap \cdots \cap X_n = x_n | T = x)$=母パラメータ θ に依存しない量　となるとき、統計量 T を母パラメータ θ に対する十分 (充足) 統計量という。　意味は　T で条件付けたら母パラメータ θ に依存しない量になるということは　この統計量は母パラメータ θ のすべての情報を含んだ統計量であるということを示している。連続確率変数の場合も同様である。

■例 (ポアソン母集団)　$X_1, \ldots X_n \sim Po(\lambda)$ で独立（ポアソン母集団からの n 個の標本) とする。$T = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とすると、上の x は　$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ でなければならず、(それでなければ　条件付き確率の分子=0) このとき、$P(X_1 = x_1 \cap \cdots \cap X_n = x_n | T = x) = \frac{P(X_1=x_1\cap\cdots\cap X_n=x_n\cap T=x)}{P(T=x)} = \frac{P(X_1=x_1\cap\cdots\cap X_n=x_n)}{P(Po(n\lambda)=x)} = \frac{x!}{x_1!\cdots x_n!}(\frac{1}{n})^x$　(多項分布) よって　右辺は　パラメータ λ に依存しないので　T は　パラメータ λ の十分統計量.

■例 (2 項母集団)　$X_1, \ldots X_n \sim B(N, p)$ で独立 (2 項母集団からの n 個の標本) とする。ただし　N は既知とする。$T = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とすると、上の x は　$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ でなければならず、(それでなければ　条件付き確率の分子=0) このとき、$P(X_1 = x_1 \cap \cdots \cap X_n = x_n | T = x) = \frac{P(X_1=x_1\cap\cdots\cap X_n=x_n\cap T=x)}{P(T=x)} = \frac{P(X_1=x_1\cap\cdots\cap X_n=x_n)}{P(B(nN,p)=x)} = \frac{\binom{N}{x_1}\cdots\binom{N}{x_n}}{\binom{nN}{x}}$　(多次元超幾何分布) よって　右辺は　パラメータ p に依存しないので　T は　パラメータ p の十分統計量.

■例 (幾何母集団)　$X_1, \ldots X_n \sim Ge(p)$ で独立 (幾何母集団からの n 個の標本) とする。$T = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とすると、上の x は　$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ でなければならず、(それでなければ　条件付き確率の分子=0) このとき、$P(X_1 = x_1 \cap \cdots \cap X_n = x_n | T = x) = \frac{P(X_1=x_1\cap\cdots\cap X_n=x_n\cap T=x)}{P(T=x)} = \frac{P(X_1=x_1\cap\cdots\cap X_n=x_n)}{P(NB(n,p)=x)} = \frac{1}{\binom{n+x-1}{x}}$ $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x$ 上の一様分布) よって　右辺は　パラメータ p に依存しないので　T は　パラメータ p の十分統計量.

■例 (正規母集団)　$X_1, \ldots X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ で独立（正規母集団からの n 個の標本) とする。ただし　σ^2 は既知とする。$T = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とすると、上の x は　$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ でなければならず、このとき、$L(x_1, \ldots, x_n | T = x) = \frac{f_{N(\mu,\sigma^2)}(x_1)\cdots f_{N(\mu,\sigma^2)}(x_n)}{f_{N(n\mu,n\sigma^2)}(x)} = \frac{\sqrt{2\pi}n\sigma}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{x^2}{2n\sigma^2}}$ よって　右辺は　パラメータ μ に依存しないので　T は　パラメータ μ の十分統計量.

6.5　順序統計量

$X_1, X_2, \ldots X_n$ を独立同分布の確率変数とする。また分布関数を $F(x)$, 密度関数を $f(x)$ とする。$X_1, X_2, \ldots X_n$ を大小順に並べ替えて $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}$ とする。

すると　$X_{(i)}$ の密度関数を　$f_{X_{(i)}}(x)$ とすると、$P(X_{(i)} \in (x, x + dx)) = n$ 個のうち $i - 1$ 個が x 以下かつ 1 個が x と $x + dx$ の間かつ $n - i$ 個が $x + dx$ 以上 $= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} F(x)^{i-1} f(x) dx (1 - F(x))^{n-i}$

つまり $f_{X_{(i)}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} F(x)^{i-1} (1 - F(x))^{n-i} f(x)$

とくに、

$f_{\min(X_1,\ldots,X_n)}(x) = f_{X_{(1)}}(x) = n(1 - F(x))^{n-1} f(x)$

$f_{\max(X_1,\ldots X_n)}(x) = f_{X_{(n)}}(x) = nF(x)^{n-1} f(x)$

また　$i < j$ として、$(X_{(i)}, X_{(j)})$ の密度関数を　$f_{(X_{(i)},X_{(j)})}(x, y)$　$(x < y)$ とすると

$P(X_{(i)} \in (x, x + dx) \quad \cap X_{(j)} \in (y, \mathrm{y} + dy)) = n$ 個のうち $i - 1$ 個が x 以下かつ 1 個が x と $x + dx$ の間かつ $j - i - 1$ 個が $x + dx$ 以上 y 以下 1 個が y と $y + dy$ の間 $n - j$ 個が $\mathrm{y} + dy$ 以上

$= \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} F(x)^{i-1} f(x) dx (F(y) - F(x))^{j-i-1} f(y) dy (1 - F(y))^{n-j}$

つまり $f_{(X_{(i)},X_{(j)})}(x, y) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} F(x)^{i-1} (F(y) - F(x))^{j-i-1} (1 - F(y))^{n-j} f(x) f(y)$

また、 $f_{(X_{(1)},X_{(2)},\ldots,X_{(n)})}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n! f_X(x_1) f_X(x_2) \cdots f_X(x_n)$　$(x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n)$

■ 例 (一様分布の順序統計量)　$U_1,\ldots,U_n \sim U(0,1)$ で独立とし、それらを並べ替えて順序統計量を作り、$U_{(1)} \leqq U_{(2)} \leqq \cdots \leqq U_{(n)}$ とする。
$f_{U_{(i)}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)}x^{i-1}(1-x)^{n-i}$,　つまり、

$$U_{(i)} \sim \beta(i, n-i+1), \quad E(U_{(i)}) = \frac{i}{i+n-i+1} = \frac{i}{n+1}, \quad V(U_{(i)}) = \frac{i(n-i+1)}{(n+1)^2(n+2)}$$

$i < j$ として、$f_{(U_{(i)},U_{(j)})}(x,y) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}x^{i-1}(y-x)^{j-i-1}(1-y)^{n-j}$　$(x < y)$　すると、$f_{U_{(j)}-U_{(i)}}(x) = \int_0^1 f_{(U_{(i)},U_{(j)})}(u,u+x)du = \int_0^{1-x}\frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}u^{i-1}x^{j-i-1}(1-u-x)^{n-j}du = \frac{x^{j-i-1}(1-x)^{n-j+i}}{B(j-i,n-j+i+1)}$
つまり、

$$U_{(j)} - U_{(i)} \sim \beta(j-i, n-j+i+1)$$

とくに　$\max(U_1,\ldots,U_n) - \min(U_1,\ldots,U_n) = U_{(n)} - U_{(1)} \sim \beta(n-1,2)$, $f_{\max(U_1,\ldots,U_n)-\min(U_1,\ldots,U_n)}(x) = n(n-1)x^{n-2}(1-x)$
ここで、$U_{(n)} - U_{(1)} = R$ は　範囲 (Range)(一般には $X_{(n)} - X_{(1)}$) といわれる統計量である。[*8]
$E(R) = E(\beta(n-1,2)) = \frac{n-1}{n+1}, V(R) = V(\beta(n-1,2)) = \frac{2(n-1)}{(n+1)^2(n+2)}$

もう少し調べてみると、(以下は ((**)))
$f_{(U_{(1)},U_{(2)},\ldots,U_{(n)})}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = n!$　$(0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n \leqq 1)$ より、変数変換を施して
$f_{(U_{(1)}-0,U_{(2)}-U_{(1)},\ldots,U_{(n)}-U_{(n-1)})}(y_1,y_2,\ldots,y_n) = n!$　$(y_i \geqq 0, y_1+y_2+\cdots+y_n \leqq 1)$
つまり、

$$(U_{(1)}, U_{(2)} - U_{(1)}, \ldots, U_{(n)} - U_{(n-1)}) \sim \beta(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n+1\text{ 個}}) \quad \text{(多次元ベータ分布は後述)}$$

これの周辺分布を考えても $U_{(i+1)} - U_{(i)} \sim \beta(1,n)$　$U_{(j)} - U_{(i)} \sim \beta(j-i, n-j+i+1)$ がわかる。
また、$v_1 = \frac{x_1}{x_2}, v_2 = \frac{x_2}{x_3}, \ldots, v_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n}, v_n = x_n$ とおいて変数変換すると、$x_1 = v_1v_2\cdots v_n, x_2 = v_2\cdots v_n, x_{n-1} = v_{n-1}v_n, x_n = v_n$ となるので　ヤコビアン$=v_2v_3^2\cdots v_{n-1}^{n-2}v_n^{n-1}$　となり、
$f_{(\frac{U_{(1)}}{U_{(2)}},\frac{U_{(2)}}{U_{(3)}},\ldots,\frac{U_{(n-1)}}{U_{(n)}},\frac{U_{(n)}}{1})}(v_1,v_2,\ldots,v_n) = 2v_2(3v_3^2)\ldots((n-1)v_{n-1}^{n-2})(nv_n^{n-1})$　$(0 \leqq v_1,v_2,\ldots,v_n \leqq 1)$
となり、

$$\frac{U_{(1)}}{U_{(2)}}, \frac{U_{(2)}}{U_{(3)}}, \ldots, \frac{U_{(n-1)}}{U_{(n)}}, \frac{U_{(n)}}{1} \text{は独立で、} f_{\frac{U_{(i)}}{U_{(i+1)}}}(x) = ix^{i-1} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

つまり、$\frac{U_{(i)}}{U_{(i+1)}} \sim \max(U_1,U_2,\ldots,U_i)$　がわかる。

■例 (指数分布の順序統計量)$^{(**)}$　まず、　$X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1} \sim Exp(\lambda)$ で独立とする。
$f_{(X_1,X_2,\ldots,X_n,X_{n+1})}(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}) = \lambda^{n+1}e^{-\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1})}$　$(x_i \geqq 0)$ を変数変換して、
$f_{(X_1,X_1+X_2,\ldots,X_1+\cdots+X_n,,X_1+\cdots+X_n+X_{n+1})}(y_1,y_2,\ldots,y_n,y) = \lambda^{n+1}e^{-\lambda y}$　$(0 \leqq y_1 \leqq \cdots \leqq y_n \leqq y)$

[*8] 一般には $f_R(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X_{(1)},X_{(n)})}(u,x+u)du = n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_X(u+x)(F_X(u+x)-F_X(u))^{n-2}du$ となる。

また周辺分布 $X_1+X_2+\cdots+X_{n+1}\sim\Gamma(n+1,\lambda)$ となるので
$f_{X_1+X_2+\cdots+X_{n+1}}(y)=\frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+1)}y^n e^{-\lambda y}$ (同時分布をn重積分しても得られる。)
つまり、 $f_{(X_1,X_1+X_2,\dots,X_1+\cdots+X_n)|X_1+X_2+\cdots+X_n+X_{n+1})}(y_1,y_2,\dots,y_n|y)$
$=\frac{f_{(X_1,X_1+X_2,\dots,X_1+\cdots+X_n,,X_1+\cdots+X_n+X_{n+1})}(y_1,y_2,\dots,y_n,y)}{f_{X_1+X_2+\cdots+X_{n+1}}(y)}$
$=\frac{n!}{y^n}\quad(0\leqq y_1\leqq\cdots y_n\leqq y)$
これは $X_1+X_2+\cdots+X_n+X_{n+1}=y$ という条件のもとでは、$(X_1,X_1+X_2,\dots,X_1+X_2+\cdots+X_n)\sim y(U_{(1)},U_{(2)},\dots,U_{(n)})$ を示しており、ほとんど同じことであるが、これは $\frac{1}{X_1+X_2+\cdots+X_n+X_{n+1}}(X_1,X_1+X_2,\dots,X_1+X_2+\cdots+X_n)\sim(U_{(1)},U_{(2)},\dots,U_{(n)})$ で $X_1+X_2+\cdots+X_{n+1}$ と独立であることを示している。これと ガンマ分布、ベータ分布の関係からも、 $U_{(i)}\sim\beta(i,n-i+1)$ がわかることに注意しておく。

さらに、$X_1,X_2,\dots,X_n$ を小さいほうから並べ替えて順序統計量 $(X_{(1)},X_{(2)},\dots,X_{(n)})$ を作ると、一様乱数 U_i を用いて $X_i=-\frac{1}{\lambda}\log U_i$ とおけることと、$-\log$ が単調減少より、$X_{(i)}=-\frac{1}{\lambda}\log U_{(n-i+1)}$ と表すことができる。すると、一様分布の結果を翻訳して、$X_{(1)},X_{(2)}-X_{(1)},\dots,X_{(n)}-X_{(n-1)}$ は独立で、$X_{(i+1)}-X_{(i)}\sim-\frac{1}{\lambda}\log\frac{U_{(n-i)}}{U_{(n-i+1)}}\sim-\frac{1}{\lambda}\log\max(U_1,U_2,\dots,U_{n-i+1})$ がわかり、
$P(X_{(i+1)}-X_{(i)}\geqq x)=P(-\frac{1}{\lambda}\log\max(U_1,U_2,\dots,U_{n-i+1})\geqq x)=P(\max(U_1,U_2,\dots,U_{n-i+1})\leqq e^{-\lambda x})=e^{-(n-i)\lambda x}$,つまり、$X_{(i+1)}-X_{(i)}\sim Exp(\lambda(n-i))$ がわかる。$X_{(1)}\sim\min(X_1,X_2,\dots,X_n)\sim Exp(n\lambda)$ $(X_{(0)}=0$ と考えても良い。) とあわせて $X_{(i)}\sim Exp(n\lambda)+\cdots+Exp((n-i+1)\lambda)$ となり、$E(X_{(i)})=\frac{1}{\lambda}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{n-i+1})$ とくに $E(\max(X_1,X_2,\dots,X_n))=\frac{1}{\lambda}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}+1)$ となる。(これは 後述の指数分布のところでは別のやり方で証明した。)[*9]

■練習問題 6.21 $U_i(i=1,2,3,4)\sim U(0,1)$ で独立とする。以下を求めよ。(1) $P(U_2<U_3<U_4<U_1)$ (2)$P(U_1<U_2>U_3>U_4)$ (3) $f_{U_{(2)}}$ (4)$E(U_{(2)})$ (5)$V(U_{(2)})$ (6)$P(U_{(3)}+U_{(4)}<1)$ (7) さらに U_i と独立な $X\sim U(0,1)$ をとってきたとき、$P(X\leqq U_{(2)})$

■練習問題 6.22 $X_i(i=1,2,3,4,5)$ は独立で同分布 $f_{X_i}(x)=2x\,(0\leqq x\leqq 1)$ とする。以下を求めよ。

(1) $f_{X_{(3)}}(x)$ を求めよ。(X_3 は順序統計量としてのメディアンである。
(2) $E(X_{(3)})$ (3) $f_{(X_{(4)},X_{(5)})}(x,y)$ (4)$f_{X_{(4)}|X_{(5)}}(x|y)$
(5)$E(X_{(4)}|X_{(5)})$

■練習問題 6.23 長さ 1 の線分上にランダムに 2 点をとり、端に近いほうの長さを X とするとき、分布関数 $F_X(u)$ を求めよ。

■練習問題 6.24 (1)$U_1,U_2\sim U(0,2\pi)$ で独立とするとき、範囲 $R=U_{(2)}-U_{(1)}$ の密度関数を求めよ。
(2) 円周上に無作為に 2 点をとったとき、 短いほうの弧の長さ Y を R を用いて定義し、$E(Y)$ を求めよ。

[*9] 指数分布の無記憶性を用いれば 、次のように直感的にも理解できる。まず最初は n 個の独立な指数分布の最小のものなので、$Exp(n\lambda)$ その後は $n-1$ 個に個数が減り、また指数分布の無記憶性より、前と独立、これを繰り返していけばよい。 またこの考え方を用いて、お菓子のおまけが n 種類あるとき全種類そろえるまでに平均何回かかるか？ という問題なども同様の考え方で解ける。

■練習問題 6.25 $X_1, X_2, \ldots, X_5$ は独立で同分布な連続確率変数とする。 このとき以下を求めよ。
(1)$P(X_1 < X_2 < X_3 < X_4 < X_5)$, $P(X_1 < X_5 < X_3 < X_2 < X_4)$
(2)$P(\max(X_1, X_2, X_3) < \min(X_4, X_5))$

■練習問題 6.26 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立で同分布, 共通の密度関数を $f(x)$, 分布関数を $F(x)$ とする。$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を並べ替えて、 $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}$ とし、 $Y_{i,n} = F(X_{(i)})$, $Z_{i,n} = nY_{i,n}$ [*10]とするとき、以下を求めよ。
(1) $f_{X_{(n)}}(x)$ (2) $f_{X_{(1)}}(x)$ (3) $f_{X_{(i)}}(x)$ (4) $i < j$ として $f_{(X_{(i)}, X_{(j)})}(x, y)$ (5)$f_{X_{(n)} - X_{(1)}}(x)$
(6)$f_{Y_{i,n}}$ (7)$E(Y_{i,n})$ (8) $\lim_{n\to\infty} F_{Z_{n,n}}(n - x)$ (9) $\lim_{n\to\infty} F_{Z_{1,n}}(x)$

6.6 死力、故障率、危険率

$P(X > 0) = 1$ である連続確率変数[*11] となる X に対して $\lambda_X(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t<X<t+\Delta t|X>t)}{\Delta t}$ となる $\lambda_X(t)$ を死力 (force of mortality)、故障率 (failure rate)、危険率 (hazard rate) などと呼ぶ[*12]。 意味は X を機械や生物、対象物の寿命としたとき、 $P(X > t)$= t まで生きている確率 (生存関数=$\bar{F}_X(t)$=$1 - F_X(t)$ と呼ばれる.) なので t まで動いている機械が t と $t + \Delta t$ の間に故障する確率が $\lambda_X(t)\Delta t$ となるものである。[*13]

$$\lambda_X(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < X < t + \Delta t | X > t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{F}_X(t) - \bar{F}_X(t + \Delta t))}{\Delta t \bar{F}_X(t)} = \frac{f_X(t)}{\bar{F}_X(t)} = \frac{d}{dt}(-\log \bar{F}_X(t))$$

すると、

$$-\log \bar{F}_X(t) = \int_0^t \lambda_X(s) ds, \quad \bar{F}_X(t) = e^{-\int_0^t \lambda_X(s) ds} \quad (\because \bar{F}_X(0) = 1),$$

$$F_X(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda_X(s) ds}, \; f_X(t) = \lambda_X(t) e^{-\int_0^t \lambda_X(s) ds}$$

のように $\lambda_X(t)$ から確率分布のすべてが再現される。

生存確率 ${}_tp_x$ (現在 x 歳の人がさらに t 年より多く生きる確率) を考える。すると、

$${}_tp_x = P(X > x + t | X > x) = \frac{\bar{F}_X(x + t)}{\bar{F}_X(x)} = e^{-\int_x^{x+t} \lambda_X(s) ds}$$

x 歳の人の平均余命 $\mathring{e}_x = E(X - x | X > x) = \int_0^\infty P(X - x > t | X > x) dt = \int_0^\infty {}_tp_x dt$, ($\because$ 期待値 = テイル確率 (しっぽ確率) の積分 を用いた)[*14]
$\int_0^\infty t\,{}_tp_x dt = \int_0^\infty tP(X - x > t | X > x) dt = E(\int_0^\infty t1_{X-x>t} dt | X - x) = E(\int_0^{X-x} t dt | X > x) = \frac{1}{2}E((X - x)^2 | X > x)$ より、

[*10] 本来 $X_{(i)}$ は n にも依存していることに注意する。
[*11] 非負値離散確率変数に対しては $\lambda_X(k) = \frac{P(X=k)}{1-F_X(k-0)} = \frac{P(X=k)}{\bar{F}_X(k)}$
[*12] 保険数理、信頼性工学、 医学統計、金融工学など様々の分野で使われる重要な概念である。 分野に応じて使用する名前が異なるがすべて同じ意味である。
[*13] 生保数理では $\lambda_X(t) = \mu_t$ と書かれる。
[*14] x 歳の人の余命確率密度 $f_{X-x|X>x}(t) = -\frac{d}{dt} P(X - x > t | X > x) = -\frac{d}{dt} {}_tp_x = (\frac{f_X(x+t)}{P(X>x)} = \frac{f_X(x+t)}{P(X>x+t)} \frac{P(X>x+t)}{P(X>x)} = \mu_{x+t}\,{}_tp_x)$ を用いて部分積分してもよい。 また、集団の寿命 ω がある場合は $\mathring{e}_x = E(X - x | X > x) = \int_0^{\omega - x} P(X - x > t | X > x) dt = \int_0^{\omega - x} {}_tp_x dt$ となるが, 自然に ${}_tp_x = 0 \, (t > \omega - x)$ となるので上のままでもよい。

x 歳の人の余命の分散$=E((X-x)^2|X>x)-(E(X-x|X>x))^2=\int_0^\infty 2t{}_tp_x dt-(\int_0^\infty {}_tp_x dt)^2$ で計算される。

また，　定期平均余命 (つまり、n 年後以降は n と数えた平均余命。生命保険数理テキスト参照)${}_n\mathring{e}_x=E(\min(X-x,n)|X>x))=\int_0^\infty P(\min(X-x,n)>t|X>x)dt=\int_0^\infty P(X-x>t\cap n>t|X>x)=\int_0^n P(X-x>t|X>x)dt=\int_0^n {}_tp_x dt$ で計算され、据置平均余命 (n 年後以降の超過年数だけを数える.) ${}_{n|}\mathring{e}_x=E(\max(X-x-n,0)|X>x)=\int_0^\infty P(\max(X-x-n,0)>t|X>x)dt=\int_0^\infty P(X-x-n>t\cup 0>t)|X>x)dt=\int_0^\infty P(X-x>n+t)|X>x)dt=\int_n^\infty P(X-x>t)|X>x)dt=\int_n^\infty {}_tp_x dt$ で計算される。$\min(X-x,n)+\max(X-x-n,0)=X-x$ より、　$\mathring{e}_x={}_n\mathring{e}_x+{}_{n|}\mathring{e}_x$ である。

■計算例 (1)$X\sim U(0,T)$　$T>t$ として、$\bar{F}_X(t)=P(X>t)=\frac{T-t}{T}$
$\lambda_X(t)=-\frac{\partial}{\partial t}\log\bar{F}_X(t)=\frac{1}{T-t}$
$0<x<T,0<t<T-x$ に対して ${}_tp_x=\frac{\bar{F}_X(x+t)}{\bar{F}_X(x)}=\frac{T-t-x}{T-x}$

■計算例 (2)$X\sim Exp(\lambda)$　$t>0$ として、$\bar{F}_X(t)=P(X>t)=\int_t^\infty \lambda e^{-\lambda u}du=e^{-\lambda t}$
$\lambda_X(t)=-\frac{\partial}{\partial t}\log\bar{F}_X(t)=\lambda$
$t>0$ に対して ${}_tp_x=\frac{\bar{F}_X(x+t)}{\bar{F}_X(x)}=e^{-\lambda t}$ [*15]

■計算例 (3)$X\sim\max(U(0,T),U(0,T))$　$T>t$ として、$\bar{F}_X(t)=P(X>t)=1-\frac{t^2}{T^2}$
$\lambda_X(t)=-\frac{\partial}{\partial t}\log\bar{F}_X(t)=\frac{2t}{T^2-t^2}$
$0<x<T,0<t<T-x$ に対して ${}_tp_x=\frac{\bar{F}_X(x+t)}{\bar{F}_X(x)}=\frac{T^2-(x+t)^2}{T^2-x^2}$

■計算例 (4)$X\sim\min(U(0,T),U(0,T))$　$T>t$ として、$\bar{F}_X(t)=P(X>t)=(\frac{T-t}{T})^2$
$\lambda_X(t)=-\frac{\partial}{\partial t}\log\bar{F}_X(t)=\frac{2}{T-t}$
$0<x<T,0<t<T-x$ に対して ${}_tp_x=\frac{\bar{F}_X(x+t)}{\bar{F}_X(x)}=(\frac{T-(x+t)}{T-x})^2$

■計算例 (5)$X\sim\min(Exp(\lambda),Exp(\lambda))$　$\min(Exp(\lambda),Exp(\lambda))\sim Exp(2\lambda)$ より、$t>0$ として、$\bar{F}_X(t)=P(X>t)=\int_t^\infty \lambda e^{-\lambda u}du=e^{-2\lambda t}$
$\lambda_X(t)=-\frac{\partial}{\partial t}\log\bar{F}_X(t)=2\lambda$
$t>0$ に対して ${}_tp_x=\frac{\bar{F}_X(x+t)}{\bar{F}_X(x)}=e^{-2\lambda t}$

■計算例 (6)$X\sim\max(Exp(\lambda),Exp(\lambda))$　$t>0$ として、$\bar{F}_X(t)=P(X>t)=1-P(X\leqq t)=1-(1-e^{-\lambda t})^2$
$\lambda_X(t)=-\frac{\partial}{\partial t}\log\bar{F}_X(t)=\frac{2(1-e^{-\lambda t})\lambda e^{-\lambda t}}{1-(1-e^{-\lambda t})^2}$
$t>0$ に対して ${}_tp_x=\frac{\bar{F}_X(x+t)}{\bar{F}_X(x)}=\frac{1-(1-e^{-\lambda(x+t)})^2}{1-(1-e^{-\lambda x})^2}$

[*15] これが　x に依存しないことが指数分布の無記憶性の意味

■計算例 (7)$X \sim |N(0,1)|$　$t>0$ として、$\bar{F}_X(t)=P(|N(0,1)|>t)=2(1-\Phi(x))$　$\Phi(x)=P(N(0,1)\leqq x)$
$\lambda_X(t)=-\frac{\partial}{\partial t}\log\bar{F}_X(t)=\frac{f_{N(0,1)}(t)}{1-\Phi(t)}$
$t>0$ に対して ${}_tp_x=\frac{\bar{F}_X(x+t)}{\bar{F}_X(x)}=\frac{1-\Phi(x+t)}{1-\Phi(x)}$

■計算例 (8)X = ワイブル分布　X がパラメータ $\gamma(>0),a(>0)$ のワイブル分布であるとは密度関数が $f_X(x)=a\gamma(ax)^{\gamma-1}e^{-(ax)^\gamma}$　$(x>0)$ となることである。$t>0$ として、$\bar{F}_X(t)=P(X>t)=e^{-(at)^\gamma}$
$\lambda_X(t)=-\frac{\partial}{\partial t}\log\bar{F}_X(t)=a\gamma(at)^{\gamma-1}$
$t>0$ に対して ${}_tp_x=\frac{\bar{F}_X(x+t)}{\bar{F}_X(x)}=e^{-a(x+t)^\gamma+(ax)^\gamma}$

■計算例 (9) **ゴムパーツモデル**　$A>0,B>0$ として、$\lambda_X(t)=Ae^{Bt}$ と仮定されたモデルをゴムパーツモデルという。
$\bar{F}_X(t)=e^{-\int_0^t\lambda_X(s)ds}=e^{-\frac{A(e^{Bt}-1)}{B}}$
$t>0$ に対して ${}_tp_x=\frac{\bar{F}_X(x+t)}{\bar{F}_X(x)}=e^{-\frac{Ae^{Bx}(e^{Bt}-1)}{B}}$

■計算例 (10) **メーカムモデル**　$A>0,B>0$ として、$\lambda_X(t)=C+Ae^{Bt}$ と仮定されたモデルをメーカムモデルという。
$\bar{F}_X(t)=e^{-\int_0^t\lambda_X(s)ds}=e^{-Ct-\frac{A(e^{Bt}-1)}{B}}$
$t>0$ に対して ${}_tp_x=\frac{\bar{F}_X(x+t)}{\bar{F}_X(x)}=e^{-Ct-\frac{Ae^{Bx}(e^{Bt}-1)}{B}}$

■ 練習問題 6.27　$A>0,B>0,C>0$ として、(1)$\lambda_X(t)=C+At^B$ のとき、(2)$\lambda_X(t)=C+A\log(t+B)$ の各場合について、$\bar{F}_X(t)$, ${}_tp_x$ をそれぞれ求めよ。

■練習問題 6.28　上の計算例 (1) から (6)　において　平均余命$\mathring{e}_x$, 据置平均余命 ${}_{n|}\mathring{e}_x$ をそれぞれ求めよ。

■練習問題 6.29　以下の密度関数を持つ確率変数について, 死力 $\lambda_X(t)$ をそれぞれ求めよ。(1) $2t\,(0\leqq t\leqq 1)$
(2) $\frac{1}{t^2}\,(t\geqq 1)$
(3) $2te^{-t^2}\,(t\geqq 0)$

■練習問題 6.30　以下の死力 $\lambda_X(t)$, $(t\geqq 0)$　が与えられたとき、対応する非負確率変数の分布関数 $F_X(t)$ をそれぞれ求めよ。
(1)$\frac{1}{1+t}$　(2)$2t$　(3)t^3　(4)e^{-t}

■練習問題 6.31　ある生物の死力は at^3, $(t\geqq 0)$ でそのメディアンは 4 ヶ月である。定数 a を求め、新しく生まれた生物が少なくとも 6 ヶ月生きる確率を求めよ。

■練習問題 6.32　ある機械の故障率は $\lambda_X(t)=\begin{cases}1-t & (0\leqq t\leqq 1)\\ t-1 & (t\geqq 1)\end{cases}$ である。密度関数 $f_X(t)$ とメディアン m をそれぞれ求めよ。

■練習問題 6.33　ある電灯の故障率は　$\lambda_X(t)=\begin{cases}1/2 & (0\leqq t\leqq 1)\\ t & (1\leqq t\leqq 2)\\ 4 & (t\geqq 2)\end{cases}$ である。　電灯の寿命を X としたとき、　$P(X>1)$, $P(X>2)$, メディアン m を求めよ。

6.7　離散確率分布

以下、色々分布例を紹介する。

6.7.1　２項分布 $B(n,p)$，ベルヌーイ分布 $Be(p)$=$B(1,p)$

(2 項分布は $\mathrm{Bin}(n,p)$, $\mathrm{b}(n,p)$, $\mathrm{Binom}(n,p)$, $\mathrm{Bn}(n,p)$ などとも書かれる)

■2 項分布の定義　$X\sim B(n,p)$　(パラメータ n,p の 2 項分布) であるとは、

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$$

(注意：これは X の分布 $=B(n,p)$ という意味。同様に $X\sim Y$ と書けば X の分布 $=Y$ の分布)
とくに、$B(1,p)=Be(p)$　(パラメータ p のベルヌーイ分布)
　$P(Be(p)=1)=p,\quad P(Be(p)=0)=1-p$
これは、成功と失敗しかない試行「ベルヌーイ試行」(または、試行を成功と失敗の 2 種類に分類する) で成功すれば 1, 失敗すれば 0 としたもの (成功確率 $=p$ とする)
つまり、$X'\sim Be(p)$ であるとは、

$$X'=\begin{cases}1 & (\text{成功})\\ 0 & (\text{失敗})\end{cases}$$

と成功をカウントする確率変数。

■2 項分布の意味　2 項分布の意味は n 回独立にベルヌーイ試行を行うときの成功回数 $=X$ とすると、$X\sim B(n,p)$

■2 項分布の性質

- $E(X)=np,\quad V(X)=np(1-p),\quad E(t^X)=(1-p+pt)^n$
- ベルヌーイ分布との関連
  $X_1,X_2,\cdots,X_n\sim Be(p)$ で独立とし、$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$ とすると、$X\sim B(n,p)$
  ($\because$ $E(t^{X_i})=1-p+pt$ より $E(t^{X_1+X_2+\cdots+X_n})=(1-p+pt)^n=E(t^X)$)
- 再生性　$X\sim B(n,p)$,　$Y\sim B(m,p)$,　X,Y は独立なら
  $X+Y\sim B(n+m,p)$
- $n-X\sim B(n,1-p)$
- $X\sim B(n,p_1)$, 条件 $X=k$ のもとで $Y\sim B(k,p_2)$ なら $Y\sim B(n,p_1p_2)$

(ただし、$k=0$ なら $P(Y=0)=1$ とする)

$$\because E(t^Y)=E(E(t^Y|X))=E(E(t^Y|X=k)|_{k=X})=E((1-p_2+tp_2)^X)$$
$$=(1-p_1+p_1(1-p_2+tp_2))^n=(1-p_1p_2+p_1p_2t)^n=E(t^{B(n,p_1p_2)})$$

- $X\sim Po(\lambda)$, $X=k$ のもとで $Y\sim B(k,p)$ なら $Y\sim Po(\lambda p)$

$$E(t^Y)=E(E(t^Y|X))=E((1-p+pt)^X)=e^{-\lambda(1-(1-p+pt))}=e^{-\lambda p(1-t)}=E(t^{Po(p\lambda)})$$

■計算例 $X\sim B(n,p)$, $Y\sim B(m,p)$, $Z\sim B(m',1-p)$ X,Y,Z は独立とする。

・ $P(XY=0)=P(X=0)+P(Y=0)-P(X=0)P(Y=0)=(1-p)^n+(1-p)^m-(1-p)^{m+n}$

・ $m\geq 2$, $n\geq 2$ として

$$P(XY=2)=P(X=1\cap Y=2)+P(X=2\cap Y=1)$$
$$=np(1-p)^{n-1}\binom{m}{2}p^2(1-p)^{m-2}+\binom{n}{2}p^2(1-p)^{n-2}mp(1-p)^{m-1}$$

・ $P(X=Z)=P(X+m'-Z=m')=P(B(n,p)+B(m',p)=m')=P(B(n+m',p)=m')$

$$=\binom{n+m'}{m'}p^{m'}(1-p)^n$$

・ $E(2^X)=g_X(2)=(1-p+2p)^n=(1+p)^n$

$E(X2^X)=2g'_X(2)=2np(1+p)^{n-1}$

・ $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)=E\left[\displaystyle\int_0^1 t^X\,dt\right]=\displaystyle\int_0^1 E(t^X)\,dt=\int_0^1 g_X(t)\,dt=\int_{1-p}^1 u^n\frac{du}{p}=\frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$

・ $p\sim U(0,1)$ で X と独立とすると

$$P(X=k)=\int_0^1 P(X=k|p=x)\,dx=\binom{n}{k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx=\binom{n}{k}B(k+1,\,n-k+1)$$
$$=\binom{n}{k}\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$$

つまり、$X\sim DU\{0,1,2,\cdots,n\}$

・ $B(N,p)$ で N が既知のときの p の最尤推定量

$L(p)=P(X_1=x_1)\cdots P(X_n=x_n)=$ 定数 $\times p^{x_1}(1-p)^{N-x_1}\cdots p^{x_n}(1-p)^{N-x_n}$

$\therefore 0=\dfrac{\partial\log L(p)}{\partial p}=\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{p}-\dfrac{Nn-(x_1+\cdots+x_n)}{1-p}$ を解いて

$\hat{p}=\dfrac{\sum x}{Nn}=\dfrac{\overline{x}}{N}$ これは、$E(\hat{p})=E(\dfrac{\overline{x}}{N})=\dfrac{Np}{N}=p$ より不偏推定量。

■シミュレーション 離散逆関数法を用いる。または、

$U_1,U_2,\ldots,U_n\sim U(0,1)$ で独立とし、$X_i=\begin{cases}1 & U_i<p\\ 0 & U_i\geqq p\end{cases}$ とベルヌーイ確率変数を作り、$X=\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$ とする。

■練習問題 6.34 $X_k\sim Be(p_k)$ で $X_1,\ldots X_n$ は独立とする。このとき、 $\max(X_1,\ldots,X_n)\sim ?$, $\min(X_1,\ldots,X_n)\sim ?$

■練習問題 6.35　$X_1,\dots X_n$は独立で　$X_i\sim Be(p)$ である。$X_i=0\cap X_{i+1}=1$ となる $i(i=1,\dots n-1)$ の個数を Y とする。$E(Y)$, $V(Y)^{(*)}$ を求めよ。

■練習問題 6.36　大・小のサイコロを同時に投げる試行を n 回繰り返す。　X=大のサイコロが 4 以上の目が出た試行回数, Y=サイコロの目の合計が 9 以上の試行回数 とするとき、X の分布, Y の分布, $E(X)$.、$V(X)$, $E(Y)$, $V(Y)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)^{(*)}$(Hint: i 回目の試行で大のサイコロが 4 以上のとき 1, 3 以下のとき 0　とする確率変数を X_i, 同様に Y_j をつくり、 X,Y をそれらで表す.) また、サイコロの目の合計が 9 以上が 3 回以上おこったときだけ得点が与えられ、その試行回数と 3 の差だけ得点が与えられるゲームの期待得点も求めよ。

■ 練習問題 6.37　　3 個のサイコロを同時に投げる試行で出た目の数の積が 4 で割り切れる事象を A とする。この事象を n 回 $(n\geqq 2)$ 繰り返すとき、事象 A がちょうど k 回起これば 2^k 円もらえるとする。　もらえるお金を X とするとき、$E(X)$, $V(X)$ を求めよ。 また、2 回以上起こったときのみ、起こった回数と 2 の差額だけもらえるとしたとき、もらえる金額を Y とし、$E(Y)$, $E(Y^2)^{(*)}$ を求めよ。　また、事象 A が i 回目に起こったら 2^i 円もらえ i 回目に起こらなかったらなにももらえないとするとしもらえる金額の総計を Z とするとき、$E(Z)$, $V(Z)$ を求めよ。

■練習問題 6.38　$X\sim B(n+1,1/2), Y\sim B(n,1/2)$ で独立とする。
$P(X>Y)$ を求めよ。
(Hint $n+1-X\sim X$, $n-Y\sim Y$ を用いよ。)

6.7.2　離散一様分布, $DU\{1,2,\cdots,n\}$, $DU\{0,1,2,\cdots,n\}$

■離散一様分布の定義　X〜$DU\{1,2,\cdots,n\}$　($\{1,2,\cdots,n\}$ 上の離散一様分布)　であるとは、

$$P(X=k)=\frac{1}{n}\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

すると、$E(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kP(X=k)=\frac{n+1}{2},\qquad E(X^2)=\sum_{k=1}^{n}k^2P(X=k)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\therefore\quad V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{(n+1)(n-1)}{12},\qquad E(t^X)=\sum_{k=1}^{n}t^k\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{t-t^{n+1}}{1-t}$$

同様に X〜$DU\{0,1,2,\cdots,n\}$ であるとは、

$$P(X=k)=\frac{1}{n+1}\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$$

$$E(X)=\frac{n}{2},\qquad V(X)=\frac{n(n+2)}{12},\quad E(t^X)=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1-t^{n+1}}{1-t}$$

■計算例　　X,Y〜$DU\{0,1,2,\cdots,n\}$　X,Y は独立のとき

$P(0\leq X+Y\leq 2n)=1$ は明らか。

$0\leq k\leq n$ のとき、$P(X+Y=k)=\displaystyle\sum_{l=0}^{k}P(X=k-l)P(Y=l)=\frac{k+1}{n^2}$

$n\leq k\leq 2n$ のとき、$P(X+Y=k)=P(n-X+n-Y=2n-k)=\dfrac{2n-k+1}{n^2}$

■シミュレーション

$$[(n+1)U] \sim DU\{0,1,2,\cdots,n\}$$

$$[(nU)]+1 \sim DU\{1,2,\cdots,n\}$$

■練習問題 6.39 1 から N までの N 個の目を持つサイコロが大・小 2 つある。 このサイコロを同時に投げて 大のサイコロの目を X, 小のサイコロの目を Y とする．すると、 $P(X=k)=P(Y=k)=\frac{1}{N}$ $(1 \leqq k \leqq N)$ で X, Y は独立である。 このとき以下を求めよ。ただし $1 \leqq k \leqq N$ で (1) では $N \geqq 4$ とする。

(1) $P(XY \leqq 4 \cup X \leqq 2)$ (2)$E(X)$ (3)$V(X)$ (4)$E(X(X+1))$
(5) $E(\frac{1}{X(X+1)})$ (6)$E(\frac{1}{X(X+1)(X+2)})$ (7)$E(3^X)$
(8) $P(\max(X,Y) \leqq k)$ (9) $P(\max(X,Y)=k)$ (10) $P(\min(X,Y) \geqq k)$
(11) $P(\min(X,Y)=k)$ (12) $E(\max(X,Y))$ (13) $V(\max(X,Y))$
(14) $E(\min(X,Y))$ (15) $E(X|X \geqq k)$ (16)$E(X^2|X \leqq k)$
(17) $E(X|X \geqq Y)$ (18) $E(X^2|X \geqq Y)$ (19) $E(X+Y|X)$
(20) $E(X|X+Y)$

■練習問題 6.40 1 から N までのカードがそれぞれ 1 枚ずつあり カードを 1 枚引きその数を X , それを元に戻さないでカードを 1 枚引きその数を Y とするとき、 以下を求めよ。ただし $1 \leqq k \leqq N$ で (1) では $N \geqq 4$ とし、(1) 以外では $N \geqq 2$ とする。

(1) $P(XY \leqq 4 \cup X \leqq 2)$ (2)$E(X)$ (3)$V(X)$ (4)$E(X(X+1))$
(5) $E(\frac{1}{X(X+1)})$ (6)$E(\frac{1}{X(X+1)(X+2)})$ (7)$E(3^X)$
(8) $P(\max(X,Y) \leqq k)$ (9) $P(\max(X,Y)=k)$ (10) $P(\min(X,Y) \geqq k)$
(11) $P(\min(X,Y)=k)$ (12) $E(\max(X,Y))$ (13) $V(\max(X,Y))$
(14) $E(\min(X,Y))$ (15) $E(X|X \geqq k)$ (16)$E(X^2|X \leqq k)$
(17) $E(X|X \geqq Y)$ (18) $E(X^2|X \geqq Y)$ (19) $E(X+Y|X)$

■練習問題 6.41 1 から N までの N 個の目を持つサイコロが大・中・小 3 つある。 このサイコロを同時に投げて 大のサイコロの目を X, 中ののサイコロの目を Y、小のサイコロの目を Z とする．すると、 $P(X=k)=P(Y=k)=P(Z=k)=\frac{1}{N}$ $(1 \leqq k \leqq N)$ で X, Y, Z は独立である。 このとき以下を求めよ。ただし $1 \leqq k \leqq N$ で (1), (2) では $N \geqq 4$ とする。

(1) $P(XYZ=4)$ (2)$P(X+Y+Z=4)$ (3)$E(\max(X,Y,Z))$
(4)$P(X+Y=Z)$ (5)$P(X+Y \leqq Z)$ (6)$E(X|X \geqq Y+Z)$
(7)$E(X+Y+Z|Y+Z)$ (8)$E(X|X+Y+Z)$

■練習問題 6.42 1 から $N(N \geqq 3)$ までの数が書かれた N 枚のカードがあり、そこから 3 枚を一度に抜き出し書かれている数を X_1, X_2, X_3 とする。また、X_1, X_2, X_3 を小さいほうから並べ替えて $X_{(1)} < X_{(2)} < X_{(3)}$ とする。 このとき、以下を求めよ。ただし (2) では $N \geqq 6$ とする。

(1)$P(X_1+X_2+X_3=6)$ (2) $P(X_1X_2X_3=12)$ (3) $E(X_i), V(X_i)$ (4)$E(X_1|X_1>X_2, X_1>X_3)$
(5) $E(X_1, X_2 < X_1 < X_3)$ (6) $i \neq j$ のとき、$Cov(X_i,X_j)$, $\rho(X_i,X_j)$, $V(X_1+X_2+X_3)$ (7) $E(X_{(1)}$,$E(X_{(2)})$,$E(X_{(3)})$

6.7.3　幾何分布 $Ge(p)$, ファーストサクセス分布 $Fs(p)$

■幾何分布 $Ge(p)$ の定義　　($Geom(p)$ などとも書く)

$X \sim Ge(p)$ であるとは、

$$P(X=k)=p(1-p)^k \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

■幾何分布の意味　：独立にベルヌーイ試行を行うとき、初めて成功するまでに失敗した回数 $=X$ とすると、$X \sim Ge(p)$

$$E(X)=\frac{1-p}{p},\quad V(X)=\frac{1-p}{p^2},\quad E(t^X)=\frac{p}{1-(1-p)t}$$

初めて成功するまでの回数 $=X'$ とすると、$X' \sim F_s(p)$ 「パラメータ p のファースト サクセス分布」と書き[*16] $X'=X+1$ に注意しておく。

$$P(X'=k)=p(1-p)^{k-1} \quad (k=1,2,\cdots)$$

となり、

$$E(X')=\frac{1}{p},\quad V(X')=\frac{1-p}{p^2},\quad E(t^{X'})=\frac{pt}{1-(1-p)t}$$

■幾何分布の性質　

- $X_1,X_2,\cdots,X_n$ は独立で $X_i \sim Ge(p)$ とし、$Y=X_1+X_2+\cdots+X_n$ とすると、$Y \sim NB(n,p)$　(負の 2 項分布の関連)
- $P(X \geq k)=(1-p)^k$
  $P(X \geq k+l|X \geq k)=P(X \geq l)=(1-p)^l$　(無記憶性)
  つまり $X \geq k$ という条件のもとで、$X-k \sim Ge(p)$。　例えば $E(X|X \geq k)=k+E(X-k|X \geq k)=k+\dfrac{1-p}{p}$
- $X_1 \sim X_2 \sim Ge(p)$ で X_1,X_2 は独立とすると、$0 \leq k \leq n$ とし

$$\begin{aligned}P(X_1=k|X_1+X_2=n)&=\frac{P(X_1=k \cap X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)}=\frac{P(X_1=k)P(X_2=n-k)}{P(NB(2,p)=n)}\\&=\frac{p(1-p)^k p(1-p)^{n-k}}{\binom{2+n-1}{2-1}p^2(1-p)^n}=\frac{1}{n+1} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

　　つまり $X_1+X_2=n$ のもとで、X_1 の分布は $DU\{0,1,2,\cdots,n\}$

  また、

  $E(X_1|X_1+X_2=n)=E(DU\{0,1,2,\cdots,n\})=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\frac{1}{n+1}=\frac{n}{2}$

  $E(X_1|X_1+X_2)=\dfrac{X_1+X_2}{2},\quad V(X_1|X_1+X_2=n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\frac{1}{n+1}-\left(\frac{n}{2}\right)^2=\frac{n(n+2)}{12}$

  $X_3 \sim Ge(p)$ で　X_1,X_2 と独立とすると、　次節の負の 2 項分布を用いて, $0 \leqq k \leqq n$ に対して、

  $P(X_1=k|X_1+X_2+X_3=n)=\frac{2(n-k+1)}{(n+1)(n+2)}$
- $\min(X_1,X_2) \sim Ge(1-(1-p)^2)$

[*16] 文献によっては、こちらの方を幾何分布ということもあるので注意しておくこと, 見分け方はここの定義での幾何分布のとる値は $\mathbb{N} \cup \{0\}$ で　ファーストサクセス分布のとる値は　$\mathbb{N}$ である。

$\because\ \ P(\min(X_1,X_2){\geq}k)=P(X_1{\geq}k{\cap}X_2{\geq}k)=P(X_1{\geq}k)P(X_2{\geq}k)=(1-p)^{2k}$

$\therefore\ P(\min(X_1,X_2)=k)=(1-p)^{2k}-(1-p)^{2k+2}=(1-(1-p)^2)(1-p)^{2k},$

$\therefore\ E(\min(X_1,X_2))=\dfrac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2}$

X_1-X_2 と　$\min(X_1,X_2)$ は独立 ($\because l \geqq 0$ として $k>0$ のとき $P(X_1-X_2=k\cap \min(X_1,X_2)=l)=p^2(1-p)^k(1-p)^{2l}$

同様に他の場合も調べて　$P(X_1-X_2=k\cap \min(X_1,X_2)=l)=p^2(1-p)^{|k|}(1-p)^{2l}=\frac{p}{2-p}(1-p)^{|k|}(1-(1-p)^2)(1-p)^{2l}=P(X_1-X_2=k)P(\min(X_1,X_2)=l)$

また,確率母関数を用いても $E(t^{X_1-X_2}s^{\min(X_1,X_2)})=E(t^{X_1-X_2}s^{\min(X_1,X_2)},X_1>X_2)+E(t^{X_1-X_2}s^{\min(X_1,X_2)},X_1=X_2)+E(t^{X_1-X_2}s^{\min(X_1,X_2)},X_1<X_2)=\frac{p^2}{1-(1-p)^2s}\frac{t(1-p)}{1-(1-p)t}+\frac{p^2}{1-(1-p)^2s}+\frac{p^2}{1-(1-p)^2s}\frac{\frac{1-p}{t}}{1-\frac{1-p}{t}})=\frac{1-(1-p)^2}{1-(1-p)^2s}\frac{p^2}{(1-(1-p)t)(1-\frac{1-p}{t})}$

としてもよい。

■計算例　$X{\sim}Y{\sim}Ge(p)$,　X,Y は独立とすると

・ $$P(k{\leq}X{\leq}2k)=\sum_{l=k}^{2k}P(X=l)$$
$$=\sum_{l=k}^{2k}p(1-p)^l=\frac{p(1-p)^k-p(1-p)^{2k}(1-p)}{1-(1-p)}=(1-p)^k-(1-p)^{2k+1}$$

注意：等比数列の和の公式は、

$$\sum_{\text{初項}}^{\text{末項}}\text{等比数列}=\frac{\text{初項}-\text{末項}\times\text{公比}}{1-\text{公比}}$$ とすると間違いが少ない。

・ $$P(X{\geq}2Y+1)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X{\geq}2k+1)P(Y=k)=\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^{2k+1}p(1-p)^k=\frac{p(1-p)}{1-(1-p)^3}$$

・ $P(\max(X,Y){\leq}k)=P(X{\leq}k)P(Y{\leq}k)=(1-(1-p)^{k+1})^2$

$$\therefore\ E(\max(X,Y))=\sum_{k=0}^{\infty}P(max(X,Y)>k)=\sum_{k=0}^{\infty}(1-(1-(1-p)^{k+1})^2)$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}2(1-p)^{k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^{2k+2}=\frac{2(1-p)}{1-(1-p)}-\frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2}$$

$E(\max(X,Y))=E(X+Y)-E(min(X,Y))$ を用いてもよい。

・ 最尤推定量　$L(p)=p(1-p)^{x_1}\cdots p(1-p)^{x_n}=p^n(1-p)^{\sum x}$

$$0=\frac{\partial\log L(p)}{\partial p}=\frac{n}{p}-\frac{\sum x}{1-p}\qquad\therefore\ \hat{p}=\frac{n}{n+\sum x}=\frac{1}{1+\overline{x}}$$

これは不偏推定量ではなく、不偏推定量は $\tilde{p}=\dfrac{n-1}{n-1+\sum x}$

$\because\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i{\sim}NB(n,p)$ より

$$E(\tilde{p})=E\left(\frac{n-1}{n-1+NB(n,p)}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n-1}{n-1+k}\binom{n+k-1}{k}p^n(1-p)^k$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-2}{k}p^n(1-p)^k=p^n(1-(1-p))^{-(n-1)}=p$$

■シミュレーション

$$[\frac{\log U}{\log(1-p)}] \sim Ge(p)$$

$(\because P([\frac{\log U}{\log(1-p)}] \geqq k) = P(\frac{\log U}{\log(1-p)} \geqq k) = P(\log U \leqq k\log(1-p)) = P(U \leqq (1-p)^k = (1-p)^k)$

■練習問題 6.43　大・小の 2 つのサイコロを同時に投げる試行を何回も繰り返すが 6 の目が出ればそのサイコロは次回投げない。　行われた試行回数を X とするとき、$k \geqq 1$ として、$P(X \leqq k)$, $E(X)$ を求めよ。

■練習問題 6.44　$C_1 \sim\ C_2 \sim Ge(p_1),\ C_3 \sim Ge(p_2)$ で以上は独立とする。このとき、以下を求めよ。
(1) $P(C_1 \geqq k)$ (k は非負整数　(2)$P(C_1 = C_3)$　(3) $E(C_1 + C_3|C_3)$
(4) $E(C_2|C_1 + C_2)$　(5)$V(C_2|C_1 + C_2)$　(6)$E(2^{C_1}|C_1 + C_2)$
(7)$P(C_1 \geqq 2C_3 + 1)$　(8)$P(C_1 \geqq 2C_3 - 1)$　(9) $P(C_1 + C_2 \leqq C_3)$

■練習問題 6.45　$A \sim Ge(1-(1-p)^2), B \sim Be(\frac{1-p}{1+1-p})$ で A, B は独立とする。$C = 2A + B$ の分布を求めよ。

■練習問題 6.46　カードが N 枚あり、それぞれ　1 から N までの番号がひとつずつ書かれている。1 枚カードを選び番号を調べ、もとに戻すという試行を繰り返す。　すべての番号がそろうまでの試行回数を X とするとき、　$E(X)$ を求めよ。

■練習問題 6.47　母集団は　$H_0 : Ge(1/6)$ または $H_1 : Ge(5/6)$ のどちらかであることはわかっている。これから 2 個の標本を取り出し、1 個でも 1 以下なら帰無仮説 H_0 を棄却して対立仮説 H_1 を採択する。第 1 種の誤り α, 第 2 種の誤り β, 検出力 $1-\beta$ をそれぞれ求めよ。

■練習問題 6.48　正しいサイコロを何回も投げるが初めて同じ目が連続して出るまで投げる。投げた回数を T とするとき、$P(T = k)$,　$E(T)$, $V(T)$ を求めよ。

6.7.4　負の２項分布　$NB(\alpha, p)$

■負の２項分布 $NB(\alpha, p)$ の定義　$X \sim NB(\alpha, p)$ つまり、パラメータ $\alpha(>0, \alpha$は必ずしも自然数でなくてもよい$), p(0 < p < 1)$ の負の 2 項分布）であるとは、

$$P(X = k) = \binom{\alpha + k - 1}{k} p^\alpha (1-p)^k = \binom{-\alpha}{k} p^\alpha (-(1-p))^k \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k} p^\alpha (-(1-p))^k = p^\alpha (1-(1-p))^{-\alpha} = 1$ と全確率が 1 であることを示すのに負の 2 項展開を用いるので　負の 2 項分布という。

■負の 2 項分布の意味　：$\alpha = n$ が自然数のときは独立にベルヌーイ試行を何回も行うとき、n 回成功するまでの失敗回数 $= X$ とすると、$X \sim NB(n, p)$
$X_1, X_2, \cdots, X_n \sim Ge(p)$,　　$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とおくと、$X \sim NB(n,p)$ より

$$E(X) = \frac{n(1-p)}{p}, \quad V(X) = n\frac{1-p}{p^2}, \quad E(t^X) = \left(\frac{p}{1-(1-p)t}\right)^n$$

■負の２項分布の性質　• 再生性　$X \sim NB(\alpha,p)$,　$Y \sim NB(\beta,p)$,　X, Y は独立とすると、

$$X + Y \sim NB(\alpha+\beta,p)$$

$(\because E(t^{X+Y}) = E(t^X)E(t^Y) = (\frac{p}{1-(1-p)t})^{\alpha+\beta} = E(t^{NB(\alpha+\beta,p)}))$

- ２項分布との関係

$$P(B(n,p) \geq k) = P(n \text{ 回のうち、少なくとも } k \text{ 回成功})$$
$$= P(k \text{ 回成功するまでに失敗回数が } n-k \text{ 回以下}) = P(NB(k,p) \leq n-k)$$

- N が既知のとき $NB(N,p)$ の p の最尤推定

$$L(p) = \text{定数} \times p^N(1-p)^{x_1} \cdots p^N(1-p)^{x_n}$$
$$\therefore 0 = \frac{\partial \log L(p)}{\partial p} = \frac{Nn}{p} - \frac{\sum x}{1-p} \qquad \therefore p = \frac{Nn}{Nn + \sum x} = \frac{N}{N + \overline{x}}$$

これは不偏推定量ではなくて、不偏推定量 $\tilde{p}$ は

$$\tilde{p} = \frac{Nn-1}{Nn-1+\sum x}$$

$$\because \quad E(\tilde{p}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Nn-1}{Nn-1+k} P(NB(Nn,p) = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Nn-1}{Nn-1+k} \binom{Nn+k-1}{Nn-1} p^{Nn}(1-p)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{Nn+k-2}{Nn-2} p^{nN}(1-p)^k = p^{nN}(1-(1-p))^{-(nN-1)} = p$$

■シミュレーション　幾何分布を作り、それを n 個足せばよい。また、ガンマ分布とポアソン分布からも作ることができる。$G \sim \Gamma(n,1)$ とし、　$G = g$ のもとで　$Y \sim Po(\frac{(1-p)g}{p})$ とすると、$Y \sim NB(n,p)$
$(\therefore P(Y = x) = E(P(Y = x|G)) = \int_0^\infty \frac{(\frac{(1-p)x}{p})^k}{k!} e^{-\frac{(1-p)}{p}x} \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-x} dx = \binom{n+k-1}{k} p^n(1-p)k)$

■練習問題 6.49　原点 $(0,0)$ を出発し、右か上に１づつ確率 $\frac{1}{2}$ で進む。　直線 $x = n+1\,(n \in \mathbb{N})$ に初めて到達したときの y 座標を T としたとき、T の分布、$E(T)$, $V(T)$ を求めよ。さらに　直線 $y = n+1\,(n \in \mathbb{N})$ に初めて到達したときの x 座標を T' とするとき、　$P(\min(T,T') = k)$ を求めよ。

■練習問題 6.50　大・小のサイコロを同時に投げる試行を n 回繰り返す。　X=大のサイコロの 6 の目が 4 回でるまでの回数 Y=X 回までの小のサイコロの目の合計とする。X の分布, $E(X)$.、$V(X)$, $E(Y|X)$, $V(Y|X)$, $E(Y)$, $V(Y)$ を求めよ。

6.7.5　ポアソン分布 $Po(\lambda)$

■ポアソン分布 $P_o(\lambda)$ の定義　$X \sim P_o(\lambda)$　（パラメータ λ のポアソン分布）であるとは、

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$
$$E(X) = \lambda, \quad V(X) = \lambda, \quad E(t^X) = e^{\lambda(t-1)}$$

■ポアソン分布の意味　：次のポアソンの少数の法則

$$\lim_{n\to\infty} P\left(B\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)=k\right) = P(P_o(\lambda)=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$
$$\because\quad E(t^{B(n,\frac{\lambda}{n})}) = \left(1-\frac{\lambda}{n}+\frac{\lambda}{n}t\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{\lambda(t-1)} = E(t^{P_o(\lambda)})$$

つまり、2 項分布において　試行回数が大だが、成功確率が試行回数に反比例するほど小さいとき、ポアソン分布に近くなるということである。

■ポアソン分布の性質　 • 再生性　$X\sim P_o(\lambda_1)$,　$Y\sim P_o(\lambda_2)$,　X,Y は独立とすると、

$X+Y\sim P_o(\lambda_1+\lambda_2)$

- $P(X=k|X+Y=n) = \dfrac{P(P_o(\lambda_1)=k)P(P_o(\lambda_2)=n-k)}{P(P_o(\lambda_1+\lambda_2)=n)} = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$

つまり $X+Y=n$ という条件のもとでは、$X\sim B\left(n,\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$

よって、$E(X|X+Y) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}(X+Y)$,　　$V(X|X+Y) = (X+Y)\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}$

- $X\sim P_o(\lambda)$ で $X=k$ のもとで $Y\sim B(k,p)$ とすると、$Y\sim P_o(p\lambda)$

$$\because\quad E(t^Y) = E(E(t^Y|X)) = E((1-p+pt)^X) = e^{\lambda(1-p+pt-1)} = e^{\lambda p(t-1)} = E(t^{P_o(p\lambda)})$$

■計算例　・ $E(X(X-1)(X-2)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^{l+3}}{l!} = \lambda^3 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^3$

・ $0<\lambda<1$ のとき

$E(X!) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k e^{-\lambda} = \frac{e^{-\lambda}}{1-\lambda}$

・ $X\sim Ge(p)$,　$Y\sim Po(\lambda)$,　X,Y は独立とすると、

$$P(X\geq Y) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X\geq k)P(Y=k) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}$$

・ 最尤推定量　$L(\lambda) = 定数\times\lambda^{x_1}e^{-\lambda}\cdots\lambda^{x_n}e^{-\lambda} = 定数\times\lambda^{\sum x}e^{-n\lambda}$

$$\therefore\quad 0 = \frac{\partial\log L(\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{\sum x}{\lambda} - n,\qquad \therefore\quad \lambda = \frac{\sum x}{n} = \overline{x}$$

これは明らかに不偏推定量でもある。

■シミュレーション

$$N = \max\{n|\sum_{i=1}^{n} -\log U_i < \lambda\} \sim Po(\lambda)$$

$\because -\log U_i \quad \sim Exp(1)$ をパラメータ 1 のポアソン過程の到着時間（イベント間隔) と解釈すれば、N は時刻 λ までのイベント発生回数となるので、$N\sim Po(\lambda)$ である。

■練習問題 6.51　6 の目が出る確率が $\frac{1}{100}$ のインチキなサイコロがある。このサイコロを 70 回投げたとき、ポアソン近似を用いて 6 の目が一回も出ない確率の近似値を求めよ.

■練習問題 6.52　$Po(5)$ のモードを求めよ。

■練習問題 6.53　$X \sim Exp(\lambda_1)$ かつ、　$X = x$ のもとで　$Y \sim Po(x)$ である。　Y　の分布を求めよ。

■練習問題 6.54$^{(**)}$　$X \sim U(0, a)$ かつ、$X = x$ のもとで $Y \sim Po(x)$ である。$P(Y = k)$ を求めよ。$E(Y|X)$, $V(Y|X)$, $E(Y)$, $V(Y)$ を求めよ。

6.7.6　超幾何分布 $HG(N, m, n)$

■超幾何分布 $HG(N, m, n)$ の定義　$X{\sim}HG(N, m, n)$　(パラメータ $(N, m, n$ の超幾何分布)) であるとは、

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} (= \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{m-k}}{\binom{N}{m}} \text{とも書ける。}) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, \min(m, n))$$

■超幾何分布の意味　：赤球 m 個、黒球 $N - m$ 個の袋があり、そこから n 個の球を取り出すとき（非復元抽出で n 回球を取り出すとき）赤球の個数。

$$X_i = \begin{cases} 1 & i \text{ 番目に取り出した球が赤} \\ 0 & i \text{ 番目に取り出した球が黒} \end{cases}$$

とおくと、$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
明らかに $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は同分布で、$X_i{\sim}Be(\frac{m}{N})$　(ただし独立ではない)

$$\therefore\ E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n\frac{m}{N}$$

また、$i{\neq}j$ のとき $E(X_iX_j) = E(X_1X_2) = \dfrac{m}{N}\dfrac{m-1}{N-1}$

$$\therefore\ Cov(X_i, X_j) = \frac{m(m-1)}{N(N-1)} - \left(\frac{m}{N}\right)^2 = \frac{m(m-N)}{N^2(N-1)}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ V(X) &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + n(n-1)Cov(X_i, X_j) \\ &= n\frac{m}{N}\left(1 - \frac{m}{N}\right) + n(n-1)\frac{m(m-N)}{N^2(N-1)} = \frac{N-n}{N-1}{\times}n{\times}\frac{m}{N}\frac{N-m}{N} \end{aligned}$$

注意：復元抽出だと、$X'{\sim}B(n, \frac{m}{N})$ となるが、その分散 $V(X') = n\frac{m}{N}\frac{N-m}{N}$ の $\frac{N-n}{N-1}$ 倍。この $\frac{N-n}{N-1}$ を有限母集団補正という）
赤球に 1〜m の番号を付けたとすると

$$Y_i = \begin{cases} 1 & i \text{ 番目の赤球が選ばれた場合} \\ 0 & i \text{ 番目の赤球が選ばれなかった場合} \end{cases}$$

すると、$P(Y_i = 1) = \dfrac{\binom{1}{1}\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \dfrac{n}{N}$
また、$X = Y_1 + Y_2 = \cdots + Y_n$　$\therefore\ E(X) = m\dfrac{n}{N}$
同様にこれによっても、$V(X)$ が計算できる。

■練習問題 6.55　$HG(20, 8, 5)$ のモードを求めよ。

■**練習問題** 6.56　カードが N 枚あり、それぞれ　1 から N までの番号がひとつずつ書かれている。1 枚カードを選び番号を調べる試行（元に戻さない）を N 回繰り返す。　i 回目の試行で番号 i が出たとし、そのような i の個数を X とするとき、　$E(X)$,$V(X)$ を求めよ。[*17]

6.7.7　その他の離散確率分布

■**対数級数分布**　$P(X=k)=c\frac{q^k}{k}$　$(k=1,2\dots)$ ここで　$c=\frac{1}{-\log(1-q)}$
　$E(X)=\frac{cq}{1-q}$, $V(X)=\frac{cq(1-cq)}{(1-q)^2}$, $E(t^X)=\frac{\log(1-qt)}{\log(1-q)}$

■**切断幾何分布**　$P(X=k)=c(1-p)^k$　$(k=0,1,2\dots N))$
ここで　$c=\frac{p}{1-(1-p)^{N+1}}$
　これは　$Ge(p)\leqq N$ という条件のもとでの $Ge(p)$ の分布である。
　$E(X)=\frac{1-p}{p}-(N+1)\frac{(1-p)^{N+1}}{1-(1-p)^{N+1}}$, $E(t^X)=\frac{p}{1-pt}\frac{1-((1-p)t)^{N+1}}{1-(1-p)^{N+1}}$

■**変形幾何分布**　$P(X=0)=c, P(X=k)=a(1-p)^k\,(k\geqq 1)$ となっているとき変形幾何分布という。ここで　a を c,p で表すと　$a=\frac{p(1-c)}{1-p}$ となる。$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geqq k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-c}{1-p}(1-p)^k=\frac{1-c}{p}$, $\sum_{k=1}^{\infty}kP(X=k)$ を計算してもよい。
$E(\frac{X(X+1)}{2})=\sum_{k=1}^{\infty}kP(X\geqq k)=\sum_{k=1}k\frac{1-c}{1-p}(1-p)^k=\frac{1-c}{p^2}, V(X)=\frac{(1-c)(1-p+c)}{p^2}$, ($c=0,p,1$ の場合を考察しておくとよい。)
$Y\sim Z\sim Ge(p)$ で独立のとき、　$|Y-Z|$ の分布はこの変形幾何分布になり、他にもときどき現れる分布である。

■**ポリヤ・エッゲンベルガー分布、負の超幾何分布 (**)**　以下のポリヤの壺を考える。　壺に b 個の黒い球と　w 個の白い球があり, 1 個取り出し　取り出した球と同じ色の球を a 個付け加えて壺に戻す。　このとき例えば 3 回続けて黒い球が出る確率は　$\frac{b}{b+w}\frac{b+a}{b+w+a}\frac{b+2a}{b+w+2a}$ となる。
n 回の試行のうちで黒い球を取り出す試行回数を X とすると、

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\frac{\Pi_{j=0}^{k-1}(b+ja)\Pi_{j=0}^{n-k-1}(w+ja)}{\Pi_{j=0}^{n-1}(b+w+ja)}\quad(0\leqq k\leqq n)$$

この分布を負の超幾何分布という。[*18]

　とくに、　$a=1$ のとき、　$P(X=k)=\frac{\binom{-b}{k}\binom{-w}{n-k}}{\binom{-(b+w)}{n}}(=\frac{{}_bH_k\,{}_wH_{n-k}}{{}_{b+w}H_n})$ と書けることに注意する。この　X では　$E(X)=n\frac{b}{b+w}$, $V(X)=E(X(X-1))+E(X)-(E(X))^2=n(n-1)\frac{b}{b+w}\frac{b+1}{b+w+1}+n\frac{b}{b+w}-(n\frac{b}{b+w})^2=\frac{nbw}{(b+w)(b+w+1)}(\frac{n}{b+w}+1)$

　また、　一般の場合に戻って、　$p=\frac{b}{b+w}$, $\alpha=\frac{a}{b+w}$ とおき、$np\to\lambda, n\alpha\to\rho\,(n\to\infty)$ とすると

[*17] この問題は超幾何分布の問題ではないが 独立でないベルヌーイ確率変数の和で表すことがポイントなのでここに入れた。
[*18] n 回目の取り出しで黒球を取り出す確率は不思議なことに a によらず、$p_n=\frac{b}{b+w}$ である。　証明は　帰納法を用いて n のときが正しいとして　1 回目が黒球か白球かに分類して　$p_{n+1}=\frac{b}{b+w}\frac{b+a}{b+a+w}+\frac{w}{b+w}\frac{b}{b+w+a}=\frac{b}{b+w}$, また $E(X)=\frac{nb}{b+w}$ である。これも証明は帰納法で　X' を $n+1$ 回の試行での黒球とすると、　$E(X')=\frac{b}{b+w}(1+n\frac{b+a}{b+a+w})+\frac{w}{b+w}n\frac{b}{b+a+w}=(n+1)\frac{b}{b+w}$

$$P(X=k)=\frac{1}{k!}\Pi_{j=0}^{k-1}(\lambda+j\rho)(1+\rho)^{-\frac{\lambda}{\rho}-k} \quad (k=0,1,2\dots)$$

[*19]この分布をポリヤ・エッゲンベルガー分布という。この確率母関数は　$E(t^X)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\Pi_{j=0}^{k-1}(\lambda+j\rho)(1+\rho)^{\frac{-\lambda}{\rho}-k}=(1+\rho)^{\frac{-\lambda}{\rho}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda(\lambda+\rho)\cdots(\lambda+(k-1)\rho)}{k!}(\frac{t}{1+\rho})^k=(1+\rho)^{\frac{-\lambda}{\rho}}(1-\frac{t}{1+\rho})^{-\frac{\lambda}{\rho}}=(1-\rho(t-1))^{-\frac{\lambda}{\rho}}$
これより、　$E(X)=\lambda, V(X)=\lambda(1+\rho)$ となる。
また、　b 個の黒い球と　w 個の白い球がからなる壺から非復元抽出を行うとき、初めて n 個の黒球を取り出すまでに、　X 個の白球を取り出すとすると、　X の分布は、$0\leqq k\leqq w$ として $P(X=k)=\frac{\binom{b}{n-1}\binom{w}{k}}{\binom{b+w}{n+k-1}}\frac{b-(n-1)}{b-(n-1)+w-k}=\frac{\binom{n+k-1}{k}\binom{b+w-n-k}{b-n}}{\binom{b+w}{b}}=\frac{\binom{-n}{k}\binom{-(b-n+1)}{w-k}}{\binom{-(b+1)}{w}}$ となるがこれも　負の超幾何分布となる。

6.8 連続確率分布

6.8.1 一様分布 $U(a,b)$

■一様分布 $U(a,b)$ の定義　$X'\sim U(a,b)$　((a,b) 上の一様分布) であるとは、

$$\text{密度関数}\quad f_{X'}(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\leq x\leq b\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

以下、これを $f_{X'}(x)=\dfrac{1}{b-a}\quad(a\leq x\leq b)$ と書く。

$$E(X')=\frac{a+b}{2},\qquad V(X')=\frac{(b-a)^2}{12},\qquad M_{X'}(t)=\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$$

特に、$a=0, b=1$ の場合が重要で
$X\sim U(0,1)$　とは、

$$f_X(x)=1\quad(0\leq x\leq 1),\qquad E(X)=\frac{1}{2},\qquad V(X)=\frac{1}{12},\qquad M_X(t)=\frac{e^t-1}{t}$$

また、$X'=a+(b-a)X,\qquad X=\dfrac{X'-a}{b-a}$ の関係がある。
$Y=X_1+X_2,\quad X_i\sim U(0,1),\quad X_1,X_2$ は独立とした時、その分布を**三角分布**といい

$$f_Y(x)=\begin{cases}x & 0\leq x\leq 1\\ 2-x & 1\leq x\leq 2\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

また、$M_Y(t)=\left(\dfrac{e^t-1}{t}\right)^2$ である。

■一様分布の性質　• 一般に Z を連続分布とし、その分布関数を $F(x)$ とすると

$$F(Z)\sim U(0,1)$$

となる。　$(\because\ P(F(Z)\leq x)=P(Z\leq F^{-1}(x))=F(F^{-1}(x))=x)$
また、$F^{-1}(U(0,1))$ となり、これはシミュレーションの逆関数法の基本である。

[*19] 注意として, $k=0$ のときは　積の部分はないと考える。また、負の超幾何分布からの極限を考えるが　$\Pi_{j=0}^{n-k-1}$ の部分については log をとってリーマン積分の区分求積法を用いるとその部分の極限は $-\lambda\int_0^1\frac{1}{1+\rho x}dx=\frac{-\lambda}{\rho}\log(1+\rho)$ となる。

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は $U(0,1)$　$i.i.d$ (つまり、$X_1, X_2, \cdots, X_n$は独立で同分布　$X_i \sim U(0,1)$)
としたとき、並べ替えて　$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots X_{(n)}$ とする。
この $X_{(i)}$ を**第 i 位順序統計量**($X_1, X_2, \cdots, X_n$ の中で i 番目に小さいもの) と呼ぶ。
特に、$X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$,　$X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ である。
すると、

$$X_{(i)} \sim \beta(i,\, n-i+1) \quad \text{(ベータ分布は後述)}$$

- $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ は $i.i.d$ で Y_i は分布関数 $F(x)$ を持つとする。
すると

$$\begin{aligned} Y_{(i)} &= (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n \text{の中で } i \text{ 番目に小さいもの}) \\ &= F^{-1}(F(Y_{(i)})) \\ &= F^{-1}(F(Y_i) \text{ の第 } i \text{ 位順序統計量}) \sim F^{-1}(\beta(i,\, n-i+1)) \end{aligned}$$

■シミュレーション

$$(b-a)U + a \sim U(a,b)$$

■練習問題 6.57　U_1, U_2は独立で $U_i \sim U(0,1)$ とする。以下を求めよ。
(Hint　(U_1, U_2)　の同時分布は正方形内の一様分布)
(1) $P(U_1 < 3/4 \cup U_2 < 1/2)$　(2)$P(3/4U_1 < 1/2U_1 + U_2 < 1)$
(3) $E(U_1 e^{U_1 U_2} | U_1)$　(4) $E(U_1 e^{U_1 U_2})$
(5) $E(|U_1 - U_2^2|)$　(6)$V(|U_1 - U_2^2|)$

■ 練習問題 6.58　$X \sim U(0,1)$ かつ $X = x$ のもとで $Y \sim Ge(x)$ である。　Y の分布つまり、$P(Y = k)$ $(k \geqq 0)$ を求めよ。

■ 練習問題 6.59　$X \sim U(0,1)$ かつ $X = x$ のもとで $Y \sim NB(3,x)$ である。　Y の分布つまり、$P(Y = k)$ $(k \geqq 0)$ を求めよ。

6.8.2　指数分布 $Exp(\lambda)$

■指数分布 $Exp(\lambda)$ の定義　　($\mathcal{E}(\lambda)$, $e^{(\lambda)}$ などとも書く)
$X \sim Exp(\lambda)$　(パラメータ $(\lambda > 0)$ の指数分布) であるとは、

$$\text{密度関数} \quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0)$$

[20]

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad E(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}, \quad M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \;\; (t < \lambda)$$

[20] $X \sim Exp(\lambda)$ で　$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{\frac{-x}{\lambda}}$ $(x > 0)$ と定義している文献もあるので注意しておくこと

■指数分布の意味　：$P(X_n=k\frac{1}{n})=\frac{\lambda}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{k-1}$ 　$(k=1,2,\cdots)$ となる F_s 分布 (つまり $nX_n{\sim}F_s(\frac{\lambda}{n})$) となる X_n を考えると、

$$F_{X_n}(t)=\sum_{k=1}^{nt}\frac{\lambda}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{k-1}=1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{nt}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}F_{X_n}(t)=1-e^{-\lambda t}=F_X(t)$$

となる。指数分布は　幾何分布や Fs 分布の極限（幾何分布の連続版）である。

■指数分布の性質　 • 無記憶性　　$t>0,\ s>0$ として

$$P(X>t+s|X>s)=P(X>t)\quad(=e^{-\lambda t}\ \ \textbf{この結果は重要})$$

- $X_1,X_2,\cdots,X_n$　$(Exp(\lambda)\,i.i.d)$ とすると
  $\min(X_1,X_2,\cdots,X_n){\sim}Exp(n\lambda)$
  $(\because\ \ P(\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)>t)=(e^{-\lambda t})^n=e^{-n\lambda t})$
  $\max(X_1,X_2,\cdots,X_n){\sim}X_1+\frac{1}{2}X_2+\cdots+\frac{1}{n}X_n$
  $(\because\ \ E(e^{t(X_1+\frac{1}{2}X_2+\cdots+\frac{1}{n}X_n)})=\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda}{\lambda-\frac{t}{k}}=\frac{n!\lambda^n}{\prod_{k=1}^n(\lambda k-t)})$
  また、$P(\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leq x)=(1-e^{-\lambda x})^n$ より、$f_{\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)}(x)=n\lambda(1-e^{-\lambda x})^{n-1}e^{-\lambda x}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \ E(e^{t\,\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)})&=\int_0^\infty e^{tx}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}n\lambda e^{-\lambda x}\,dx\quad(\text{置換：}1-e^{-\lambda x}=u)\\&=\int_0^1(1-u)^{-\frac{t}{\lambda}}nu^{n-1}\,du=n\,B(1-\frac{t}{\lambda},n)\\&=n\frac{\Gamma(n)\Gamma(1-\frac{t}{\lambda})}{\Gamma(n+1-\frac{t}{\lambda})}=\frac{n!\lambda^n}{\prod_{k=1}^n(\lambda k-t)}\end{aligned}$$

- $X{\sim}Exp(\lambda)$ なら、

$$aX{\sim}Exp(\frac{\lambda}{a})\ \text{とくに}\ X\sim\frac{Exp(1)}{\lambda},\quad X{\sim}\Gamma(1,\lambda),\quad 1-e^{-\lambda X}{\sim}e^{-\lambda X}{\sim}U(0,1)$$

- $X_1,X_2,\cdots,X_n$　$(Exp(\lambda)\,i.i.d)$ なら、

$$X_1+X_2+\cdots+X_n{\sim}\Gamma(n,\lambda)$$

- $X,Y\sim Exp(\lambda)$ で独立なら　$X-Y$ と $\min(X,Y)$ は独立

同次モーメント母関数で証明する。$\because$ $E(e^{\alpha(X-Y)}e^{\beta\min(X,Y)})=E(e^{\alpha(X-Y)}e^{\beta Y},X>Y)+E(e^{\alpha(X-Y)}e^{\beta X},Y>X)=E(E(e^{\alpha(X-Y)}e^{\beta Y},X>Y|Y))+E(E(e^{\alpha(X-Y)}e^{\beta X},Y>X|X))=\frac{\lambda}{\lambda-\alpha}E(e^{(\beta-\lambda)Y})+\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}E(e^{(\beta-\lambda)X})=\frac{2\lambda}{2\lambda-\beta}\frac{\lambda^2}{(\lambda-\alpha)(\lambda+\alpha)}=E(e^{\beta Exp(2\lambda)})E(e^{\alpha(Exp(\lambda)-Exp(\lambda))})$

■計算例　・ $X{\sim}Exp(\lambda_1)$,　$Y{\sim}Exp(\lambda_2)$,　X,Y は独立なら

$$P(X>Y)=\int_0^\infty\lambda_2e^{-\lambda_2y}\,dy\int_y^\infty\lambda_1e^{-\lambda_1x}\,dx=\lambda_2\int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y}\,dy=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$P(X>Y)=\int_0^{+\infty}P(X>Y|Y=u)f_Y(u)\,du=\int_0^\infty P(X>u)f_Y(u)du$ で計算しても良い。

・ $\frac{Y}{X}$ の分布関数は、 $x > 0$ として

$$F_{\frac{Y}{X}}(x) = P\left(\frac{Y}{X} \leq x\right) = P(Y \leq xX)$$
$$= 1 - P(Y > xX) = 1 - \int_0^\infty P(Y > xu) f_X(u)\, du = 1 - \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_2 xu} e^{-\lambda_1 u}\, du$$
$$= 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 x + \lambda_1} = \frac{\lambda_2 x}{\lambda_2 x + \lambda_1}$$

$$\therefore\ f_{\frac{Y}{X}}(x) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 x + \lambda_2)^2} \quad \text{(パレート分布)}$$

・ また、$\frac{X}{X+Y}$ の分布関数は、 $0 \leq x \leq 1$ として

$$F_{\frac{X}{X+Y}}(x) = P\left(\frac{X}{X+Y} \leq x\right) = P\left(\frac{Y}{X} \geq \frac{1-x}{x}\right) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 \frac{1-x}{x} + \lambda_2} = \frac{\lambda_2 x}{\lambda_1(1-x) + \lambda_2 x}$$

$$\therefore\ f_{\frac{X}{X+Y}}(x) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1(1-x) + \lambda_2 x)^2}$$

$(X, \frac{X}{X+Y})$ の同時分布を求め、それを積分して周辺分布を求めてもよい。

・ 最尤推定量

$$L(\lambda) = \lambda^n e^{-\lambda(x_1 + \cdots + x_n)} \qquad \therefore\ 0 = \frac{\partial \log L(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - (x_1 + \cdots + x_n)$$

$\therefore\ \hat{\lambda} = \dfrac{n}{x_1 + \cdots + x_n} = \dfrac{1}{\bar{x}}$　　これは不偏推定量ではないが、$n \geq 2$ で $\dfrac{n-1}{n}\hat{\lambda}$ は λ の不偏推定量。

また、もちろん $\bar{x}$ は $\dfrac{1}{\lambda}$ の不偏推定量である。

・ $X - Y$ の分布はラプラス分布（両側指数分布）で、 $f_{X-Y}(x) = \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$　$(-\infty < x < \infty)$

■指数母集団の統計　$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim Exp(\lambda)$ は独立とする。　つまり、 $Exp(\lambda)$ からの n 個の標本とする。このとき、

$$2n\lambda\bar{X} \sim \chi^2_{2n}$$

$\because X_i \sim Exp(\lambda)$ より、　$\lambda X_i \sim Exp(1)$,　$2\lambda X_i \sim Exp(1/2) = \Gamma(1, 1/2)$ つまり、ガンマ分布の再生性より、　$2\lambda(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \sim \Gamma(n, 1/2) = \Gamma(\frac{2n}{2}, 1/2) = \chi^2_{2n}$

■シミュレーション

$$-\frac{\log U}{\lambda} \sim Exp(\lambda)$$

■練習問題 6.60　$M_1 \sim M_2 \sim Exp(\lambda)$ で独立とするとき、次を求めよ。

(1)$P(M_1 > t)$　(2)$P(2M_2 < M_1 < 5M_2)$　(3)$E(2M_1 + M_2|M_1)$

(4) $V(2M_1 + M_2|M_2)$　(5) $P(M_1 > 2M_2 + 1)$　(6) $P(M_1 > 2M_2 - 1)$

■練習問題 6.61　$X_1, X_2 \sim Exp(\lambda_1), X_3 \sim Exp(\lambda_2)$ は独立とする。以下を求めよ。

(1) $E(X^4)$　(2) $P(X_3 \geqq 2X_1 + 1)$　(3) $P(X_3 \geqq 2X_1 - 1)$

(4) $P(X_3 \geqq 2X_1 + X_2)$　(5)$P([X_1] = k)$

(6)$f_{\{X_1\}}(x)$　($\{x\}$ は　$\{x\}$ の小数部分 (7)$E(X_1|X_1 + X_2)$　(8) $V(X_1|X_1 + X_2)$

■練習問題 6.62　$X \sim Exp(\lambda)$ かつ $X=x$ のもとで　$Y \sim Exp(x)$ である。　$f_Y(y)$　を求めよ。

■練習問題 $^{(*)}$6.63　$X \sim U(0,a)$ かつ $X=x$ のもとで　$Y \sim Exp(x)$ である。　$f_Y(y)$　を求めよ。

■練習問題 6.64　$X \sim Exp(1)$ である。　このとき　確率変数 Y を次のように定める。

$$Y=\begin{cases}\frac{1}{X} & (X>1\text{ のとき})\\ X & (0<X<1\text{ のとき})\end{cases}$$ Y の密度関数 $f_Y(x)$ を求めよ。

■練習問題 6.65　平均 μ の指数母集団から n 個の標本をとり、標本平均を　$\bar{X}$ とする。$a_n(\bar{X})^2,\ b_n(\bar{X})^3$ がそれぞれ　μ^2,μ^3 の不偏推定量となるように a_n, b_n をそれぞれ求めよ。また、$\bar{X}$ は　母平均 μ の有効推定量であることを示せ。

6.8.3　ガンマ分布　$\Gamma(p,a)$

■ガンマ分布　$\Gamma(p,a)$ **の定義**　$X{\sim}\Gamma(p,a)$　（パラメータ p,a $(p>0,\ a>0)$ のガンマ分布）であるとは、

密度関数　$f_X(x)=\dfrac{a^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-ax}\quad(x>0)$

$$E(X)=\frac{p}{a},\qquad V(X)=\frac{p}{a^2},\quad M_X(t)=\left(\frac{a}{a-t}\right)^p$$

■ガンマ分布の性質　• $\Gamma(1,a){\sim}Exp(a),\ \Gamma(p,a)\sim\frac{\Gamma(p,1)}{a}$

- $\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\sim N(0,1)^2\sim\chi_1^2$　（自由度1のカイ2乗（じじょう）分布）

  つまり、$f_{\chi_1^2}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}}\quad(x>0)$

- 再生性　$X{\sim}\Gamma(p_1,a),\quad Y{\sim}\Gamma(p_2,a),\quad X,Y$ は独立とする

  $$X+Y{\sim}\Gamma(p_1+p_2,\ a)\qquad\left(\because\ M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)=\left(\frac{a}{a-t}\right)^{p_1+p_2}\right)$$

- ベータ分布との関係　$\dfrac{X}{X+Y}{\sim}\beta(p_1,p_2)$

  ($\because$ 同時分布 $\left(X+Y,\ \frac{X}{X+Y}\right)$ を計算してみると $\left(X+Y,\ \frac{X}{X+Y}\right){\sim}(\Gamma(p_1+p_2,a),\beta(p_1,p_2))$ が分かる)

- $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$　（$N(0,1)^2$ $i.i.d$）とし、　$Z=Z_1+Z_2+\cdots+Z_n$ とおくと、

  Z は自由度 n のカイ 2 乗分布と呼ばれる。　すると、ガンマ分布の再生性より、$Z{\sim}\Gamma\left(\dfrac{n}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

  つまり、　$f_Z(x)=\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\quad(x>0)$

- p が既知の最尤推定量

  尤度関数 $L(a)=$ 定数$\times a^{pn}\times e^{-a(x_1+x_2+\cdots+x_n)}$,　　$0=\dfrac{\partial\log L(a)}{\partial a}$ として、

  $\hat{a}=\dfrac{p}{\overline{x}}$．　これは不偏推定量ではないが、$n>\dfrac{1}{p}$ のとき $\dfrac{np-1}{np}\hat{a}$ は a の不偏推定量である。

  また、$\dfrac{\overline{x}}{p}$ は $\dfrac{1}{a}$ の不偏推定量である。

■シミュレーション　p が自然数のときは　p 個の指数分布の和。あとは、棄却法 (第 4 章に具体例あり) など。

■練習問題 6.66　$X_i \sim \Gamma(p_i, a)$ で独立とする．以下を求めよ。
(1)$E(X_1)$　(2)$E(\frac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3})$　(3)$X_1+X_2+X_3$　の分布
(4)$f_{X_1|X_1+X_2}(y|x)$　(5)$E(X_1|X_1+X_2)$　(6)$V(X_1|X_1+X_2)$

6.8.4　標準正規分布 $N(0,1)$, 正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$

■正規分布　$N(\mu,\sigma^2)$ の定義　まず、標準正規分布 ($N(0,1)$) の場合
$X{\sim}N(0,1)$　であるとは、

$$\text{密度関数}\quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$E(X)=0, \qquad V(X)=1, \qquad M_X(t)=e^{\frac{t^2}{2}}$$

また、$Y=\mu+\sigma X$ とすると、$E(Y)=\mu,\quad V(Y)=\sigma^2\ (\sigma>0)$ となるので、

この密度関数は　$f_Y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$　で、　$Y{\sim}N(\mu,\sigma^2)$ と定義する。

また　Y の標準化 $= \dfrac{Y-E(Y)}{\sigma(Y)} = \dfrac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ となる。また、$M_Y(\alpha)=E(e^{\alpha(\mu+\sigma X)}) = e^{\mu\alpha+\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2}$

■正規分布の再生性　モーメント母関数より、$X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ で独立のとき、$X_1+X_2 \sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$ となる。
再生性より、例えば、$X,Y \sim N(0,1)$,　X,Y は独立のとき
$X{\pm}Y \sim N(0,2)$

■標準正規分布の意味，中心極限定理　：　$X_1,X_2,\cdots,X_n\ \ (i.i.d),\quad E(X_i)=\mu,\quad V(X_i)=\sigma^2$

$$X_n' = X_1+X_2+\cdots+X_n\text{の標準化} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} N(0,1) \quad (\text{分布収束})$$

$$\because\ M_{X_n'}(t) = \left(M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1+\frac{t^2}{2n}+\cdots\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{\frac{t^2}{2}} = M_{N(0,1)}(t)$$

この中心極限定理を用いて例えば 2 項分布の正規近似が得られる。

$$\begin{aligned}
P(a \leqq B(n,p) \leqq b) = P(a-1 < B(n,p) < b+1) &\fallingdotseq P(a-\frac{1}{2} < B(n,p) < b+\frac{1}{2}) \\
&\fallingdotseq P(\frac{a-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}} < N(0,1) < \frac{b+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}) \\
&= \Phi(\frac{b+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}) - \Phi(\frac{a-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}})
\end{aligned}$$

上では　半整数補正を用いた近似を述べた。

■正規分布からの派生分布 • $\chi_n^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2 \quad (Z_1^2, Z_2^2, \cdots, Z_n^2 : N(0,1)^2 \ i.i.d)$

は自由度 n のカイ 2 乗分布

• $t_n = \dfrac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}$ ここで、$(Z \sim N(0,1)$ で χ_n^2 と独立)

は自由度 n の t 分布

• $F_{m,n} = \dfrac{\frac{\chi_m^2}{m}}{\frac{\chi_n^2}{n}}$ (ここで χ_m^2 と χ_n^2 は独立) は、パラメータ (m,n) の F 分布.

すると、$\frac{1}{F_{m,n}} = F_{n,m}$ である

• $\dfrac{\Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2}) + \Gamma(\frac{m}{2},\frac{1}{2})} = \dfrac{\chi_n^2}{\chi_n^2 + \chi_m^2} = \dfrac{1}{1 + \frac{m}{n}F_{m,n}} = \dfrac{n}{n + mF_{m,n}} = \dfrac{nF_{n,m}}{nF_{n,m} + m} \sim \beta(\dfrac{n}{2}, \dfrac{m}{2})$

(ここでは　ガンマ分布とベータ分布の関係を用いた。)

つまり、$F_{m,n} \sim \dfrac{n(1 - \beta(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}))}{m\beta(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})}$

また、 $X, Y \sim N(0,1)$ で独立のとき、 $\dfrac{Y}{X}$はコーシー分布 $f_{\frac{Y}{X}}(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < \infty)$

■統計との関連 $N(\mu, \sigma^2)$ 母集団からの標本を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とすると、

• $\dfrac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ • $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ • $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$

• $\dfrac{\hat{S^2}}{\sigma^2} = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \dfrac{\chi_{n-1}^2}{n-1}$ • $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\hat{S^2}}{n}}} \sim t_{n-1}$

• もう 1 つ別の $N(\mu', {\sigma'}^2)$ 母集団からの標本を $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ とすると、

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu - \mu', \frac{\sigma^2}{n} + \frac{{\sigma'}^2}{m}\right)$$

• $\dfrac{\hat{S_Y^2}}{\hat{S_X^2}} = \dfrac{\sigma^2 \frac{\chi_{m-1}^2}{m-1}}{{\sigma'}^2 \frac{\chi_{n-1}^2}{n-1}} = \dfrac{\sigma^2}{{\sigma'}^2} \times F_{m-1,n-1}$

ここで、$\hat{S_Y^2} = \dfrac{1}{m-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2, \qquad \hat{S_X^2} = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

$(n-1)\dfrac{\hat{S_X^2}}{\sigma^2} + (m-1)\dfrac{\hat{S_Y^2}}{{\sigma'}^2} \sim \chi_{m+n-1}^2$

とくに、$\sigma = \sigma'$ のとき、$\dfrac{\hat{S_Y^2}}{\hat{S_X^2}} \sim F_{m-1,n-1}$

■正規母集団の統計 (a) 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ で母分散 σ^2 が既知の場合標本を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ と n 個とり、 標本平均$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ を作る。統計量 (標本平均の標準化)$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$ (正規分布の再生性, 正規母集団でないが標本数大の場合は中心極限定理より標準正規分布で近似できる)

よって標準正規分布の上側 $\frac{\epsilon}{2}$ 点を $u(\frac{\epsilon}{2})$ (つまり $P(N(0,1) > u(\epsilon)) = \epsilon$[*21]とすると $P(|\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}| < u(\frac{\epsilon}{2})) = 1 - \epsilon$

信頼度 $1 - \epsilon$ の母平均 μ の信頼区間は

$$\bar{x} - u(\frac{\epsilon}{2})\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} < \mu < \bar{x} + u(\frac{\epsilon}{2})\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

---

*21 $u(0.005) \fallingdotseq 2.58$, $u(0.01) \fallingdotseq 2.34$, $u(0.025) \fallingdotseq 1.96$, $u(0.05) \fallingdotseq 1.645$ を暗記しておくとよい。

ここで $\bar{x}$ は標本平均 $\bar{X}$ の実現値

(b) 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ で母分散 σ^2 が未知の場合
$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$ は未知の母分散 σ^2 がはいっているのでそれをデータからわかる 不偏標本分散$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ に置き換え $\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\hat{S^2}}{n}}} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}}{\sqrt{\hat{S^2}/\sigma^2}} = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}}} = t_{n-1}$(自由度 $n-1$ の t 分布) （分母と分子で未知母数 σ^2 を消すというスチューデント (本名ゴセット) のトリックに注意する)

よって自由度 $n-1$ の t 分布の上側 $\frac{\epsilon}{2}$ 点を $t_{n-1}(\frac{\epsilon}{2})$ とすると $P(|\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}| < t_{n-1}(\frac{\epsilon}{2})) = 1-\epsilon$
信頼度 $1-\epsilon$ の母平均 μ の信頼区間は

$$\bar{x} - t_{n-1}(\frac{\epsilon}{2})\sqrt{\frac{\hat{S}^2}{n}} < \mu < \bar{x} + t_{n-1}(\frac{\epsilon}{2})\sqrt{\frac{\hat{S}^2}{n}}$$

■シミュレーション

$$U_1 + \cdots + U_{12} - 6 \fallingdotseq N(0,1) \quad (\because \text{中心極限定理})$$

また、指数分布から棄却法で作る。(練習問題 4.3 参照)

次の　ボックス・マーラー (ミューラー) 法でもよい。

$$(X = (-2\log U_1)^{1/2}\cos(2\pi U_2), Y = (-2\log U_1)^{1/2}\sin(2\pi U_2)) \sim N(\vec{0}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

三角関数の計算を回避するためにさらに正方形とそれに内接する円との間で棄却法を採用してもよい。(元のテキスト参照)

■練習問題 6.67　$X \sim Y \sim N(0,1)$ で独立とするとき、以下を求めよ。
(1)$E(X^2Y^2)$　(2) $E(e^{3X})$　(3) $E(e^{-2X^2})$
(4) $E(|X|e^{-X^2})$　(5)$E(X^2e^{-3X^2})$　(6) $E(e^{-X^2-Y^2})$
(7)$E(e^{-\frac{1}{2}X^2+XY})$　(8) $E(\frac{X^2}{X^2+Y^2}e^{-X^2-Y^2})$
(9) $E(|X-Y|^n)$　(10) $E(|X+2Y|^n)$
(11) $E(\int_0^{1/3} e^{tX^2}dt)$　(12) $E(\int_0^1 e^{X\sqrt{x}}dx)$
(13)$^{(*)}$ $P(\max(X^2+X_1^2, Y^2+Y_1^2) < 2\min(X^2+X_1^2, Y^2+Y_1^2))$ ここで $(X_1 \sim Y_1 \sim N(0,1)$ で　X, Y とも独立
(14)$^{(*)}$ $P(Ge(p) > X^2+Y^2)$

■練習問題 6.68　$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ で独立とするとき、 以下を求めよ.
(1)X_1の標準化　(2)$P(X_1 \leqq x) = P(X_2 \geqq x)$ となる x　(3)$X_1 - X_2 + 3X_3$ の分布　(4)$\mathrm{Cov}(X_1 - X_2 + X_3, X_1 + X_2 + 2X_3)$　(5)$\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu_i}{\sigma_i})^2$ の分布

■練習問題 6.69　$N(\mu, \sigma^2)$ 母集団から　n 個の標本を取り出した。　以下を求めよ。($\Phi(x) = P(N(0,1) \leqq x)$ を答えに用いてよい。

$(1)E(\bar{X})$　$(2)V(\bar{X})$　$(3)E((\bar{X})^2)$
$(4)\sigma^2=3$ とする。対立仮説 $H_1:\mu=5,$ 帰無仮説 $H_0:\mu=0$ を検定する。棄却域　$C:X_1+X_2+X_3>10$ を設定する。第 1 種の誤り $\alpha=P(C|H_0),$ 第 2 種の誤り $\beta=P(C^c|H_1)$ をそれぞれ求めよ。

■練習問題 6.70　$N(\mu,\sigma^2)$ 母集団から　n 個の標本を取り出した。ただし母平均 μ は既知とする。$a_n|(X_1-\mu)+(X_2-\mu)+\cdots+(X_n-\mu)|$ が母標準偏差 σ の不偏推定量となるよう a_n を求めよ。　また、$b_n((X_1-\mu)^2+(X_2-\mu)^2+\cdots+(X_n-\mu)^2)$ が母分散 σ^2 の不偏推定量となるよう b_n を求めよ。

6.8.5　ベータ分布　$\beta(a,b)$

■ベータ分布　$\beta(a,b)$　$(a>0,\ b>0)$ **の定義**　$X\sim\beta(a,b)$　(パラメータ a,b のベータ分布) であるとは、

$$X \text{ の密度関数}\quad f_X(x)=\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\quad(0<x<1)$$

$$\text{ここで、}B(a,b)\text{ はベータ関数}\quad B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

$$E(X)=\frac{B(a+1,b)}{B(a,b)}=\frac{\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)}}{\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}}=\frac{a}{a+b},\quad E(X^2)=\frac{B(a+2,b)}{B(a,b)}=\frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)},$$

$$V(X)=\frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}-\left(\frac{a}{a+b}\right)^2=\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

■ベータ分布の基本的性質　• $\beta(a,b)\sim\frac{\Gamma(a,\lambda)}{\Gamma(a,\lambda)+\Gamma(b,\lambda)}$

- $X\sim\beta(a,b)\Longrightarrow 1-X\sim\beta(b,a)$
- ガンマ分布との関係はもうすでに述べた。

【例】$X_i,Y_i\sim N(0,1)$ $i.i.d$ とすると

$$\begin{aligned}V\left(\frac{X_1^2+\cdots+X_n^2}{X_1^2+\cdots+X_n^2+Y_1^2+\cdots+Y_m^2}\right)&=V\left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})+\Gamma(\frac{m}{2},\frac{1}{2})}\right)\\&=V\left(\beta\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)\right)\\&=\frac{\frac{n}{2}\frac{m}{2}}{(\frac{n}{2}+\frac{m}{2})^2(\frac{n}{2}+\frac{m}{2}+1)}\end{aligned}$$

- 一様分布の順序統計量，二項分布，負の二項分布との関連[*22]

$$
\begin{aligned}
P(B(n,p)\geq k) &= P(n\text{ 回のベルヌーイ試行のうち成功が }k\text{ 回以上}) \\
&= P(\text{初めて }k\text{ 回成功するまでに失敗が }n-k\text{ 回以下}) \\
&= P(NB(k,p)\leq n-k) \\
&= P(U_1,\cdots,U_n\text{のうち少なくとも }k\text{ 個が }p\text{ 以下})\ (\because\ U_i\text{の実現値が }p\text{ 以下なら成功}) \\
&= P(U_{(k)}\leq p) = P(\beta(k,n-k+1)\leq p) \\
&= \int_0^p \frac{x^{k-1}(1-x)^{n-k}}{B(k,n-k+1)}\,dx\ \ (\text{ここで }U_i\text{は }U(0,1)\ i.i.d\quad\text{並べ替えて }U_{(1)}\leq U_{(2)}\leq\cdots\leq U_{(n)}) \\
&= P\left(\frac{1}{1+\frac{n-k+1}{k}F_{2(n-k+1),2k}}\leq p\right)
\end{aligned}
$$

[*23]

■シミュレーション n,m が自然数のときは、

$$\beta(n,m)=\frac{\Gamma(n,1)}{\Gamma(n,1)+\Gamma(m,1)}$$

を利用し、指数分布からガンマ分布を作り、さらにそれからベータ分布を作る。

■練習問題 6.71 $a>1,b>1$ のとき $\beta(a,b)$ のモードを求めよ。

■練習問題 6.72 $X\sim\beta(a,b)$ のとき、 $Y=\frac{X}{1-X}, Z=(c-d)X+d\quad(c>d)$ の確率密度関数をそれぞれ求めよ。

■練習問題 6.73 $p\sim\beta(a,b)$ のもとで $X\sim Ge(p)$ である。 $P(X=k)\quad(k\geqq 0)$ を求めよ。また、$a>1$ のとき $E(X)$ も求めよ。$a>2$ のとき $V(X)^{(*)}$ も求めよ。

■練習問題 6.74 $F_{m,n}=\frac{\frac{\chi^2_m}{m}}{\frac{\chi^2_n}{n}}$ の関係を用いて、$F_{m,n}$ の密度関数を求めよ。$t_n^2=F_{1,n}$ を用いて t_n の密度関数を求めよ。また、$E(F_{m,n})$, $V(F_{m,n})$, $E(t_n)$, $V(t_n)$ を求めよ。

6.8.6 その他の連続確率分布

■三角分布 $X\sim Y\sim U(0,1)$ で独立のとき $Z=X+Y$ の分布を三角分布 $f_Z(x)=\begin{cases} x & (0<x<1) \\ 2-x & (1<x<2)\end{cases}$

$E(Z)=1, V(Z)=2V(X)=\frac{1}{6}, M_Z(t)=(\frac{e^t-1}{t})^2$

$X'\sim Y'\sim U(-1,1)$ で独立のとき、$Z'=X'+Y'$ も三角分布という。$f_{Z'}(x)=\begin{cases}\frac{x+2}{4} & (-2<x<0) \\ \frac{2-x}{4} & (0<x<2)\end{cases}$

$Z'=2Z-2,\ E(Z')=0, V(Z')=\frac{2}{3}, M_{Z'}(t)=(\frac{e^t-e^{-t}}{2t})^2$

[*22] ここの議論からも順序統計量の分布が導ける。 $f_{U_{(k)}}(p)=\frac{d}{dp}P(U_{(k)}\leq p)=\frac{d}{dp}P(B(n,p)\geq k)=\frac{d}{dp}\sum_{l=k}^n\binom{n}{l}p^l(1-p)^{n-l}=\sum_{l=k}^n\binom{n}{l}(lp^{l-1}(1-p)^{n-l}-(n-l)p^l(1-p)^{n-l-1})=np(1-p)^n+n\sum_{l=k}^{n-1}(\binom{n-1}{l-1}p^{l-1}(1-p)^{n-1-(l-1)}-p^l(1-p)^{n-1-l})=n\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=f_{\beta(k,n-k+1)}(p)$

[*23] この 2 項分布と ベータ分布、F 分布の関係は (中心極限近似を使わずに 2 項母集団の母平均を推定する精密法による区間推定（確率統計演習２ 統計 国沢清典編 ８７ｐ）の根拠となるものである。

■ラプラス分布 $X \sim Y \sim Exp(\lambda)$ で独立のとき、$Z = X - Y$ の分布をラプラス分布という。
$f_Z(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$ $(-\infty < x < \infty)$ $E(Z) = 0, V(Z) = 2V(X) = \frac{2}{\lambda^2}, M_Z(\alpha) = M_X(\alpha)M_Y(-\alpha) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2-\alpha^2}$, $|X - Y| \sim Exp(\lambda)$

■ワイブル分布 $X \sim Exp(1)$ で $a, \gamma > 0$ に対して $Y = \frac{X^{\frac{1}{\gamma}}}{a}$ の分布をワイブル分布という。
$f_Y(x) = a\gamma(ax)^{\gamma-1}e^{-(ax)^\gamma}$

$E(Y) = \frac{1}{a}\Gamma(\frac{\gamma+1}{\gamma})$, $V(Y) = \frac{1}{a^2}(\Gamma(\frac{\gamma+2}{\gamma}) - (\Gamma(\frac{\gamma+1}{\gamma}))^2)$

とくに $\gamma = 2, a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときのワイブル分布を Z とすると Z の分布をレイリー分布という。 $x > 0$ として、$f_Z(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $F_Z(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$ $E(Z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, V(Z) = 2 - \frac{\pi}{2}$ 死力$\lambda_Z(t) = t$
$Z^2 \sim Exp(1/2), N_1, N_2$ を独立な標準正規分布とすると、$\sqrt{N_1^2 + N_2^2} \sim Z$

■コーシー分布 X がコーシー分布 であるとは $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ $(-\infty < x < \infty)$
期待値、分散、n 次モーメント $E(X^n)$, モーメント母関数は 存在しない。
$F_X(x) = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(x))$
特性関数 $E(e^{\sqrt{-1}tX}) = e^{-|t|}$
N_1, N_2を 2 つの独立な標準正規分布とするとき、 $X \sim \frac{N_1}{N_2}$, したがって $\frac{1}{X} \sim X$
さらに 自由度 1 の t 分布 $t_1 \sim X$ である。また、 $a > 0, b \in \mathbb{R}$ として $Y = aX + b$ の分布もコーシー分布 (このときは X は標準コーシー分布といわれる。) という。$f_Y(x) = \frac{1}{a\pi}\frac{1}{1+(\frac{x-b}{a})^2}$

■パレート分布 $a > 0, b > 0$ として, $f_X(x) = \frac{ba^b}{x^{b+1}}$ $(x \geqq a)$ を確率密度関数に持つ確率変数 X の確率分布をパレート分布という。$b > 1$ のとき $E(X) = \frac{ba}{b-1}, b > 2$ のとき $V(X) = \frac{ba^2}{(b-1)^2(b-2)}$
分布関数 $F_X(x) = 1 - (\frac{a}{x})^b$, 死力$\lambda_X(x) = \frac{b}{x}$ $f_{\frac{1}{X}}(x) = ba^bx^{b-1}$ $(0 < x < \frac{1}{a})$ と $\frac{1}{X}$ はべき分布となる。$Y - a$ の分布もパレート分布という。 $f_Y(x) = \frac{ba^b}{(x+a)^{b+1}}, (x \geqq 0)$ すると、前にもみたように $X_1 \sim Exp(\lambda_1), X_2 \sim Exp(\lambda_2)$ で独立としたとき、$\frac{X_1}{X_2}$ はパレート分布である。また、$X \sim \Gamma(p, a)$ で $X = x$ のもとで $Y \sim Exp(x)$ とすると $f_Y(y) = \int_0^\infty f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx = \int_0^\infty xe^{-yx}\frac{a^px^{p-1}}{\Gamma(p)}e^{-ax}dx = \frac{pa^p}{(y+a)^{p+1}}$ とパレート分布になる。

■極値分布 $X \sim Exp(1)$ のとき $Y = \log X$ の分布を極値分布という。$F_Y(x) = e^{-e^{-x}}, f_Y(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}}, (-\infty < x < \infty)$ 前にみたように $X_1, X_2 \cdots \sim Exp(1)$ を独立とし,
$\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \log n \xrightarrow[n\to\infty]{} Y$ (分布収束)
$(\because \lim_{n\to\infty} P(\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \log n \leqq x) = \lim_{n\to\infty}(1 - e^{-(x+\log n)})^n = e^{-e^{-x}} = F_Y(x))$

■ロジスティック分布 $U \sim U(0, 1)$ として $X = \log(\frac{U}{1-U})$ としたとき、X の分布をロジスティック分布という。$f_X(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$, $F_X(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$
Y_1, Y_2を独立な極値分布とすると $X \sim Y_1 - Y_2$ となる。$(\because f_{Y_1-Y_2}(x) = \int_{-\infty}^\infty f_{Y_1}(x + y)f_{Y_2}(y)dy = \int_{-\infty}^\infty e^{-(x+y)}e^{-e^{-(x+y)}}e^{-y}e^{-e^{-y}}dy = e^{-x}\int_0^\infty ue^{-(1+e^{-x})u}du = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

■対数正規分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ として $Y = e^X$ の分布を対数正規分布という。 ブラック・ショールズモデルにおける株価過程は対数正規分布に従う。
$f_Y(x) = f_X(\log x)\frac{1}{x}$ $(x > 0)$, $E(Y) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$, $V(Y) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$

6.9　多次元確率分布

6.9.1　多項分布　$mul(n;p_1,p_2)$

■多項分布 $mul(n;p_1,p_2)$　**の定義**　$(X,Y)\sim mul(n;p_1,p_2)$　(パラメータ (n,p_1,p_2) の多項分布) であるとは、

$$P(X=k\cap Y=l)=\frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}p_1^k p_2^l(1-p_1-p_2)^{n-k-l}\quad(k\geq 0,\ l\geq 0,\ k+l\leq n)$$

■多項分布の意味　１回の試行で３つの結果（例えば勝ち・負け・引き分けなど）があり、結果１が起こる確率を p_1、結果２が起こる確率を p_2（したがって結果３が起こる確率 $=p_3=1-p_1-p_2$）とし、その試行を n 回行うとき、結果１が起こる回数を X、結果２が起こる回数を Y とすると

$$(X,Y)\sim mul(n;p_1,p_2)$$

周辺分布は明らかに二項分布。　つまり、$X\sim B(n,p_1)$, $Y\sim B(n,p_2)$
また　$X+Y\sim B(n,p_1+p_2)$

すると $V(X+Y)=V(B(n,p_1+p_2))=n(p_1+p_2)(1-p_1-p_2)$
$V(X+Y)=V(X)+2Cov(X,Y)+V(Y)$ より

$$Cov(X,Y)=\frac{1}{2}\left(n(p_1+p_2)(1-p_1-p_2)-np_1(1-p_1)-np_2(1-p_2)\right)=-np_1p_2$$

注意：多項展開で $E(XY)$ を計算してもできる。

同時確率母関数　$E(t^Xs^Y)=\sum\frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}(p_1t)^k(p_2s)^l(1-p_1-p_2)^{n-k-l}$
$=(1-p_1-p_2+p_1t+p_2s)^n$

また、　$n-l\geqq k\geqq 0$ として、$P(Y=k|X=l)=\binom{n-l}{k}(\frac{p_2}{p_2+p_3})^k(\frac{p_3}{p_2+p_3})^{n-k-l}$ となるので

　条件 $X=l$ のもとで、$Y\sim B(n-l,\frac{p_2}{p_2+p_3})$ である。したがって、$E(Y|X)=\frac{p_2(n-X)}{p_2+p_3}$, $V(Y|X)=\frac{p_2p_3(n-X)}{(p_2+p_3)^2}$ となる。

■練習問題 6.75　正しいサイコロを投げる試行を n 回繰り返す。　$X=1$ の目が出る回数, $Y=6$ の目が出る回数, $Z=$ 奇数の目が出る回数 とする。このとき, $E(X)$, $V(X)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$, $\mathrm{Cov}(Y,Z)$, $\mathrm{Cov}(X,Z)$, $V(Y+Z)$, $V(X+Z)$ を求めよ。

6.9.2　多次元正規分布 $N(\vec{\mu},V)$

■多次元正規分布の定義　$(X,Y)\sim N\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right)$　であるとは、
(X,Y) の同時密度関数　$f_{(X,Y)}(x,y)$ が

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\rho^2}\left(\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right)}$$

このとき

$$E(X)=\mu_1,\quad E(Y)=\mu_2,\quad V(X)=\sigma_1^2,\quad V(Y)=\sigma_2^2,\quad \rho_{X,Y}=\rho \text{ である}$$

特に、$\mu_1=\mu_2=0,\quad \sigma_1=\sigma_2=1$　のとき相関係数 ρ の 2 次元標準正規分布ということがある。
$\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}=\vec{\mu}$ を平均ベクトル,
$\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V(X) & Cov(X,Y)\\ Cov(X,Y) & V(Y)\end{pmatrix}=V$ を分散共分散行列という。
$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ とおくと

$$f_{(X,Y)}(\vec{x})=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2\sqrt{det\,V}}e^{-\frac{1}{2}{}^t(\vec{x}-\vec{\mu})V^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})} \text{ と書けることに注意する。}$$

同時分布 X は $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$

つまり、$E(X)=\mu_1,\quad V(X)=\sigma_1^2,\quad Cov(X,Y)=\rho$

多次元モーメント母関数は

$$\begin{aligned}M_{(X,Y)}(t,s)&=E(e^{tX+sY})\\ &=e^{(\mu_1,\mu_2)\binom{t}{s}+\frac{1}{2}(t,s)V\binom{t}{s}}\\ &=e^{\mu_1t+s\mu_2+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2t^2+2\rho\sigma_1\sigma_2ts+\sigma_2^2s^2\right)}\end{aligned}$$

■多次元正規分布の基本的性質

- a,b を定数とし、$aX+bY$ も 1 次元正規分布で

$$aX+bY\sim N(a\mu_1+b\mu_2,\ a^2\sigma_1^2+2ab\rho\sigma_1\sigma_2+b^2\sigma_2^2)$$

- $(aX+bY,\ cX+dY)$ も 2 次元正規分布で

$$(aX+bY,\ cX+dY)\sim N\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix},\ {}^t\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}V\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)$$

- $aX+bY=u$ のもとで $cX+dY$ の分布も 1 次元正規分布
  上より $X=x$ のもとで Y の分布が 1 次元正規分布を示せばよいが

$$\begin{aligned}f_{Y|X}(y|x)&=\frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(y-\mu_2-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right)^2} \text{ となるので}\end{aligned}$$

$$X=x \text{ のもとで}\quad Y\sim N\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\ (1-\rho^2)\sigma_2^2\right)$$

また、次のようにもいえる。　(Z_1,Z_2) を独立で $Z_i\sim N(0,1)$ とすると
$\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1}=Z_1,\quad$ つまり $X=\mu_1+\sigma_1Z_1$
$\dfrac{Y-\mu_2}{\sigma_2}=\rho Z_1+\sqrt{1-\rho^2}Z_2,\quad$ つまり $Y=\mu_2+\sigma_2(\rho Z_1+\sqrt{1-\rho^2}Z_2)$　　とおくと

$$(X,Y)\sim N\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right) \text{ となる.}(\because \mathrm{Cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2 \text{はすぐにわかる。})$$

このように置き換えて計算すると楽になることが多い。　　すると、$X=x$ のもとで

$$Y=\mu_2+\rho\sigma_2\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}+\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}Z_2 \ \sim\ N\left(\mu_2+\rho\sigma_2\frac{x-\mu_1}{\sigma_1},\ \sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$

■練習問題 6.76　$(X,Y)\sim N\left(\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-2\\-2&6\end{pmatrix}\right)$

のとき以下を求めよ。(1) X の分布　(2)Y の分布　(3)$X+Y$ の分布

(4) $E(X|Y=y)$　(5)$V(X|Y=y)$　(6) $Y=y$ のもとでの　X の分布

■例　標準ブラウン運動 W_t の任意の n 次元分布

$(W_{t_1},W_{t_2},\cdots,W_{t_n})$ は n 次元正規分布で

$$\sim N\left(\vec{0},\begin{pmatrix}t_1&t_1&\ldots&t_1\\ \vdots&t_2&\ldots&t_2\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ t_1&t_2&\ldots&t_n\end{pmatrix}\right)$$

したがって、

$a_1W_{t_1}+a_2W_{t_2}+\cdots+a_nW_{t_n}$ や $a_1W_{t_1}+a_2W_{t_2}=c$ のもとで

W_{t_3} の分布、 $(a_3W_{t_3},a_4W_{t_4})$ の分布、　$a_2'W_{t_2}+a_3W_{t_3}$ の分布はすべて正規分布である。

■計算例　• $P(W_1>0,\ W_2+aW_1>0)$ を計算してみよう。

前に見たように標準正規分布に帰着して解くと良い。

$W_1\sim W_2-W_1\sim N(0,1)$ で　$W_1,\ W_2-W_1$ は独立

$$\begin{aligned}\text{求める確率}&=P(W_1>0,\ W_2-W_1+(a+1)W_1>0)\\&=\iint_{x>0,\ y+(a+1)x>0}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dx\,dy\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty re^{-\frac{1}{2}r^2}dr\int_{-\tan^{-1}(a+1)}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}(a+1)\right)\end{aligned}$$

• $E(W_1|W_2+aW_1>0)=E(W_1,\ W_2+aW_1>0)/P(W_2+aW_1>0)$ を計算してみよう

$P(W_2+aW_1>0)=P(W_2-W_1+(a+1)W_1>0)=P(N(0,\ 1+(a+1)^2)>0)=\dfrac{1}{2}$

まず、$a+1>0$ のとき

$$
\begin{aligned}
E(W_1,\,W_2+aW_1>0) &= \iint_{y+(a+1)x>0} x f_{(W_1,\,W_2-W_1)}(x,y)\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\iint_{y+(a+1)x>0} x e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy \int_{\frac{-y}{a+1}}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(a+1)^2}\right)y^2}\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(a+1)^2}\right)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{a+1}{\sqrt{(a+1)^2+1}}
\end{aligned}
$$

$a+1<0$ のときも同様にして求める。

$$
E(W_1|W_2+aW_1>0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{a+1}{\sqrt{(a+1)^2+1}}
$$

6.9.3 多次元ベータ分布（ディリクレ分布） $\beta(a,b,c)$

■多次元ベータ分布（ディリクレ分布）$\beta(a,b,c)$ の定義 $(X,Y)\sim\beta(a,b,c)$ （パラメータ a,b,c $(a>0,\ b>0,\ c>0)$ の多次元ベータ分布) であるとは

$$
f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{B(a,b,c)}x^{a-1}y^{b-1}(1-x-y)^{c-1} \quad (x>0,\ y>0,\ x+y<1)
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
B(a,b,c) &= \iint_{x>0,\,y>0,\,x+y<1} x^{a-1}y^{b-1}(1-x-y)^{c-1}\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 x^{a-1}\,dx\int_0^{1-x} y^{b-1}(1-x-y)^{c-1}\,dy \qquad (\,y=(1-x)u\,) \\
&= \int_0^1 x^{a-1}\,dx\int_0^1 ((1-x)u)^{b-1}(1-x)^{c-1}(1-u)^{c-1}(1-x)\,du \\
&= \int_0^1 x^{a-1}\,dx\int_0^1 (1-x)^{b+c-1}u^{b-1}(1-u)^{c-1}\,du \\
&= B(a,\,b+c)B(b,\,c) \\
&= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)}
\end{aligned}
$$

■多次元ベータ分布の性質 $\beta(a,b,c)\sim\left(\frac{\Gamma(a,\lambda)}{\Gamma(a,\lambda)+\Gamma(b,\lambda)+\Gamma(c,\lambda)},\frac{\Gamma(b,\lambda)}{\Gamma(a,\lambda)+\Gamma(b,\lambda)+\Gamma(c,\lambda)}\right)$

周辺分布は

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} f_{(X,Y)}(x,y)dy$$
$$= \frac{x^{a-1}}{B(a,b,c)} \int_0^{1-x} y^{b-1}(1-x-y)^{c-1}\,dy = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b+c-1}}{B(a,b,c)} \times B(b,c) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b+c-1}}{B(a,\,b+c)}$$

つまり　$X \sim \beta(a,\,b+c)$

$$\therefore\ E(X) = \frac{a}{a+b+c},\quad V(X) = \frac{a(b+c)}{(a+b+c)^2(a+b+c+1)}$$
$$E(XY) = \frac{B(a+1,b+1,c)}{B(a,b,c)} = \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} \times \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c+2)} = \frac{ab}{(a+b+c+1)(a+b+c)}$$
$$\therefore\ Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{-ab}{(a+b+c)^2(a+b+c+1)}$$

また、$X+Y \sim \beta(a+b,\,c)$

$X=x$ のもとで、Y の分布は

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{B(b,c)} \left(\frac{y}{1-x}\right)^{b-1} \left(1-\frac{y}{1-x}\right)^{c-1} \frac{1}{1-x}\quad (0 \leq y \leq 1-x)$$

より　$Y \sim (1-x)\,\beta(b,c)$

$$\therefore\ E(Y|X=x) = \frac{b}{b+c}(1-x),\qquad V(Y|X=x) = (1-x)^2 \frac{bc}{(b+c)^2(b+c+1)}$$

■計算例　$\left\{(x,y) \,\middle|\, \frac{x}{a}+\frac{y}{b} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$ 上の一様分布 (U,V) を考える。

$\left(\frac{U}{a},\frac{V}{b}\right) \sim \beta(1,1,1)$

$$\therefore\ Cov(U,V) = abCov\left(\frac{U}{a},\frac{V}{b}\right) = ab \times \frac{-1}{(1+1+1)^2(1+1+1+1)} = -\frac{ab}{36}$$

$$\therefore\ E(U^2V^3) = a^2b^3 E\left(\left(\frac{U}{a}\right)^2\left(\frac{V}{b}\right)^3\right) = a^2b^3 \iint_{x>0,\,y>0,\,x+y<1} x^2y^3\,dxdy \times \frac{1}{B(1,1,1)}$$
$$= a^2b^3 \frac{B(3,4,1)}{B(1,1,1)} = \frac{a^2b^3}{210}$$

■計算例　$\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0, z\ge 0\right\}$ 上の一様分布 (X,Y,Z)
このとき

$$\begin{aligned}
\iiint_{x\ge0,\,y\ge0,z\ge0,\ x^2+y^2+z^2\le1} dx\,dy\,dz &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \iint_{u\ge0,\,v\ge0,w\ge0,\ u+v+w\le1} u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}w^{-\frac{1}{2}}du\,dv\,dw \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^3 B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{8}\times\frac{\pi\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

別解：半径 1 の 3 次元球の体積 $\times\frac{1}{8}=\frac{4\pi}{3}\times\frac{1}{8}=\frac{\pi}{6}$ でもよい

$$\begin{aligned}
\therefore\ \ E(X) &= \frac{6}{\pi}\iiint_{x\ge0,\,y\ge0,z\ge0,\ x^2+y^2+z^2\le1} x\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{6}{\pi}\times\frac{1}{8}\times\iint_{u\ge0,\,v\ge0,w\ge0,\ u+v+w\le1} v^{-\frac{1}{2}}w^{-\frac{1}{2}}du\,dv\,dw \\
&= \frac{6}{\pi}\times\frac{1}{8}\times B\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right) \\
&= \frac{6}{\pi}\times\frac{1}{8}\times\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(3)} \\
&= \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

■練習問題 6.77　$V(X)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$ も求めよ。

■計算例　$X,Y,Z\sim U(0,1)$　X,Y,Z は独立のとき

$$\begin{aligned}
P(X+Y^2+Z\le1) &= \iiint_{0\le x\le1,\,0\le y\le1,\,0\le z\le1,\,x+y^2+z\le1} dx\,dy\,dz \\
&= \iiint_{x+u+z\le1} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}dx\,du\,dz \\
&= \frac{1}{2}B\left(1,\frac{1}{2},1,1\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{4}{15}
\end{aligned}$$

■練習問題 6.78　$P(X^2+Y^2+Z^2>1)$, $E(X,X+Y^2+Z\leqq1)$, $E(X|X+Y^2+Z\leqq1)$, $E(X,X^2+Y^2+Z^2>1)$ を求めよ。

■計算例　n 次元球の体積 V_n

$$\begin{aligned}V_n &= 2^n \int\cdots\int_{x_1\geqq 0,\cdots,x_n\geqq 0,\ x_1^2+\cdots+x_n^2\leqq 1} dx_1 \cdots dx_n \\ &= 2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n \int\cdots\int_{u_1\geqq 0,\cdots,u_n\geqq 0,\ u_1+\cdots+u_n\leqq 1} u_1^{-\frac{1}{2}}u_2^{-\frac{1}{2}}\cdots u_n^{-\frac{1}{2}}du_1\cdots du_n \\ &= B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2},1\right) \\ &= \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\end{aligned}$$

注意　$n=1,2,3$ の場合を確かめておくとよい。

6.9.4　その他の多次元確率分布

ここでは多次元一様分布 つまり D を $\mathbb{R}^2$ の部分集合として　2 次元の場合その密度関数が

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases}\frac{1}{D\ \text{の面積}} & (x,y)\in D \\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

となる　(X,Y) の確率分布を D 上の一様分布という。　以下、いろいろ調べてみる。

■$D=\{(x,y)|0\leqq x\leqq a,\ 0\leqq y\leqq b\}$　これは独立な $S\sim T\sim U(0,1)$ を 2 つ持ってきて　$X=aS, Y=bT$ として計算すればよい。

■$D=\{(x\cos\theta-y\sin\theta, x\sin\theta+y\cos\theta)|0\leqq x\leqq a,\ 0\leqq y\leqq b\}$　これは上を原点中心に θ 回転したものなので　$X=aS\cos\theta-bT\sin\theta, Y=aS\sin\theta+bT\cos\theta$ として計算すればよい。　$E(X)=\frac{a\cos\theta-b\sin\theta}{2}$, $E(Y)=\frac{a\sin\theta+b\cos\theta}{2}$, $\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta}{12}$

■$D=\{(x,y)|0\leqq x\leqq a, 0\leqq y\leqq b, \frac{x}{a}+\frac{y}{b}\leqq 1\}$　これは　$(S,T)\sim\beta(1,1,1)$ とすると、 $X=aS, Y=bT$ とおけるので　それを用いて計算するとよい。

■$D=\{(x,y)|0\leqq x, 0\leqq y, x^2+y^2\leqq 1\}$　これは第 1 象限の原点中心半径 1 の円の内部の一様分布であるが、極座標などで計算するかまたは $(S,T)\sim\beta(1/2,1/2,1)$ とおくと $X=\sqrt{S}, Y=\sqrt{T}$ となること (同じことであるが $x^2=s, y^2=t$ と置き換えて多次元ベータ関数を用いて計算する。例　$V(X)=V(\sqrt{S})=E(S)-(E(\sqrt{S})^2=E(\beta(1/2,3/2))-E(\sqrt{\beta(1/2,3/2)})^2=\frac{1}{4}-(\frac{4}{3\pi})^2$
この例はもちろん普通に極座標で計算してもよい。

■練習問題 6.79　D 内に無作為に 2 点 P,Q をとるとき、次を求めよ。$E((\overline{PQ})^2)$　$E(\triangle OPQ)^{(*)}$

■$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqq 1\}$　この場合は多次元ベータ分布に帰着させるには変換が 1 対 1 ではないので注意が必要だが、対称性がある確率や期待値を求める場合はそれに帰着できる。　また依然、極座標による計算は

有効である。計算例 $E(X)=0, V(X)=E(X^2)=\frac{1}{\pi}\iint_{x^2+y^2<1}x^2dxdy=\frac{1}{\pi}\int_0^1 r^3dr\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=\frac{1}{4}$
$E(e^{-(X^2+Y^2)})=\frac{1}{\pi}\iint_{x^2+y^2<1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\frac{1}{\pi}\int_0^1 e^{-r^2}rdr\int_0^{2\pi}d\theta=1-e^{-1}$

■**練習問題** 6.80　$E(|X|), V(|X|), \mathrm{Cov}(|X|,|Y|)$ を求めよ。

以下は 1 次元分布であるが　図形が 2 次元の中にある場合を少し考察する。

■$D=\{(x,y)|0\leqq x, 0\leqq y, x^2+y^2=1\}$　この場合は　$X=\cos\theta, Y=\sin\theta, \theta\sim U(0,\frac{\pi}{2})$ とおける。
$E(X)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta=\frac{2}{\pi}, E(X^2)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta=\frac{1}{2}$
$(X\sim Y$ で　$X^2+Y^2=1$ より$, E(X^2)=\frac{1}{2}$でもよい。
$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{\pi}-(\frac{2}{\pi})^2=\frac{\pi-4}{\pi^2}$

■**練習問題** 6.81　D 上に無作為に 2 点 P,Q をとるとき以下を計算せよ。　$E(\overset{\frown}{PQ})$, $E(\overline{PQ}^2)$, $E(\triangle OPQ)$, $E($扇形 $OPQ)$

6.10　確率過程の分布

6.10.1　1 次元対称ランダムウォーク Z_t

■定義　$Z_t = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_t$,　$Z_0 = 0$,　$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$ は独立で同分布。
$P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$. Z_t は、0 を出発する 1 次元対称ランダムウォーク.

■基本的性質

- $Z_t \sim 2B(t, 1/2) - t$
- **(独立増分性)**　$0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$ として、$Z_{t_1}, Z_{t_2} - Z_{t_1}, Z_{t_3} - Z_{t_2}, \cdots$ は独立
- **(定常増分性)**　$t > s > 0$ として、$Z_t - Z_s \sim Z_{t-s}$
- $E(Z_t) = 0$, $V(Z_t) = t$
- $M_{Z_t}(\alpha) = E(e^{\alpha Z_t}) = \cosh^t \alpha$　$(\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2})$
- $-Z_t$ や $\hat{Z}_t = Z_{t+s} - Z_t$ も 1 次元対称ランダムウォーク
- Z_t はマルコフ過程。また $|Z_t|$ や $(Z_t)^2$ もマルコフ過程.(*)[*24]
- Z_t, $Z_t^2 - t$, $Z_t^3 - 3tZ_t$, $\frac{e^{\alpha Z_t}}{\cosh^t(\alpha))}$ は$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_t$ に関してマルチンゲール。

■練習問題 6.82　(1)$M_{Z_t}(\alpha) = \cosh^t \alpha$ を示し、$E(Z_t e^{\alpha Z_t})$ を求めよ。
(2)$Z_t^3 - 3tZ_t$, $\frac{e^{\alpha Z_t}}{\cosh^t(\alpha))}$ は$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_t$ に関してマルチンゲール を示せ。

6.10.2　1 次元非対称ランダムウォーク $Z_t^{(p)}$

■定義　$Z_t^{(p)} = \xi_1^{(p)} + \xi_2^{(p)} + \cdots + \xi_t^{(p)}$,　$Z_0^{(p)} = 0, \xi_1^{(p)}, \xi_2^{(p)}, \cdots, \xi_t^{(p)}$ は独立で同分布。
$P(\xi_i^{(p)} = 1) = p$, $P(\xi_i = -1) = 1 - p$. $Z_t^{(p)}$ は、0 を出発する 1 次元非対称ランダムウォーク.[*25]

■基本的性質

- $Z_t^{(p)} \sim 2B(t, p) - t$
- **(独立増分性)**　$0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$ として、$Z_{t_1}^{(p)}, Z_{t_2}^{(p)} - Z_{t_1}^{(p)}, Z_{t_3}^{(p)} - Z_{t_2}^{(p)}, \cdots$ は独立
- **(定常増分性)**　$t > s > 0$ として、$Z_t^{(p)} - Z_s^{(p)} \sim Z_{t-s}^{(p)}$
- $E(Z_t^{(p)}) = (2p-1)t$, $V(Z_t^{(p)}) = 4p(1-p)t$
- $M_{Z_t^{(p)}}(\alpha) = E(e^{\alpha Z_t^{(p)}}) = (pe^\alpha + (1-p)e^{-\alpha})^t$
- $\hat{Z}_t^{(p)} = Z_{t+s} - Z_t$ も 1 次元非対称ランダムウォーク, $-Z_t^{(p)} \sim Z_t^{(1-p)}$
- $Z_t^{(p)}$ はマルコフ過程。また $|Z_t^{(p)}|$ や $(Z_t^{(p)})^2$ もマルコフ過程.(**)[*26]
- $Z_t^{(p)} - (2p-1)t$, $(Z_t^{(p)})^2 - 2(2p-1)tZ_t^{(p)} - 4p(1-p)t + (2p-1)^2 t^2$, $\frac{e^{\alpha Z_t^{(p)}}}{(pe^\alpha + (1-p)e^{-\alpha})^t}$ は

[*24] この部分は少し難しいかもしれないので、飛ばしてよい。証明については　近刊「ランダムウォークと確率解析」藤田岳彦著、日本評論社　参照
[*25] この 1 次元非対称ランダムウォークはモデリングテキスト練習問題 3.6.8 において扱われている.
[*26] ここも少し難しいので飛ばしてよい。

$\xi_1^{(p)}, \xi_2^{(p)}, \ldots, \xi_t^{(p)}$ に関してマルチンゲール。

■練習問題 6.83　(1) $E(Z_t^{(p)}) = (2p-1)t$, $V(Z_t^{(p)}) = 4p(1-p)t$ を示せ。
(2)$M_{Z_t^{(p)}}(\alpha) = (pe^{\alpha} + (1-p)e^{-\alpha})^t$ を示し、$E(Z_t^{(p)} e^{\alpha Z_t^{(p)}})$ を求めよ。
(3)$Z_t^{(p)} - (2p-1)t$, $(Z_t^{(p)})^2 - 2(2p-1)tZ_t^{(p)} - 4p(1-p)t + (2p-1)^2t^2$, $\frac{e^{\alpha Z_t^{(p)}}}{(pe^{\alpha}+(1-p)e^{-\alpha})^t}$ は$\xi_1^{(p)}, \xi_2^{(p)}, \ldots, \xi_t^{(p)}$ に関してマルチンゲール を示せ。

6.10.3　ポアソン過程 N_t

時間パラメータ t を 0 以上の実数として、N_t をパラメータ (強度)λ のポアソン過程とする。

■定義と基本的性質

- **(周辺分布はポアソン分布)**　$N_t \sim Po(\lambda t)$ $(N_0 = 0)$　つまり　$P(N_t = k) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$
- **(独立増分性)**　$0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$ として、$N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_3} - N_{t_2}, \cdots$ は独立
- **(定常増分性)**　$t > s > 0$ として、$N_t - N_s \sim N_{t-s}$

■練習問題 6.84　(1)離散確率変数 $X_1, X_2 \ldots$ は独立で同分布確率母関数を $g_X(t)$ 複合ポアソン過程を $Y_t = \sum_{i=0}^{N_t} X_i$ と定義する。($N_t = 0$ なら $Y_t = 0$ とする。) ここで　N_t は強度 λ のポアソン過程とする。このとき　Y_tの確率母関数 $g_{Y_t}(\alpha) = E(\alpha^{Y_t})$ を求めよ。(2) (1) で　$X \sim Be(p)$ のとき　Y_t の分布を求めよ。(3) (1) で　$P(X = k) = \frac{-1}{\log(1-q)} \frac{q^k}{k}$　$(k = 1, 2, \ldots)$ のとき Y_t の分布を求めよ。

■練習問題 6.85　N_t と独立なパラメーター μ の指数確率変数 θ がある。 N_θ の分布を求めよ。また、$\theta \sim \Gamma(p, a)$ の場合も調べよ。

その他のポアソン過程の問題については第 7 章に収録.

6.10.4　(標準) ブラウン運動 W_t, ドリフト付ブラウン運動 $\sigma W_t + \mu t$

時間パラメータ t を 0 以上の実数として、W_t を (標準) ブラウン運動とする。

■定義と基本的性質

- **(周辺分布は正規分布)**　$W_t \sim N(0, t)$ $(W_0 = 0)$　つまり　$f_{W_t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$
- **(独立増分性)**　$0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$ として、$W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \cdots$ は独立
- **(定常増分性)**　$t > s > 0$ として、$W_t - W_s \sim W_{t-s}$
- 確率 1 で $t \to W_t$ は連続。(微分不可能)

・ 正規過程である。　すべての有限次元同時分布は多次元正規分布。つまり、ブラウン運動や　ドリフト付ブラウン運動のいろいろな時点での 1 次結合、また、それらで条件付けられた条件付分布などはすべて正規分布、多次元正規分布となる。例えば、$a_1W_{t_1}+a_2W_{t_2}+\cdots+a_nW_{t_n}$ や $\int_0^t W_s ds$, $a_1W_{t_1}+a_2W_{t_2}=c$ のもとで W_{t_3} の分布、 $(a_3W_{t_3}, a_4W_{t_4})$ の分布、　$a_2'W_{t_2}+a_3W_{t_3}$ の分布はすべて正規分布, 多次元正規分布である。

■練習問題 6.86　W_t, W_t' を独立な標準ブラウン運動　また W_t を用いてドリフト付ブラウン運動 $X_t = \sigma W_t + \mu_t$ を考えるとき、以下を求めよ。また、　$0<s<t<u$ とする。(1) $V(W_t+W_t')$　(2)$\mathrm{Cov}(W_t+W_t', W_s+W_s')$ (3) $E(X_t)$, $V(X_t)$
(4) $\mathrm{Cov}(W_t-aW_u, W_u)=0$ となる実数 a　(5) (4) を用いて　$E(W_t|W_u)$　(6)$^{(*)}$ $E(W_t^2|W_u)$, $V(W_t|W_u)$
(7) $E(e^{W_t})$　(8) $V(e^{W_t})$　(9) $E(e^{-tW_t^2})$
(10) $E(e^{X_t})$　(11)$V(e^{X_t})$ (12) $E(\int_0^t W_v dv)$　(13) $E(\int_0^t W_v^2 dv)$　(14) $\mathrm{Cov}(\int_0^t W_v dv, \int_0^t W_q dq)$
(15)$^{(*)}$ $E(W_t|W_s, W_u)$

6.11 基礎公式のまとめ

■微積分公式 • $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$ (以下は積分定数を省略), $\displaystyle\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$

- $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \log|x|$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x, \qquad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}$

・ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

($\sqrt{1+x^2}$ を置換するときは $x = \tan\theta$とすると複雑になるので $x = \sinh t = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$)

・ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

($\sqrt{x^2-1}$ を置換するときは $x = \frac{1}{\cos\theta}$とすると複雑になるので $x = \cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$)

2つまとめて $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx = \log(x+\sqrt{x^2+A})$ でもよい.

- $\displaystyle\int e^{f(x)}f'(x)\,dx = e^{f(x)}$
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)|$
- $\displaystyle\int f(x)e^x\,dx = e^x(f(x)-f'(x)+f''(x)-f'''(x)\cdots)$
- $\displaystyle\int f(x)e^{-x}\,dx = e^{-x}(-f(x)-f'(x)-f''(x)-f'''(x)-\cdots)$

例 $\int x^3e^{-x}dx = (-x^3-3x^2-6x-6)e^{-x}$

・ $\displaystyle\int f(x)\cos x\,dx = f(x)\sin x + f'(x)\cos x + f''(x)(-\sin x) + f'''(x)(-\cos x) + \cdots$

(はじめの $f(x)\sin x$ を出して後は両方とも微分していく)

例 $\int x^3\cos x dx = x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x$

・ $\displaystyle\int f(x)\sin x\,dx = f(x)(-\cos x) + f'(x)\sin x + f''(x)\cos x - f'''(x)\sin x\cdots$

・ $\displaystyle\int f(x)\log x\,dx = F(x)\log x - \int\frac{1}{x}F(x)dx, \quad F(x) = \int f(x)dx$

- $\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,u)du = f(x,g(x))g'(x) - f(x,h(x))h'(x) + \int_{h(x)}^{g(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)du$

・ $\displaystyle\int_0^a f(a-x)dx = \int_0^a f(x)dx$

例 $\int_0^{\pi/2}(\pi/2-x)\sin xdx = \int_0^{\pi/2}x\cos xdx = [x\sin x]_0^{\pi/2} + [\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}-1$

$\int_0^{\pi/2}(\pi/2-x)^2\cos xdx = \int_0^{\pi/2}x^2\sin xdx = [x^2(-\cos x)]_0^{\pi/2} + [2x\sin x]_0^{\pi/2} + [2\cos x]_0^{\pi/2} = \pi-2$

・ (区分求積法) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)dx$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(a+(b-a)\frac{k}{n})\frac{b-a}{n} = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

例 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1\frac{dx}{1+x} = \log 2$

・ 半径 r の球の体積$= \frac{4}{3}\pi r^3$

半径 r の球の表面積$= 4\pi r^2$

- $\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 2\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}a^2$ (半円、$\frac{1}{4}$ 円の面積を考える)
- $\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi}{12}a^2 + \frac{1}{2}\frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}a$ (扇形と三角形に分ける)
- $\displaystyle\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}a^2 + \frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sqrt{2}}$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{t}}$ $(t>0)$ **(ガウスの公式)**
- $\displaystyle\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx = a\int_0^\infty x^{as-1}e^{-x^a}dx$

$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $n\in\mathbb{N}$ なら $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

- $\displaystyle B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = 2\int_0^{\pi/2}\sin^{2a-1}x\cos^{2b-1}x dx = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}dx$

$= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}a_{ij} = \sum_{1\le j\le i\le n}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}a_{ij}$
- $\displaystyle\iint_{0\le x\le y\le a} f(x,y)dxdy = \int_0^a dx\int_x^a f(x,y)dy = \int_0^a dy\int_0^y f(x,y)dx$

(どちらの順序で計算するのかを注意する。勿論、計算が簡単な方を選ぶ)

- $\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\frac{dxdy}{dudv}dudv$

(ここで変換は 1 対 1 のときで $\frac{dxdy}{dudv}$ はヤコビアンの絶対値)

■数列の和 など ・ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = \infty$

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n) = \gamma\ (0.58\cdots)$ **(オイラー定数)**
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha} < +\infty \rightleftarrows \alpha > 1$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$
- $\displaystyle\sum_{\text{初項}}^{\text{末項}}\text{等差数列} = \frac{\text{初項}+\text{末項}}{2}\times\text{項数}$

例 $\sum_{i=20}^{50}(3i-1) = \frac{59+149}{2}\times 31$

- $\displaystyle\sum_{\text{初項}}^{\text{末項}}\text{等比数列} = \frac{\text{初項}-\text{末項}\times\text{公比}}{1-\text{公比}}$ (無限等比級数は $\dfrac{\text{初項}}{1-\text{公比}}$)

例 $\sum_{i=20}^{50}(3^{2i-1}) = \frac{3^{39}-3^{101}}{1-3^2}$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c = cn,\qquad \sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\qquad \sum_{k=1}^{n}k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k-1)(k-2) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}$ (一般化できる)
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+3)(k+2)(k+1)k = \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n}{5}$ (一般化できる)

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)})\quad(\because \tfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{k(k+1)}-\tfrac{1}{(k+1)(k+2)}))$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}kx^{k-1}=\frac{d}{dx}\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}a_k,\ \sum_{k=1}^{n}a_{n-k+1}=\sum_{k=1}^{n}a_k$　例　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k)^2=\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

■三角関数など　• $e^{\sqrt{-1}x}=\cos x+\sqrt{-1}\sin x$ **(オイラーの公式)**

例 $\cos(x+y)+\sqrt{-1}\sin(x+y)=e^{\sqrt{-1}(x+y)}=e^{\sqrt{-1}x}e^{\sqrt{-1}y}=(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)$

例 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(\cos kx+\sqrt{-1}\sin kx)=\sum_{k=0}^{n}e^{\sqrt{-1}kx}=\frac{1-e^{\sqrt{-1}(n+1)x}}{1-e^{\sqrt{-1}x}}$

- $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$
- $(\cos x,\sin x)+(\cos y,\sin y)=2\cos\frac{x-y}{2}(\cos\frac{x+y}{2},\ \sin\frac{x+y}{2})$　(ベクトルの和の図を描くとわかる.)
- $\sin^{-1}x=\alpha\leftrightarrow\sin\alpha=x\cap-\frac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$
- $\cos^{-1}x=\alpha\leftrightarrow\cos\alpha=x\cap 0\leqq\alpha\leqq\pi$
- $\tan^{-1}x=\alpha\leftrightarrow\tan\alpha=x\cap-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$

■ラグランジュの補間法　· 2 点 $(a,A),(b,B)$ を通る直線の方程式　$y=A\frac{x-b}{a-b}+B\frac{x-a}{b-a}$

3 点 $(a,A),(b,B),(c,C)$ を通る 2 次関数の方程式　$y=A\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+B\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+C\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

(以降 n 次関数も同様)

■極限　· $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1+a/x)^x=\lim_{n\to\infty}(1+a/n)^n=\lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/x}=e^a$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　テーラー展開より、　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\frac{1}{6}$
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$
- ロピタルの定理　$f(a)=g(a)=0$ で　$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}(=A)$ が存在するならば、$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$
- $a>0,b>0$ に対して、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^ae^{-bx}=0$
- $a>0$ に対して　$\displaystyle\lim_{x\to 0}x^a\log x=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^a}=0$
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n}}{n!}=1$　**(スターリングの公式)**

例　$\displaystyle\lim_{x\downarrow 0}x^x=\lim_{x\downarrow 0}e^{x\log x}=1$

例　$\displaystyle\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

■組み合わせ論　・ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^{n}$[*27], $x=1$ を代入して$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

・ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}=n(1+x)^{n-1}$[*28], $x=1$ を代入して$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$

・ $\displaystyle\sum_{k=0}^{l}\binom{n}{k}\binom{m}{l-k}=\binom{m+n}{l}$[*29],　$(\because (1+x)^n(1+x)^m=(1+x)^{m+n}$の両辺の x^lの係数)

・ $\binom{m}{n}=m$ 個のものから n 個のものを選ぶ組み合わせの総数 $=({}_mC_n$とも書く)

・ $\binom{m+1}{n}=\binom{m}{n}+\binom{m}{n-1}$[*30], $n\binom{m}{n}=m\binom{m-1}{n-1}$[*31]

・ ${}_mH_n=m$ 種類のものから重複をゆるして n 個選ぶ (重複) 組み合わせの総数 $=\binom{m+n-1}{n}=m$ 種類の文字の n 個の積から作られる単項式の個数

$(\because m-1$ 個の｜と n 個の ∘ を並べた順列と 1 対 1 対応)

・ $\binom{m+n}{n}=(0,0)$ から (m,n) を結ぶ最短経路 (右に 1(ヨ), 上に 1 ずつ進む (タ)) の個数 $={}_{n+1}H_m=m$ 個のヨの位置を $n+1$ 個の水平な線から重複を許して選ぶ

・ $\displaystyle\binom{m+n}{m}=\sum_{k=0}^{n}\binom{k+m-1}{m-1}$, (∵ 最後のヨの y 座標で分類), 前のほうの級数もこれで解釈可能

・ $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ の整数解の個数 $={}_nH_m$, $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$　の自然数解の個数 $={}_{m-1}C_{n-1}$

・ $\binom{-x}{k}=(-1)^k\binom{x+k-1}{k}$

・ A を定義域とし、B を値域とする写像全体の個数は重複順列の考えかたより　$\#(B)^{\#(A)}$ 個

ここで　$\#(A)$　は集合 A の要素の個数

・ $\#(B)\geqq\#(A)$ のとき、 A を定義域とし、B を値域とする 1 対 1 写像全体の個数は ${}_{\#(B)}P_{\#(A)}=\frac{\#(B)!}{(\#(B)-\#(A))!}$

・ 多項定理　$\displaystyle(x+y+z)^n=\sum_{0\leqq k,l\leqq n}\frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}x^ky^lz^{n-k-l}$

■テーラー展開　• $\displaystyle\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$　$(|x|<1)$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$　(上を微分)
- $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}=\frac{2}{(1-x)^3}$　(上を微分)
- $\displaystyle\sum_{k=n-1}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-n+2)x^{k-n+1}=\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n-1}x^k=\sum_{k=0}{}_nH_kx^k=\sum_{k=0}\binom{-n}{k}(-x)^k=(1-x)^{-n}$
- $\displaystyle e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots$　$(-\infty<x<\infty)$

[*27] この 2 項定理の計算によらない組み合わせ論的な説明は以下のとおり。n 人のクラスで　係が　$x+1$ 種類あり、すべての人がどれかの係を一つやるとすると、選び方の総数は重複順列の考え方より、$(x+1)^n$ 通りである。　また、一つの係に注目してその係の人数が $k\,(0\leqq k\leqq n)$ であったとすると、　その係以外の人は $n-k$ 人いるので　選び方の総数は　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

[*28] これは上の考え方にさらにひとつの係にはその長も選ぶ (例えば委員を一つの係として委員長もその中から選ぶ) ことを 2 通りに考えればよい

[*29] これは　n 人のクラスと　m 人のクラスから合わせて l 人の委員を選ぶことを　2 通りに見ればよい。

[*30] これは $m+1$ 人のクラスから n 人の委員を選ぶのだが, 特定の人が委員に入る場合と, はいらない場合を考えればよい。

[*31] これは $n-1$ 人の委員と一人の委員長を選ぶが、n 人の委員を選んでからそのなかから委員長を選んでも同じことに気づけばよい。

- $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} \cdots \quad (|x| < 1)$
- $\log\dfrac{1+x}{1-x} = 2(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} \cdots) \quad (|x| < 1)$

例 $\log n = \log \frac{1+\frac{n-1}{n+1}}{1-\frac{n-1}{n+1}} \fallingdotseq 2(\frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{3}(\frac{n-1}{n+1})^3 + \cdots)$ で近似値が求まる。

- $(1+x)^\alpha = 1 + \dbinom{\alpha}{1}x + \dbinom{\alpha}{2}x^2 + \dbinom{\alpha}{3}x^3 \cdots \quad (|x| < 1\,;\ \alpha \in \mathbf{R})$

ここで、$\dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}$

- $\tan^{-1}x = \int_0^x \frac{1}{1+u^2}du = \int_0^x \sum_{k=0}^\infty (-u^2)^k du = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$
- $\sin^{-1}x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \int_0^x (1 + \frac{1}{2}u^2 + \binom{-1/2}{2}(-u^2)^2 + \cdots)du = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots$

■知っておくと良い近似値　・ $e^{0.7} \fallingdotseq 2$ （テーラー展開に代入すると良い）

$(\log 2 \fallingdotseq 0.7)$

これより **70 の法則**

$$\left(1+\frac{r}{100}\right)^{\frac{70}{r}} = \left(\left(1+\frac{r}{100}\right)^{\frac{100}{r}}\right)^{0.7} \fallingdotseq e^{0.7} \fallingdotseq 2$$

- 同様に $e^{0.4} \fallingdotseq \frac{3}{2}, \qquad e^{1.1} \fallingdotseq 3$
- $10^3 \fallingdotseq 2^{10} \fallingdotseq e^7$
- $2^{19} \fallingdotseq 3^{12}$

■ 不等式　・ $e^x \geqq 1 + x, \quad (x \in \mathbb{R})$ （等号成立は　$x = 0$）

例　$e^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} > \Pi_{k=1}^n (1 + \frac{1}{k}) = n + 1$　より、$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = \infty$

- $x \geq \log(1+x) \quad (x > -1)$
- $0 < x < \pi/2$ で　$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x < \tan x$
- （相加・相乗）$a_i \geqq 0$ で　$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq (a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}$　（等号成立はすべて等しいとき）

例 n 個の $1 + \frac{1}{n}$ と 1 個の 1 にこれを適用すると、$((1+\frac{1}{n})^n)^{\frac{1}{1+n}} < \frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n} = 1 + \frac{1}{n+1}$ より

$(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$

- （コーシー・シュワルツ）$(\sum a_ib_i)^2 \leqq \sum a_i^2 \sum b_i^2$　（等号成立はベクトルとみなし平行）

例　$(x+2y+3z)^2 \leqq (1^2+2^2+3^2)(x^2+y^2+z^2)$　より、$x^2+y^2+z^2 = 1$ のもとでの $x+2y+3z$ の最大値$=\sqrt{14}$（等号は　$(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$)，最小値=-$\sqrt{14}$（等号は $(x,y,z) = \frac{-1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$)

- $E(X)^2 \leqq E(X^2)$　（等号成立は定数）
- （コーシー・シュワルツ）$E(XY)^2 \leqq E(X^2)E(Y^2)$,　（等号成立は　$Y = aX$）
- （イエンセン）下に凸な f(例えば $f'' > 0$) に対して, $f(E(X)) \leqq E(f(X))$

($f'' > 0$ なら等号成立は $X =$ 定数)

- （チェビシェフ）$P(|X| \geqq a) \leqq \frac{E(X^2)}{a^2}$,　f が正の値をとるなら $P(f(X) \geqq a) \leqq \frac{E(f(X))}{a}$

$(\because E(f(X)) = E(f(X), f(X) \geqq a) + E(f(X), f(X) < a) \geqq E(f(X), f(X) \geqq a)$

$\geqq E(a, f(X) \geqq a) = aP(f(X) \geqq a))$

また、$P(|X - E(X)| \geqq a) \leqq \frac{V(X)}{a^2}$

　これから　X_i を　$E(X_i) = m, V(X_i) = \sigma^2$ なる　i.i.d.(独立、同分布) とすると、

$P(|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - m| \geqq \epsilon) \leqq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n}$ となり、大数の弱法則 $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} m$(確率収束) がわかる.

■コーシーの関数方程式　・　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $f(s+t)=f(s)f(t)$　を満たすなら、$\exists a(\in\mathbb{R})$　$f(t)=e^{at}$*32.

・　$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ が $f(s+t)=f(s)f(t)$　を満たすなら、$\exists a(\in\mathbb{R})$　$f(t)=a^t$.

■正射影　●　$\vec{x}$の$\vec{a}$への正射影ベクトル $= proj_{\vec{a}}\vec{x}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$

●　$\vec{x}$の Linear span of $\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$ への正射影ベクトル $= proj_{\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}}(\vec{x})=(\vec{x}\cdot\vec{e_1})\vec{e_1}+(\vec{x}\cdot\vec{e_2})\vec{e_2}$

ここで　$\vec{e_1},\vec{e_2}$ は正規直交ベクトル、つまり　$|\vec{e_1}|=|\vec{e_2}|=1,\ \vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=0$

例 (グラム・シュミットの直交化) 一次独立な $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ から　正規直交ベクトル $\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3}$ を作ると

$\vec{e_1}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},\ \vec{e_2}=\frac{\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{e_1})\vec{e_1}}{|\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{e_1})\vec{e_1}|},\ \vec{e_3}=\frac{\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{e_1})\vec{e_1}-(\vec{c}\cdot\vec{e_2})\vec{e_2}}{|(\vec{c}\cdot\vec{e_1})\vec{e_1}-(\vec{c}\cdot\vec{e_2})\vec{e_2}|}$

例　$H=\{X|E(X^2)<\infty\}$ に内積 $\langle X,Y\rangle=E(XY)$　をいれ、グラム・シュミットの直交化より、

$1,X$ から　正規直交ベクトルを作ると $1,X$ の標準化 $=\frac{X-m}{\sigma}$ となる。

すると、　$proj_{\{1,X\}}Y=E(Y)1+E(Y\frac{X-m}{\sigma})\frac{X-m}{\sigma}$ となり、これは回帰直線と一致する。

■常微分方程式　・　$\frac{dy}{dx}=ay,y(0)=c$ の解は　$y(x)=ce^{ax}$

・　$\frac{dy}{dx}=f(y)g(x)$ (変数分離形) は　$\int\frac{dy}{f(y)}dy=\int g(x)dx$ として解く。

・　$\frac{dy}{dx}+g(x)y=h(x)$ は　$\frac{d}{dx}(e^{\int g(x)dx}y)=h(x)e^{\int g(x)dx}$ として両辺を積分

・　$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$ (同次形) は　$u=\frac{y}{x}$ として　u の微分方程式に直す。

・　a,b は定数として、$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$ の解は, 特性方程式 $u^2+au+b=0$ の異なる 2 解を α,β として

$y=Ce^{\alpha x}+De^{\beta x}$　α が重解の場合は　$y=(Cx+D)e^{\alpha x}$

すべての解 $y(x)$ が安定 ($\lim_{x\to\infty}y(x)=0$) であるための必要十分条件は　特性方程式のすべての解の絶対値が 1 より小さいこと。

$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=f(x)$ の解は特殊解を 1 つ求めて、特殊解＋一般解とする。

■極値問題　・　$f(x,y)$ が $(x,y)=(x_0,y_0)$ で極値をとる。$\longrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$

・　(条件付き極値問題、ラグランジュの未定係数法) $g(x,y)=0$ のもとで、$f(x,y)$ が $(x,y)=(x_0,y_0)$ で極値をとる。$\longrightarrow$ $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$ とおき、

$\frac{\partial L}{\partial x}(x_0,y_0,\lambda_0)=\frac{\partial L}{\partial y}(x_0,y_0,\lambda_0)=\frac{\partial L}{\partial\lambda}(x_0,y_0,\lambda_0)=0$

■連立 1 次方程式　$\vec{a_i},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ として　$(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{b}$ と表せる未知数 3 個、式の個数 3 個の連立方程式を考える。掃き出し法は係数行列 $(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})$ を行基本変形を用いて　できるだけ単位行列に近づけて行く。(詳しくは　穴埋め式　線形代数　らくらくワークブック参照)、単位行列に変形できた場合は　$rank((\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}))$=$rank((\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{b})=3$ のケースとなり　解が一意的に存在する。また、　解が存在しない $\leftrightarrow$ $rank((\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})<rank((\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{b})$ であり、解が存在する　$\leftrightarrow$ $rank((\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}))=rank((\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{b})$ であるが、解が存在する場合の解は、$3-rank((\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})$ 個の任意定数であらわされる。

また、行列式 $|\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}|\neq 0$ の場合は　次のクラーメルの公式が成立する。

*32 厳密にいうと　f には、連続性、単調性、原点の近くでの有界性、微分可能性、可測性などの条件のうちのひとつを課さなければならない。

$$x = \frac{|\vec{b}, \vec{a_2}, \vec{a_3}|}{|\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}|}, \quad y = \frac{|\vec{a_1}, \vec{b}, \vec{a_3}|}{|\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}|}, \quad z = \frac{|\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{b}|}{|\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}|}$$

■逆行列　・ $n \times n$ 行列が逆行列を持つ。$\leftrightarrow$ $\det(A)(= |A| = A$ の行列式$) \neq 0$

・ $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

・ (逆行列の求め方) 掃き出し法で行基本変形により　$A|E \quad \rightarrow \quad E|A^{-1}$ に変形する.

■漸化式 (差分方程式)　まず $a_{n+1} = ra_n \longrightarrow a_n = a_0 r^n (= a_1 r^{n-1}) = a_{-m} r^{n+m}$

■$a_{n+1} = ra_n + f(n)$ の場合　特殊解 $b_{n+1} = rb_n + f(n)$ となる b_n を求め、

$$a_{n+1} - b_{n+1} = r(a_n - b_n) \quad \therefore a_n - b_n = (a_0 - b_0)r^n \quad \therefore a_n = b_n + (a_0 - b_0)r^n$$

計算例 1

$$a_{n+1} = 3a_n + 4 \quad (a_0 = 2)$$

$$c = 3c + 4 \longrightarrow c = -2$$

$$a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2) \quad \therefore\ a_n = -2 + (a_0 + 2)3^n = -2 + 4 \cdot 3^n$$

計算例 2

$$a_{n+1} = 3a_n + n^2 \quad (a_0 = 2)$$

$b_{n+1} = 3b_n + n^2 \quad b_n = Cn^2 + Dn + E \quad$ (b_nは 2 次式)

$C(n+1)^2 + D(n+1) + E = 3(Cn^2 + Dn + E) + n^2$より、$C = D = E = -\dfrac{1}{2}$

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 3(a_n - b_n)$$

$$\therefore a_n - b_n = (a_0 - b_0)3^n = (2 + \frac{1}{2})3^n$$

$$\therefore a_n = -\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}3^n$$

計算例 3

$$a_{n+1} = 2a_n + 3^n \quad (a_0 = 3)$$

$b_{n+1} = 2b_n + 3^n \longrightarrow b_n = c3^n$とおける　これより、$c = 1$

$$\therefore a_{n+1} - b_{n+1} = 2(a_n - b_n) \quad \therefore\ a_n = b_n + (a_0 - b_0)2^n = 3^n + 2^{n+1}$$

■$a_{n+2}+Aa_{n+1}+Ba_n=0$ **の場合**　特性方程式 $t^2+At+B=0$ の 2 解を α,β $(\alpha\neq\beta)$ とし、
$a_n=C\alpha^n+D\beta^n$ が解 $(\because\ \ \alpha^{n+2}+A\alpha^{n+1}+B\alpha^n=\alpha^n(\alpha^2+A\alpha+B)=0$ と線型性)
後は、$a_0=C+D, a_1=C\alpha+D\beta$で定数 C,D を定める
重解、つまり $t^2+At+B=(t-\alpha)^2$ の場合、解と係数の関係より、$\alpha+\alpha=-A$
$a_n=(Cn+D)\alpha^n$ が解
$(\because\ \ (n+2)\alpha^{n+2}+A(n+1)\alpha^{n+1}+Bn\alpha^n=\alpha^n(\alpha^2+A\alpha+B)+(2\alpha+A)\alpha^{n+1}=0\ )$

計算例 4

$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0\quad(a_0=5,a_1=12)$

特性方程式は $t^2-5t+6=0$ となり、2 解は $2,3$

$a_n=C2^n+D3^n$とおき、$a_0=C+D=5,\ \ a_1=2C+3D=12$ より、$C=3,D=2$

$\therefore a_n=3\cdot 2^n+2\cdot 3^n$

■$a_{n+2}+Aa_{n+1}+Ba_n=f(n)$ **の場合**　特殊解 $b_{n+2}+Ab_{n+1}+Bb_n=f(n)$ を求め
$a_{n+2}-b_{n+2}+A(a_{n+1}-b_{n+1})+B(a_n-b_n)=0$ となり、例えば重解を持たない場合は、
$a_n=C\alpha^n+D\beta^n$ つまり、$a_n=b_n+C\alpha^n+D\beta^n$ となり、a_0,a_1 より C,D を求めればよい

計算例 5

$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=2\quad(a_0=5,a_1=12)$

特殊解は $c-5c+6c=2\quad\therefore c=1$

$(a_{n+2}-1)-5(a_{n+1}-1)+6(a_n-1)=0$

特性解は $2,3\quad\therefore a_n=1+D2^n+E3^n, a_0=5,a_1=12$ より、

$D=1,E=3\quad\therefore a_n=1+2^n+3^{n+1}$

計算例 6

$a_{n+2}-2a_{n+1}-3a_n=8n\quad(a_0=7,a_1=-1)$

特殊解は $b_n=Cn+D$ より、C,D を求めると、$b_n=-2n$

また、特性解は $t^2-2t-3=0$ を解いて、$t=-1,3\quad\therefore a_n=-2n+E3^n+F(-1)^n$とおけ

$a_0=7,a_1=-1$ より、$E=2,F=5\quad\therefore a_n=-2n+2\cdot 3^n+5(-1)^n$

■**練習問題** 6.87　次を解け

(1) $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=3^n, a_0=2,a_1=11$
(2) $a_{n+1}-5a_n=4, a_0=3$
(3) $a_{n+1}-5a_n=4n+1, a_0=3$
(4) $a_{n+1}-5a_n=5^n, a_0=3$ (特殊解は $(Cn+D)5^n$)
(5) $a_{n+2}-a_{n+1}-6a_n=0, a_0=5,a_1=10$

(6) $a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 6n, a_0 = -\frac{1}{6}, a_1 = \frac{5}{6}$
(7) $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 3a_n = 5 \cdot 2^n, a_0 = 2, a_1 = 3$
(8) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_0 = 0, a_1 = 1$
(9) $a_{n+2} + a_n = 0, a_0 = 1, a_1 = 0$
(10) $a_{n+3} - 4a_{n+2} + a_{n+1} + 6a_n = 8, a_0 = 5, a_1 = 9, a_2 = 13$

■練習問題 6.88　ギャンブラーの破産問題をこのやり方で解け。つまり、勝つ確率 $\frac{1}{1+\alpha}, \alpha > 0$ 負ける確率 $\frac{\alpha}{1+\alpha}$ のゲームに最初の所持金 x\$ で、毎回 1\$ ずつ賭け, 目標金額 N に到達するかまたは破産すれば　ゲームをやめるとする。最初の所持金が $n, (0 \leqq n \leqq N)$ のときに最終的に破産する確率を p_n とするとき、p_n の漸化式を立てて解け。
また、ゲームをやめるまでの時間を T としたとき $E(T)$ もここのやり方で計算せよ。

■練習問題 6.89$^{(**)}$　正しい硬貨を何回も投げる。　初めて　表裏と続けて出るまでの試行回数$=X$ とするとき、　$p_n = P(X = n)$ を求めよ。また、　X の確率母関数 $g_X(t) = E(t^X)$ も求めよ。
(Hint　表が出た後の試行で初めて　表裏と出るまでの試行回数 $= Y$ を合わせて考えよ.)

■練習問題 6.90　お菓子のおまけは A, B, C の 3 種類あり、お菓子を買うごとに確率 $\frac{1}{3}$ で　どれかがもらえる。　初めておまけが　3 種類そろうまでにお菓子を買った個数を　N とするとき、次を求めよ。
(1)$k \in \mathbb{N}$ にたいして　$P(N > k)$　(2)$E(N)$　(3)$\sum_{k=0}^{\infty} kP(N > k)$　(4) $V(N)$

■行列の n 乗　一般に　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき、A^n の計算の仕方。
ケーリーハミルトンより、$(A - \alpha E)(A - \beta E) = 0$　(ここで　E は単位行列),
ここで α, β は A の固有値。つまり、$0 = |xE - A| = x^2 - (a + d)x + ad - bc$ の解。
$P_\alpha P_\beta = 0,\ AP_\alpha = \alpha P_\alpha,\ AP_\beta = \beta P_\beta$ などがすぐに分かる。$\alpha \neq \beta$ の時、$P_\alpha = \dfrac{A - \beta E}{\alpha - \beta},\ P_\beta = \dfrac{A - \alpha E}{\beta - \alpha}$ とおくと、$P_\alpha + P_\beta = E$
すると、$A = AE = A(P_\alpha + P_\beta) = \alpha P_\alpha + \beta P_\beta$
$A^2 = \alpha AP_\alpha + \beta AP_\beta = \alpha^2 P_\alpha + \beta^2 P_\beta$
$\vdots$
$A^n = \alpha^n P_\alpha + \beta^n P_\beta = \alpha^n \dfrac{A - \beta E}{\alpha - \beta} + \beta^n \dfrac{A - \alpha E}{\beta - \alpha}$　(スペクトル分解)
一般に、$f(A) = f(\alpha)\dfrac{A - \beta E}{\alpha - \beta} + f(\beta)\dfrac{A - \alpha E}{\beta - \alpha}$
$\alpha = \beta$ の時は、$(A - \alpha E)^2 = 0$ なので

$$\begin{aligned}
A^n &= (\alpha E + (A - \alpha E))^n \\
&= (\alpha E)^n + n(\alpha E)^{n-1}(A - \alpha E) + {}_nC_2(\alpha E)^{n-2}(A - \alpha E)^2 + \cdots \\
&= \alpha^n E + n\alpha^{n-1}(A - \alpha E)
\end{aligned}$$

また、同様に　$f(A) = f(\alpha)\frac{A-\beta E}{\alpha-\beta} + f(\beta)\frac{A-\alpha E}{\beta-\alpha}$
特に　$e^{tA} = e^{t\alpha}\frac{A-\beta E}{\alpha-\beta} + e^{t\beta}\frac{A-\alpha E}{\beta-\alpha}$
となり、定数係数の連立常微分方程式 $\binom{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\binom{x}{y} = A\binom{x}{y}$ は　$\binom{x(t)}{y(t)} = e^{tA}\binom{x(0)}{y(0)}$ と解ける。また、

漸化式　$a_{n+2}+ba_{n+1}+ca_n=0$ は　$\binom{a_{n+1}}{a_{n+2}}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -c & -b\end{pmatrix}\binom{a_n}{a_{n+1}}=A\binom{a_n}{a_{n+1}}$

と変形できるので　$\binom{a_n}{a_{n+1}}=A^n\binom{a_0}{a_1}$ と行列の n 乗を用いて解ける。　3 次以上についても同様であり、同次形で特殊解を求める必要があるときも行列の固有値を元にそれがわかることを注意しておく。3 次以上については、藤田岳彦・石井昌宏著「穴埋め式線形代数らくらくワークブック参照」

固有値が異なる場合のみ触れておく。　固有値α,β,γがすべて異なるとき

$$A^n=\alpha^n\frac{(A-\beta E)(A-\gamma E)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\beta^n\frac{(A-\gamma E)(A-\alpha E)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\gamma^n\frac{(A-\alpha E)(A-\beta E)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

$$f(A)=f(\alpha)\frac{(A-\beta E)(A-\gamma E)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+f(\beta)\frac{(A-\gamma E)(A-\alpha E)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+f(\gamma)\frac{(A-\alpha E)(A-\beta E)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

■解き方のコツ　まず、基本的な数学の知識、特に確率や統計における典型的計算法や基本分布に関する知識を蓄え

十分な計算練習を行うことが必要不可欠である。　その上で

- 問題をよく読み自分のよく知っていることや経験から解法を考える。
- $P(A)$ か余事象の確率 $P(A^c)$ のどちらを計算したら簡単かを考える。
- 分布関数か密度関数か　母関数のどれを選択するのかを考える。
- ガンマ関数や　ベータ関数が使えないかをいつも考える。
- 漸化式や方程式が立てられないかを考える。
- 帰納法や帰納的な考え方が使えないかどうか？
- 対称性に注意して簡単になるのかどうか？
- 計算を簡単にする工夫を行う。　例えば　$\sum_{k=1}^{n}(k+1)k(k-1)$ のような級数で解く。
  指数分布や幾何分布はほとんどの場合テイル確率（しっぽ確率）から計算する。
- 独立性や排反が使えるのか使えないのかをいつも注意する。

■検算のコツ　•　$0\leq P(\ \ )\leq 1$　(確率を求めたなら、いつでもその値は 0 以上 1 以下)

- $P(a\leq X\leq b)=1 \longrightarrow a\leq E(X)\leq b$
- $V(X)\geq 0$　(分散はいついかなる時でも非負。定数を除いて正)
- $n=0,1,2$ を代入して具体的に確める
- 数値の場合、常識的な値になったかどうかを考える
- 確率密度関数を求めた場合
  積分して 1 になるかや非負の値かどうか？
- 分布関数を求めたら、単調増加か？　$F(\infty)=1?,\ F(-\infty)=0?$
- 確率 p を $p=0$ や $p=1$ にしたらどうなるのか？　(極端な場合を考えよ)
- 対称性・非対称性についての検討。

第 7 章

確率・統計・モデリング演習問題

(1) $A \sim Be(p)$, $B \sim B(N,p)$, $C \sim Ge(p)$, $C' \sim Fs(p)$, $D \sim NB(N,p)$, $H \sim HG(N,m,n)$, $I \sim DU\{0,1,2,\ldots,N\}, I' \sim DU\{1,2,\ldots,N\}$, $K \sim Po(\lambda)$ $U \sim U(0,1)$ $M \sim Exp(\lambda)$(平均 $1/\lambda$ の指数分布) $O \sim \Gamma(p,a)$ $S \sim \beta(a,b)$ $T \sim \chi^2_n$ $X \sim N(0,1)$ $Y \sim N(\mu,\sigma^2)$ $\xi^{(p)} = 2A-1$ $\xi = \xi^{(1/2)}$ $(L,L') \sim mul(N;p_1,p_2)$, $(R,R') \sim \beta(a,b,c)$ で以上は独立とする。また、$A_1, A_2, \ldots$ と書けば $A_i \sim Be(p)$ で それらは独立とする。さらに、Z_t は対称ランダムウォーク、(つまり, $Z_t = \xi_1 + \cdots + \xi_t$, $Z_0 = 0$), $Z_t^{(p)}$ は 非対称ランダムウォーク、($Z_t^{(p)} = \xi_1^{(p)} + \cdots + \xi_t^{(p)}, Z_0^{(p)} = 0$), W_t は (標準) ブラウン運動、 N_t は パラメータ (強度)λ のポアソン過程とする。 また、$U_1, U_2, \ldots, U_n$ を並べ替えて $U_{(1)} \leqq U_{(2)} \leqq \cdots \leqq U_{(n)}$ とする。また、$0 \leqq s \leqq t$ とする。このとき、例のように以下を求めよ。 また、ガンマ関数 $\Gamma(s)$, 標準正規分布の分布関数 $\Phi(x)$=$P(X \leqq x)$ は 答えに用いてよい。

例 $1-A \quad \sim Be(1-p)$. 例 $E(A^3) = 1^3 p + 0^3(1-p) = p$.

(1)	$P(A_1A_2=1)$	(2)	$P(A^2=1)$	(3)	$P(BC=3)$
(4)	$P(AB=0)$	(5)	$A+B \sim$	(6)	$B_1+B_2 \sim$
(7)	$V(B+B)$	(8)	$V(C_1-2C_2+3)$	(9)	$V(C-2C+3)$
(10)	$P(C \geqq k)$	(11)	$P(C' > 2k+1)$	(12)	$V(B_1+B_2)$
(13)	$P(C=$ 偶数$)$	**(14)	$P(K=$ 偶数$)$	(15)	$P(C_1 \geqq 2C_2+1)$
*(16)	$P(C_1 \geqq 2C_2-1)$	(17)	$C_1+\cdot\cdot+C_N \sim$	(18)	$E(K^2)$
(19)	$E(K(K-1))$	(20)	$E(\frac{1}{K+1})$	(21)	$E(\frac{1}{(K+1)(K+2)})$
(22)	$E(t^B)$	(23)	$E(t^C)$	(24)	$E(t^{C'})$
(25)	$E(t^D)$	(26)	$E(t^{2K})$	(27)	$E(\frac{1}{B+1})$
*(28)	$E(\frac{1}{K+2})$	*(29)	$E(\frac{1}{C+1})$	*(30)	$E(\frac{1}{C+2})$
(31)	$\min(C_1,C_2) \sim$	(32)	$E(\min(C_1,C_2))$	(33)	$V(\min(C_1,C_2))$
*(34)	$E(\max(C_1,C_2))$	**(35)	$V(\max(C_1,C_2))$	*(36)	$E(\lvert C_1-C_2\rvert)$
*(37)	$P(C_1-C_2=k)$	*(38)	$V(\lvert C_1-C_2\rvert)$	*(39)	$E(\max(k,C))$
*(40)	$E(\min(k,C)$	*(41)	$E(\lvert C-k\rvert)$	*(42)	$E(\lvert K-\lambda\rvert)$
(43)	$P(I_1'+I_2' \leqq k)$	(44)	$E(t^I)$	(45)	$E(\frac{1}{(I+1)((I+2)})$
(46)	$n-H \sim$	(47)	$m-H \sim$	(48)	$P(C=B)$
(49)	$P(C \geqq B)$	(50)	$P(K \leqq C)$	(51)	$E(e^{tX})$
(52)	$E(e^{tX^2})$	(53)	$E(e^{tY})$	(54)	$E(e^{tY^2})$
(55)	$aX \sim$	(56)	$aX-bY \sim$	(57)	$X_1^2+X_2^2 \sim$
(58)	$E(\frac{X_1^2}{X_1^2+X_2^2+X_3^2})$	(59)	$V(\frac{X_1^2}{X_1^2+X_2^2+X_3^2})$	(60)	$E((\frac{X_1^2}{X_1^2+X_2^2+X_3^2})^n)$
(61)	$\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2 \sim$	(62)	$E(\lvert X\rvert)$	(63)	$E(\lvert X\rvert^m)$
(64)	$X \sim f(U)$ となる f	(65)	$Y \sim f(U)$ となる f	(66)	$M \sim f(U)$ となる f
(67)	$E(e^{tX_1X_2}\lvert X_1)$	*(68)	$E(e^{t(X_1X_2)})$	*(69)	$E(e^{t(X_1X_2+X_3X_4)})$
**(70)	$X_1X_2+X_3X_4 \sim$	(71)	$f_{\max(X_1,X_2)}(x)$	(72)	$E(\max(X_1,X_2))$
(73)	$E((Y-\mu)^m)$	(74)	$f_{e^X}(x)$	(75)	$f_{e^Y}(x)$
(76)	$f_{U^m}(x)$	(77)	$f_{e^U}(x)$	(78)	$f_{\log U}(x)$
(79)	$E(e^{tU})$	(80)	$V(e^{tU})$	(81)*	$P(B=k\lvert B+C=N)$
(82)	$E(e^{t(M_1-M_2)})$	(83)	$aM\,(a>0) \sim$	(84)	$aO\,(a>0) \sim$

(85)	$f_{\log M}(x)$	(86)	$f_{e^M}(x)$	(87)	$f_{\log O}(x)$
(88)	$f_{e^O}(x)$	(89)	$P(M_1 > 3M_2)$	*(90)	$P(M_1 + M_2 \geqq 3M_3)$
(91)	$\min(M_1, M_2) \sim$	(92)	$E(\min(M_1, M_2))$	(93)	$V(\min(M_1, M_2))$
*(94)	$E(\max(M_1, M_2))$	**(95)	$V(\max(M_1, M_2))$	*(96)	$E(\vert M_1 - M_2\vert)$
*(97)	$V(\vert M_1 - M_2\vert)$	*(98)	$E(\max(a, M))$	*(99)	$E(\min(a, M))$
*(100)	$E(\vert M - a\vert)$	**(101)	$V(\min(a, M))$	*(102)	$E(M\vert M < a)$
*(103)	$E(M^2\vert M > a)$	(104)	$E(X\vert X > a)$	*(105)	$E(X^2\vert X > a)$
(106)	$E(Y\vert Y > a)$	*(107)	$E(Y^2\vert Y > a)$	*(108)	$P(NB(2, p) \geqq k)$
*(109)	$P(\Gamma(2, a) \leqq x)$	**(110)	$P(2C_1 - C_2 = 2k)$	**(111)	$P(2C_2 - C_1 = 2k + 1)$
(112)	$f_{M_1+M_2+M_3}(x)$	(113)	$f_{M_1/M_2}(x)$	(114)	$f_{\max(M_1,M_2)}(x)$
(115)	$E(U^m(1 - U)^n)$	(116)	$E(U_1^m(1 - U_2)^n)$	(117)	$E(Me^M)$
(118)	$f_{\max(M_1,3M_2)}(x)$	(119)	$P(U_1 \leqq U_2^3)$	(120)	$P(U_1 \leqq U_2^3\vert U_1 \leqq U_2^2)$
(121)	$f_{U_1+U_2}(x)$	*(122)	$f_{U_1+4U_2}(x)$	(123)	$f_{U_1-U_2}(x)$
(124)	$f_{U_1/U_2}(x)$	(125)	$f_{U_1U_2}(x)$	(126)	$f_{\min(U_1,U_2)}(x)$
(127)	$f_{\max(U_1,U_2)}(x)$	*(128)	$f_{\frac{\min(U_1,U_2)}{\max(U_1,U_2)}}(x)$	(129)	$f_{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}(x)$
(130)	$E(S^2(1 - S)^2)$	(131)	$E((2\beta(a, a) - 1)^{2m+1})$	*(132)	$E(\max(\vert X_1\vert, \vert X_2\vert))$
*(133)	$E(\min(\vert X_1\vert, \vert X_2\vert))$	*(134)	$E(\frac{\min(\vert X_1\vert,\vert X_2\vert)}{\max(\vert X_1\vert,\vert X_2\vert)})$	**(135)	$E(\frac{(\min(\vert X_1\vert,\vert X_2\vert))^2}{\max(\vert X_1\vert,\vert X_2\vert)})$
*(136)	$[M] \sim$	**(137)	$F_{\frac{X_1^2+X_2^2}{X_3^2}}(x)$	**(138)	$f_{\frac{X_1^2+X_2^2}{X_3^2}}(x)$
(139)	$P(M \leqq \vert X\vert)$	(140)	$P(M \geqq U_1 + U_2)$	(141)	$P(M \leqq 2O)$
*(142)	$P(3C_1 = 2C_2)$	*(143)	$P(3(C_1 - 2) = 4C_2)$	**(144)	$P(3C_1 - 5C_2 = 1)$
*(145)	$E(H)$	*(146)	$V(H)$	(147)	$E(\vert U_1 - U_2\vert)$
(148)	$E(\vert U_1^2 - U_2^2\vert$	*(149)	$E(\vert U_1 - 2U_2\vert)$	(150)	$E(U_1\vert U_1 - U_2\vert)$
*(151)	$E(\vert U_1^m - U_2^m\vert)$	(152)	$E(U\vert U > x)$	(153)	$V(U\vert U > x)$
(154)	$aX_1 - bX_2 + c \sim$	*(155)	$E(\max(X_1^2, X_2^2))$	*(156)	$E(\min(X_1^2, X_2^2))$
*(157)	$E(\frac{\min(X_1^2,X_2^2)}{\max(X_1^2,X_2^2)})$	*(158)	$E(\frac{\max(X_1^2,X_2^2)}{\min(X_1^2,X_2^2)})$	**(159)	$E(\frac{\vert M_1-M_2\vert}{M_1+M_2})$
**(160)	$E(\frac{\min(M_1,M_2)}{M_1+M_2})$	**(161)	$E(\frac{\max(M_1,M_2)}{M_1+M_2})$	(162)	$P(C \geqq M)$
(163)	$E(\frac{M_1}{M_1+M_2+M_3})$	(164)	$V(\frac{M_1}{M_1+M_2+M_3})$	(165)	$E((\frac{M_1}{M_1+M_2+M_3})^n)$
(166)	$E(\max(B - 1, 0))$	*(167)	$E(\max(D - 1, 0))$	*(168)	$E(\max(D - 2, 0))$

(169)	$\max(U_1, \ldots, U_n)$ の分布関数	(170)	$\min(U_1, \ldots, U_n)$ の密度関数
(171)	$E(\max(U_1, \ldots, U_n))$	(172)	$E(\min(U_1, \ldots, U_n))$
(173)	$V(\max(U_1, \ldots, U_n))$	(174)	$V(\min(U_1, \ldots, U_n))$
(175)	$\lim_{n\to\infty} n(1 - \max(U_1, \ldots, U_n)) \sim$	(176)	$\lim_{n\to\infty} n\lambda \min(U_1, \ldots, U_n)) \sim$
(177)	$f_{U_{(i)}}(x)$	(178)	$E(U_{(i)})$
(179)	$V(U_{(i)})$	*(180)	$f_{(U_{(i)},U_{(j)})}(x, y) \quad (i < j)$
*(181)	$Cov(U_{(i)}, U_{(j)})$	*(182)	$f_{U_{(n)}-U_{(1)}}(x)$
(183)	$E(U_{(n)} - U_{(1)})$	*(184)	$V(U_{(n)} - U_{(1)})$
**(185)	$E((U_{(n)} - U_{(1)})^m)$	*(186)	$f_{\max(\min(U_1,U_2),\min(U_2,U_3),\min(U_3,U_1))}(x)$
(187)	$E(U_{(n)}U_{(1)})$	*(188)	$f_{\min(\max(U_1,U_2),\max(U_2,U_3),\max(U_3,U_1))}(x)$
(189)	$P(X \geqq x) = P(Y \leqq x)$ となる x	**(190)	$\lim_{b\to\infty} b\beta(a, b) \sim$
**(191)	$\mathrm{Cov}(\max(C_1, C_2), \min(C_1, C_2))$	(192)*	$P(D_1 = k\vert D_1 + D_2 = N)$
*(193)	$E(U_1^l U_2^m (1 - U_1 - U_2)^n\vert U_1 + U_2 < 1)$	(194)	$f_{(2X_1+X_2,X_1+X_2)}(x, y)$
(195)	$f_{(2X_1+X_2+3,X_1+X_2-1)}(x, y)$	(196)	$B_1 + B_2 + B_3$の標準化
(197)	$D_1 + D_2$の標準化	(198)	K の標準化
(199)	$f_{\cos \pi U}(x)$	(200)	$f_{\sin \frac{\pi}{2} U}(x)$
*(201)	$f_{\sin \pi U}(x)$	(202)	$f_{\tan \frac{\pi}{2} U}(x)$
*(203)	$f_{\tan 2\pi U}(x)$	(204)	$\min_{a,b} E((2X_1 + X_2 - (a + b(X_1 + 2X_2)))^2)$

**(205)	$f_{\sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2}}(x)$	(206)	$\min_{a,b} E((3M_1+2M_2-(a+b(M_1-M_2)))^2)$
(207)	$E(Z_t^2)$	(208)	$E(e^{\alpha Z_t})$
(209)	$E(Z_t^3)$	*(210)	$E(Z_t^4)$
(211)	$\mathrm{Cov}(Z_t, Z_s) \quad (s \leqq t)$	(212)	$V(Z_t+Z_s)$
(213)	$E(Z_5 \mid Z_3, Z_2, Z_1)$	(214)	$E(Z_5 \mid \xi_3, \xi_2, \xi_1)$
(215)	$E(Z_5 \mid \xi_4, \xi_2)$	(216)	$E((Z_t)^2 \mid \xi_s, \ldots, \xi_1) \quad (s \leqq t)$
(217)	$E((Z_t^{(p)})^2)$	(218)	$E(e^{\alpha Z_t^{(p)}})$
*(219)	$E((Z_t^{(p)})^3)$	*(220)	$E((Z_t^{(p)})^4)$
(221)	$\mathrm{Cov}(Z_t^{(p)}, Z_s^{(p)}) \quad (s \leqq t)$	(222)	$V(Z_t^{(p)}+Z_s^{(p)})$
(223)	$E(Z_5^{(p)} \mid Z_3^{(p)}, Z_2^{(p)}, Z_1^{(p)})$	(224)	$E(Z_5^{(p)} \mid \xi_3^{(p)}, \xi_2^{(p)}, \xi_1^{(p)})$
(225)	$E(Z_5 \mid \xi_4^{(p)}, \xi_2^{(p)})$	(226)	$E((Z_t)^2 \mid \xi_s^{(p)}, \ldots, \xi_1^{(p)}) \quad (s \leqq t)$
(227)	$E(N_t)$	(228)	$V(N_t)$
(229)	$E({N_t}^2)$	(230)	$E(N_t(N_t-1)(N_t-2))$
(231)	$E(e^{\alpha N_t})$	(232)	$E(N_s N_t) \quad (0 \leqq s \leqq t)$
(233)	$E(e^{\alpha N_s + \beta N_t})$	(234)	$Cov(N_s,\, N_t)$
(235)	$P(N_t = k \mid N_s = l)$	(236)	$E(N_t \mid N_s)$
*(237)	$P(N_s = k \mid N_t = l)$	*(238)	$E(N_s \mid N_t)$
(239)	$V(N_t \mid N_s)$	*(240)	$V(N_s \mid N_t)$
(241)	$E(W_t)$	(242)	$E({W_t}^2)$
(243)	$V(W_t)$	(244)	$E({W_t}^3)$
(245)	$E({W_t}^4)$	(246)	$E(e^{\alpha W_t})$
(247)	$E(e^{\alpha {W_t}^2})$	(248)	$E(W_t W_s) \quad (0 \leqq s \leqq t)$
(249)	$E(e^{\alpha W_s + \beta W_t})$	(250)	$\mathrm{Cov}(W_s, W_t)$
(251)	$\alpha W_s + \beta W_t \sim$	(252)	$f_{W_t \mid W_s}(y \mid x) = \dfrac{f_{(W_s, W_t)}(x,y)}{f_{W_s}(x)}$
(253)	$E(W_t \mid W_s)$	*(254)	$f_{W_s \mid W_t}(x \mid y)$
*(255)	$E(W_s \mid W_t)$	(256)	$V(W_t \mid W_s)$
*(257)	$V(W_s \mid W_t)$	*(258)	$P(W_s > 0, W_t > 0)$
*(259)	$E(W_t \mid W_s > 0)$	*(260)	$E(W_s \mid W_t > 0)$
**(261)	$E(W_s \mid 2W_s + W_t = x)$	**(262)	$V(W_s \mid 2W_s + W_t = x)$
**(263)	$E(W_s + 3W_t \mid 2W_s + W_t = x)$	**(264)	$V(W_s + 3W_t \mid 2W_s + W_t = x)$
(265)	$f_{e^{W_t}}(x)$	(266)	$f_{W_t^3}(x)$
(267)	$f_{W_t^2}(x)$	(268)	$f_{(W_s,\, W_t - W_s)}(x,y)$
(269)	$f_{(W_s, W_t)}(x,y)$	*(270)	$f_{(W_s,\, 2W_s + W_t)}(x,y)$
*(271)	$f_{(W_s + 3W_t,\, 2W_s + W_t)}(x,y)$	*(272)	$E(e^{\alpha(W_s+3W_t)+\beta(2W_s+W_t)})$
(273)	$\mathrm{Cov}(W_s + 3W_t, 2W_s + W_t)$	*(274)	$\mathrm{Cov}((W_s+3W_t)^2,\, (2W_s+W_t)^2)$
(275)	$f_{(\frac{M_1}{M_1+M_2},\, M_1+M_2)}(x,y)$	(276)	$f_{(\frac{O_1}{O_1+O_2},,\, O_1+O_2)}(x,y)$
(277)	$f_{(\frac{\lvert X_2 \rvert}{\lvert X_1 \rvert},\, \lvert X_1 \rvert)}(x,y)$	(278)	$f_{(\sqrt{X_1^2+X_2^2},\, \tan^{-1}\frac{\lvert X_2 \rvert}{\lvert X_1 \rvert})}(x,y)$
*(279)	$P(U_1^2+U_2^2+U_3^2+U_4^2<1)$	*(280)	$P(U_1+U_2^2+U_3^2+U_4^2<1)$
*(281)	$P(U_1+U_2+U_3^2+U_4^2<1)$	*(282)	$P(U_1+U_2+U_3+U_4^2<1)$
*(283)	$P(U_1+U_2+U_3+U_4<1)$	*(284)	$P(U_1^2+U_2^2+U_3^2+U_4^2+U_5^2<1)$
(285)	$L \sim$	(286)	$L + L' \sim$
(287)	$E(LL')$	(288)	$\mathrm{Cov}(L, L')$
*(289)	条件 $L' = k$ のもとで $L \sim$	*(290)	$E(L \mid L' = k)$
*(291)	$V(L \mid L' = k)$	*(292)	$R \sim$
*(293)	$R + R' \sim$	*(294)	$\mathrm{Cov}(R, R')$
**(295)	$R' = u(\in (0,1))$ のもとで $R \sim$	**(296)	$E(R \mid R' = u)$
**(297)	$V(R \mid R' = u)$	**(298)	$R + R' = u(\in (0,1))$ のもとで $R \sim$
(299)	$f_{(\max(M_1,M_2),\min(M_1,M_2))}(x,y)$	(300)	$\mathrm{Cov}(\max(M_1,M_2),\min(M_1,M_2))$

ヒントとコメント

* や　** がついているものは　計算に工夫を要したり少し複雑なものや、やや発展的な知識が必要な問題である。1 回目はそれらを飛ばし、慣れてきたらチャレンジして見よう。

k は　非負整数（ただし, (43) では自然数, (37), (110), (111) では整数, (81) では $0 \leqq k \leqq N$).(3) では $N \geqq 3$ とする。(14) は e^x と e^{-x} のテーラー展開を思い出す。(15), (16) は $C_2 = k$ で場合わけする（排反事象に分ける）が、(15) と (16) の違いに注意。(27)-(30) は確率母関数 $E(\frac{1}{X+n}) = \int_0^1 E(t^{X+n-1})dt$ を用いても良いし、普通にやってもできる。(31)-(33), (91)-(93) は基本。(34)-(41), (94)-(101) は $\max, \min$, 絶対値 の関係 $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y,\ \max(x, y) - \min(x, y) = |x - y|$ をうまく使うと少し簡単になる。(42) の λ は自然数とする。(49), (50) は $P(C \geqq k)$ を用いるのが定石。(58)-(60), (163)-(165) は ベータ分布 (ガンマ分布との関連）を用いる。(58), (163) は分布を指定しなくとも一般論でも求められる。(63) はガンマ関数を用いる。(64)-(66) はシミュレーション (逆関数法) の基本である。(70) は (69) と (82) を比較すればわかる。$f_X(x)$ は X の確率密度関数で、(74)-(78), (83)-(88) は確率変数の変換を用いる。((89) は M_1 のほうから積分するか、同じことであるが $M_2 =$ で条件つけて計算する。(90) は補集合のほうが簡単。(102)-(103) は普通に計算してもできるが指数分布の無記憶性を使うことも可能。(104)-(107) は定義どおり計算する。(108)-(109) はパラメータが 2 なので具体的な計算が難しくない。(110)-(111) は　k が負の場合も注意する。(121)-(128), (147)-(151) は 2 つの独立な一様分布は 2 次元正方形の内部の一様分布を用いてまず分布関数を求めるのが簡明。(129) はまず分布関数を極座標で計算。(131) は対称性。(132)-(135), (155)-(158) は極座標が定石であろう。(136) は　ガウス記号（$[x]$=x を超えない最大整数) より $P([M] = k)$ が計算できる。　(137) は F は分布関数でまず (X_1, X_2) の部分は極座標で計算。(139)-(141) は $P(M > x) = e^{-x}$ を用いる。(142)-(145) は倍数の関係などの初等整数論の関係に注意。(159)-(161) は　2 重積分で書いた後、変数変換 (この場合は 1 次変換) を用いる。　(166)-(168) は $E(B), E(D)$ と比較する。(175)-(176) は分布関数の極限を計算する。(177)-(188) は順序統計量の問題でベータ分布、多次元ベータ分布との関係に注意。(182)-(185) は範囲と呼ばれる確率変数の問題である。(186),(188) はある順序統計量と一致する。(190) はまず $b\beta(a, b)$ の密度関数を計算する。(191) は同時分布を求めるかまたは $\max, \min$ の関係を用いる。　(192) は定義と負の 2 項分布の再生性。(193), (279)-(284) は多次元ベータ関数。　(194)-(195) は 2 次元正規分布,　また変数変換を用いてもよい。(199)-(202) は分布関数をまず求めるが、(200),(202) 1 対 1 でないことに注意。(204), (206) は最小 2 乗法。　(205) は 3 次元極座標。　(207),(217) は分散との関係。　(208), (218) はモーメント母関数の積。(209) は対称性。　(210), (219), (220) は 3 乗, 4 乗の展開。(211), (221) は独立増分性。　(212), (222) は基本公式。(213) と (214), (223) と (224) は実質的に同じ問題。(214)-(216), (224)-226) は条件付期待値の基本的性質 (独立性との関連など）を用いる。　(227)-(231) はポアソン分布。(232)-(236),(239) はポアソン分布と独立増分性。(237),(238), (240) は定義とポアソン分布の性質。(241)-(247) は正規分布。(248)-(251),(252), (253), (256),(268), (271)-(274) は正規分布と独立増分性。(254),(255), (257), は定義と 2 次元正規分布。(258)-(260) は解説の復習。(261)-(264), (269)-(273) は 2 次元正規分布。(265)-(267) は変数変換。(275)-(278) は 2 次元確率変数の変数変換。とくに (278) はモデリングテキストのボックス・マーラー変換による標準正規分布の生成。(277), (278) は　まず $(|X_1|, |X_2|)$ の同時分布を求めてから変換すると良い。(285)-(288) は解説の復習。(289)-(290) は定義と 2 項分布との関係。(292)-(293) は周辺分布とベータ分布との関連。(294) は普通に計算しても難しくはない。(295)-(298) は条件付分布とベータ分布との関連、ただし、少しベータ分布を変形させることが必要。(299) は 2 次元分布関数を求めるのが良いだろう。(300) は (299) を用いてもできるし、max と min の関係を用いても良い。

第 8 章

練習問題・演習問題解答

8.1　第 1 章練習問題解答

■練習問題 1.1　$(1)\bar{x}=1,\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=\frac{n+1}{2},s_x^2=\overline{x^2}-(\bar{x})^2=0,s_y^2=\overline{y^2}-(\bar{y})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i^2-(\frac{n+1}{2})^2=\frac{1}{12}(n+1)(n-1)s_{xy}=\overline{xy}-\bar{x}\bar{y}=\bar{y}-\bar{y}=0,r_{xy}=$ 定義できない

$(2)\bar{x}=1,s_x^2=0,\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6},s_{xy}=0,r_{xy}=$ 定義できない, s_y^2 は (3) 参照

$(3)\bar{x}=\frac{n+1}{2},s_x^2=\overline{x^2}-(\bar{x})^2=\frac{1}{12}(n+1)(n-1),\bar{y}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6},\overline{y^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i^4,$

[*1] $\therefore s_y^2=\overline{y^2}-(\bar{y})^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{30}(3n^2+3n-1)-(\frac{(n+1)(2n+1)}{6})^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{180}(8n+11)(n-1)$

$s_{xy}=\overline{xy}-\bar{x}\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i^3-\frac{n+1}{2}\frac{(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)^2}{4}-\frac{(n+1)^2(2n+1)}{12}=\frac{(n+1)^2}{12}(n-1)$

$\therefore r_{xy}=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}=\frac{\frac{(n+1)^2}{12}(n-1)}{\sqrt{\frac{1}{12}(n+1)(n-1)}\sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{180}(8n+1)(n-1)}}=\frac{(n+1)\sqrt{15}}{\sqrt{(2n+1)(8n+11)}}$

$(4)\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^i=\frac{1}{n}\frac{2-2^{n+1}}{n},\bar{y}=\frac{3(3^n-1)}{2n},\overline{xy}=\frac{6(6^n-1)}{5n},\overline{x^2}=\frac{4(4^n-1)}{3n},\overline{y^2}=\frac{9(9^n-1)}{8n}\therefore s_x^2=\overline{x^2}-(\bar{x})^2=\frac{4(4^n-1)}{3n}-(\frac{2(2^n-1)}{n})^2,s_y^2=\overline{y^2}-(\bar{y})^2=\frac{9(9^n-1)}{8n}-(\frac{3(3^n-1)}{2n})^2,s_{xy}=\overline{xy}-\bar{x}\bar{y},$ また、$r_{xy}=\frac{s_{xy}}{s_x}s_y$

■練習問題 1.2　$(1)\bar{x}=3,\ \bar{y}=1.6764664,\ (s_x)^2=2,\ (s_y)^2=0.1894605,\ s_{xy}=0.6115844,\ r_{xy}=0.9935326$

$(2)\bar{x}=15.166666,\ \bar{y}=1.8053035,\ (s_x)^2=149.13891,\ (s_y)^2=0.2408793,\ s_{xy}=5.674335,\ r_{xy}=0.9467162$

■練習問題 1.3　$\hat{\beta}=\frac{s_{xy}}{s_x^2}=\frac{\frac{1}{12}(n+1)^2(n-1)}{\frac{1}{12}(n+1)(n-1)}=n+1$

$\hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)-(n+1)\frac{n+1}{2}=-\frac{1}{6}(n+1)(n+2)$

$\sum_{i=1}^{n}e_i=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i=0$ (一般的に成立、計算しても良い)

全変動 $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=n(s_y)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)(8n+1)(n-1)}{180}$

R^2(決定係数) $=(r_{xy})^2=\frac{15(n+1)}{(2n+1)(8n+1)}$

残差変動 $=\sum_{i=1}^{n}e_i^2=$ 全変動−回帰変動 $=(1-R^2)$ 全変動 $=(1-\frac{15(n+1)}{(2n+1)(8n+1)})\times\frac{n(n+1)(2n+1)(8n+1)(n-1)}{180}=\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{180}$ (もちろん $\sum_{i=1}^{n}e_i^2$ を計算しても良いが、少し面倒)

[*1] 数列の $\sum$ の復習 $\sum_{i=1}^{n}1=n,\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{,}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6},\sum_{i=1}^{n}i^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$は常識の範囲
後は、$\sum_{i=1}^{n}(i+2)(i+1)i=\sum_{i=1}^{n}\frac{(i+3)(i+2)(i+1)i-(i+2)(i+1)i(i-1)}{4}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4}$
同様に、$\sum_{i=1}^{n}i(i+1)=\frac{(n+2)(n+1)n}{3}$等も理解しておくと良い
$\sum_{i=1}^{n}i^4$の計算は以下の通り、$\sum_{i=1}^{n}(i+2)(i+1)i(i-1)=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)}{5},\sum_{i=1}^{n}(i+1)i(i-1)(i-2)=\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{5},\sum_{i=1}^{n}(i+2+i-2)(i+1)i(i-1)=\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{5}(n+3+n-2),$
$\therefore\sum_{i=1}^{n}i^4=\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{10}(2n+1)+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{30}(3(n+2)(n-1)+5)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{30}(3n^2+3n-1)$

■練習問題 1.4　$s_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{10}{5} - (\frac{3}{5})^2 = \frac{41}{25}, s_y^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = \frac{20}{5} - (\frac{5}{5})^2 = 4 - 1 = 3$

$s_{xy} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y} = \frac{13}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{5} = 2, \quad \therefore\ r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{2}{\sqrt{\frac{41}{25}}\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{123}} \quad \therefore\ R^2 = r_{xy}^2 = \frac{100}{123}$

$\hat{\beta} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{2}{\frac{41}{25}} = \frac{50}{41}, \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = 1 - \frac{50}{41} \cdot \frac{3}{5} = \frac{11}{41},\ \sum e_i = \sum x_i e_i = 0$

■練習問題 1.5　$\begin{pmatrix} 1 & \overline{x_1} & \overline{x_2} \\ \overline{x_1} & \overline{x_1^2} & \overline{x_1 x_2} \\ \overline{x_2} & \overline{x_1 x_2} & \overline{x_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \overline{x_1 y} \\ \overline{x_2 y} \end{pmatrix}$　(正規方程式) より、

$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{10}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{15}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{5} \\ \frac{13}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$　(注意、これを解いて $\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ を求めればよい)

■練習問題 1.6　$\hat{\beta} \sim N(\beta, \frac{\sigma^2}{n(s_x)^2}) = N(\beta, \frac{3}{5\frac{41}{25}})$,　また、$\hat{\beta}$の実現値 $= \frac{50}{41}$

$\hat{\alpha} \sim N(\alpha, \sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x})^2}{n(s_x)^2})) = N(\alpha, 3(\frac{1}{5} + \frac{(\frac{3}{5})^2}{5\frac{41}{25}}))$,　また、$\hat{\alpha}$の実現値 $= \frac{11}{41}$

$\widehat{\sigma^2} \sim \frac{\sigma^2}{n-2}\chi_{n-2}^2 = \frac{3}{3}\chi_3^2$　(χ_3^2は自由度 3 のχ^2分布)

■練習問題 1.7　$\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sqrt{\widehat{\sigma^2}(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n(s_x)^2})}} = t_{5-2} = t_3 =$ 自由度 3 の t 分布

ここで、$\hat{\alpha}$の実現値 $= \frac{11}{41}, \widehat{\sigma^2}$の実現値 $= \frac{1}{n-2}$残差変動 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{23}{123} \cdot 15, n = 5, \bar{x} = \frac{3}{5}, n(s_x)^2 = 5 \cdot \frac{41}{25}$

$\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n(s_x)^2}}} = t_{5-2} = t_3, \hat{\beta} = \frac{50}{41}$

■練習問題 1.8　(1)$Cov(\varepsilon_i, \hat{\alpha} - \alpha) = Cov(\varepsilon_i, \sum_{i=1}^n (\frac{1}{n} - (c_i\bar{x})\varepsilon_i) = (\frac{1}{n} - c_i\bar{x})Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = \sigma^2(\frac{1}{n} - c_i\bar{x})$

(2)$Cov(\varepsilon_i, \hat{\beta} - \beta) = Cov(\varepsilon_i, \sum_{i=1}^n c_j\varepsilon_j) = c_i Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = \sigma^2 c_i$

(3)$Cov(\hat{\alpha} - \alpha, \hat{\beta} - \beta) = Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = -\frac{\sigma^2\bar{x}}{n(s_x)^2}$

(4)$V(e_i) = V(\varepsilon_i = (\hat{\alpha} - \alpha) - (\hat{\beta} - \beta)x_i)$

$= V(\varepsilon_i) + V(\hat{\alpha} - \alpha) + x_i^2 V(\hat{\beta} - \beta) - 2Cov(\varepsilon_i, \hat{\alpha} - \alpha) - 2x_i Cov(\varepsilon_i, \hat{\beta} - \beta) + 2Cov(\hat{\alpha} - \alpha, \hat{\beta} - \beta)$

$\therefore V(e_i) = \sigma^2 + \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x})^2}{n(s_x)^2}\right) + x_i^2\frac{\sigma^2}{n(s_x)^2} - 2\sigma^2(\frac{1}{n} - c_i\bar{x}) - 2x_i\sigma^2 c_i + 2x_i\frac{\sigma^2\bar{x}}{x(s_x)^2}$

$= \sigma^2(1 - \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n(s_x)^2} + 2c_i\bar{x} - 2c_i x_i)$

(5)$\sum_{i=1}^n V(e_i) = \sigma^2(n - 1 + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n(s_x)^2} + 2\bar{x}\sum_{i=1}^n c_i - 2\sum_{i=1}^n c_i x_i)$

$= \sigma^2(n - 1 + 1 + 0 - 2) = \sigma^2(n - 2)$

$$\therefore \quad E(\hat{\sigma^2}) = \frac{1}{n-2}E(\sum_{i=1}^n e_i^2) = \frac{1}{n-2}(n-2)\sigma^2 = \sigma^2$$

■練習問題 1.9　(1)$\bar{x} = 63.4,\ \bar{y} = 64.7,\ s_x = \sqrt{(s_x)^2} = \sqrt{460.64} = 21.462525,\ (s_y)^2 = \sqrt{(s_y)^2} = \sqrt{410.81} = 20.268448,\ s_{xy} = 325.12,\ r_{xy} = 0.747382$

(2)$\hat{\beta} = 0.7058006,\ \hat{\alpha} = 19.952242$ より、$y = 19.952242 + 0.7058006x$ と線形回帰できる

(3) 全変動 $= 4108.1$, 残差変動 $= 1813.3983$, 回帰変動 $= 2294.7016, R^2 = 0.5585798$ (4)$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-2}(1 - r_{xy}^2)(ns_y^2) = 226.67478$ より

αの信頼区間　$-7.665132 \leq \alpha \leq 47.569616$

βの信頼区間　$0.2931967 \leq \beta \leq 1.1184045$

(5)$t = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\frac{\sqrt{\widehat{\sigma^2}}}{ns_x^2}} = 3.1817169 \geq 2.896 = t_8(0.01)$ より、帰無仮説は棄却される

(6)$d = 1$ (前半の 5 人), 0 (後半の 5 人) とダミー変数を導入すると、

$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 63.4 \\ 0.5 & 0.5 & 31.4 \\ 63.4 & 31.4 & 4480.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64.2 \\ 31.9 \\ 4427.1 \end{pmatrix}$　となる。

(7) 予測点数は、$19.952242 + 0.7058006 \cdot 50 = 55.242272$
また、信頼度 90 %での信頼区間は、$(25.355936, 85.128608)$ となる。

■練習問題 1.10　$P(\chi_{n-2} > \chi^2_{n-2}(\epsilon/2)) = \epsilon/2$, $P(\chi_{n-2} > \chi^2_{n-2}(1-\epsilon/2)) = 1-\epsilon/2$ を用いて、$P(\chi^2_{n-2}(1-\epsilon/2) < \dfrac{(n-2)\hat{\sigma^2}}{\sigma^2} < \chi^2_{n-2}(\epsilon/2)) = 1-\epsilon$ より、求める信頼度 $1-\epsilon$ の σ^2 の信頼区間は

$$\frac{(n-2)\hat{\sigma^2}}{\chi^2_{n-2}(\epsilon/2)} < \sigma^2 < \frac{(n-2)\hat{\sigma^2}}{\chi^2_{n-2}(1-\epsilon/2)}$$

■練習問題 1.11　y の x に対する回帰式は $\dfrac{y-\bar{y}}{s_y} = r_{xy}\dfrac{x-\bar{x}}{s_x}$、$x$ の y に対する回帰式は $\dfrac{x-\bar{x}}{s_x} = r_{xy}\dfrac{y-\bar{y}}{s_y}$ より、

$r^2_{xy} = 1.5/3 = 1/2 \quad \therefore r_{xy} = 1/\sqrt{2}.\ \dfrac{s_y}{s_x} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$
回帰直線は　$(\bar{x}, \bar{y})$ を通ることより、$(\bar{x}, \bar{y}) = (14/3, 11)$

■練習問題 1.12　$\bar{x} = 5,\ s^2_x = 30 - 5^2 = 5,\ \bar{y} = 14,\ s^2_y = 246 - 14^2 = 50,\ s_{xy} = 83 - 5 * 14 = 13,$
$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{13}{5\sqrt{10}}$
$\frac{y-14}{\sqrt{50}} = \frac{13}{5\sqrt{10}}\frac{x-5}{\sqrt{5}}$ より $y = \frac{13}{5}x + 1$, $R^2 = (r_{xy})^2 = 169/250$, $\hat{\beta} - \beta \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n*s^2_x}) = N(0, 5/8)$,
$\therefore \frac{13}{5} - 1.96\sqrt{5/8} \leqq \beta \leqq \frac{13}{5} - 1.96\sqrt{5/8}$

■練習問題 1.13　回帰直線が　$(\bar{x}, \bar{y})$ を通ることより、　$(a, b) = (-1, 1/2)$
$\frac{r_{xy}s_y}{s_x}\frac{r_{xy}s_x}{s_y} = 3 * 1/4$ より、　$r_{xy} = \sqrt{3}/2$

■練習問題 1.14　$\bar{x'} = 2\bar{x} + 1,\ r_{x'y} = r_{xy},\ s_{x'} = 2s_x$ より、求める回帰直線は　$y = 3x' - 2$
$(\bar{x}, \bar{y}) = (17/2, 52),\ r_{xy} = \sqrt{3}/2,\ s^2_y = \frac{6^2 s^2_x}{r^2_{xy}} = 48\ R^2 = 0.75$, 回帰変動 $= \hat{\beta}^2 n s^2_x = 36 * 10 = 360$, 残差変動 = 全変動 − 回帰変動 $= 48 * 10 - 360 = 120$

■ 練習問題 1.15　$\bar{x} = 0,\ s^2_x = 2,\ \bar{y} = 0,\ s^2_y = 2,\ s_{xy} = -1.8,\ r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = -0.9$
$\frac{y-0}{\sqrt{2}} = (-0.9)\frac{x-0}{\sqrt{2}}$ より $y = (-0.9)x$, $R^2 = (r_{xy})^2 = 0.81$, 残差変動 = 全変動 $(1 - R^2) = 5 * 2 * (1 - 0.81) = 1.9$,　$\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma^2}}{n*s^2_x}}}) \sim t_3$ で $\hat{\sigma^2} = \frac{\text{残差変動}}{n-2} = \frac{1.9}{3}$, $\therefore -0.9 - 3.18\sqrt{\frac{1.9}{30}} \leqq \beta \leqq -0.9 + 3.18\sqrt{\frac{1.9}{30}}$
(参考　$H_0 : \beta = 0,\ H_1 : \beta \neq 0$ の検定も練習しておくとよい。)
正規方程式は、

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{x} & \bar{x^2} \\ \bar{x} & \bar{x^2} & \bar{x^3} \\ \bar{x^2} & \bar{x^3} & \bar{x^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{34}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{xy} \\ \bar{x^2 y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-9}{5} \\ \frac{-3}{5} \end{pmatrix}$$

これを解いて $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = (\frac{3}{7}, \frac{-9}{10}, \frac{-3}{14})$

8.2　第 2 章練習問題解答

■練習問題 2.1　(1)$E(Y_t)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i E(\varepsilon_{t-i})=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\mu=2\mu$

$$h\geq 0 \text{ として、}\quad \gamma_h=\mathrm{Cov}(Y_t,Y_{t-h})=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^j\mathrm{Cov}(\varepsilon_{t-i},\varepsilon_{t-h-j})$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{j+h}\left(\frac{1}{2}\right)^j\sigma^2=\sigma^2\left(\frac{1}{2}\right)^h\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^h\sigma^2$$

とくに、$\gamma_0=\frac{4}{3}\sigma^2\quad\therefore\hat{\rho_h}=\frac{\gamma_h}{\gamma_0}=\left(\frac{1}{2}\right)^h$

(2)$E(Y_t)=\sum_{i=0}^{\infty}a^iE(\varepsilon_{t-i})=\frac{\lambda}{1-a}$

$$h\geq 0 \text{ として、}\quad \gamma_h=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a^ia^j\mathrm{Cov}(\varepsilon_{t-i},\varepsilon_{t-h-j})=\sum_{j=0}^{\infty}a^{h+j}a^j\lambda=\frac{a^h}{1-a^2}\lambda$$

$\gamma_0=\frac{\lambda}{1-a^2}\quad\therefore\rho_h=\frac{\gamma_h}{\gamma_0}=a^h$
(3)$E(Y_t)=\frac{1-p}{p}\frac{1}{1-a},\quad \gamma_h=\frac{1-p}{p^2}\frac{a^h}{1-a^2},\quad \gamma_0=\frac{1-p}{p^2}\frac{1}{1-a^2},\quad \rho_h=a^h$
(4)$E(Y_t)=np\frac{1}{1-a},\quad \gamma_h=np(1-p)\frac{a^h}{1-a^2},\quad \gamma_0=np(1-p)\frac{1}{1-a^2},\quad \rho_h=a^h$
(5)$E(Y_t)=\cos(t\lambda)E(A)+\sin(t\lambda)E(B)=0$

$$\gamma_h=\mathrm{Cov}(Y_t,Y_{t-h})=E(A^2)\cos(t\lambda)\cos((t-h)\lambda)+E(B^2)\sin(t\lambda)\sin((t-h)\lambda)=\sigma^2\cos(\lambda h)$$

$\gamma_0=\sigma^2\quad\therefore\rho_h=\cos(\lambda h)$
(6)$Y_t=\cos(A-Bt)=\cos A\cos(Bt)+\sin A\sin(Bt)$
$\therefore E(Y_t)=E(\cos A)E(\cos Bt)+E(\sin A)E(\sin Bt)=0$
($\because E(\cos A)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\,dx=0,$　同様に $E(\sin A)=0$)

$$\gamma_h=\mathrm{Cov}(Y_t,Y_{t-h})=E(Y_tY_{t-h})-E(Y_t)E(Y_{t-h})=E(\cos(A-Bt)\cos(A-B(t-h)))$$
$$=\frac{1}{2}E(\cos(2A-(2t-h)B)+\cos(Bh))=\frac{1}{2}0+\frac{1}{2}\times\frac{\sin 2\pi h}{2\pi h}$$
$$=\frac{\sin 2\pi h}{4\pi h}\qquad\left(\because\cos(Bh)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(xh)\,dx=\frac{\sin 2\pi h}{2\pi h}\right)$$

$\gamma_0=\lim_{h\to 0}\gamma_h=\frac{1}{2}\quad\therefore\ \rho_h=\frac{\sin 2\pi h}{2\pi h}$
(7)$E(Y_t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i+1}E(\varepsilon_{t-i}-1)=0,\quad \gamma_0=V(Y_t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(i+1)^2}V(\varepsilon_{t-i})=V\left(\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}=2\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{3}$
$\gamma_1=\mathrm{Cov}(Y_t,Y_{t-1})=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{i+1}\frac{1}{j+1}\mathrm{Cov}(\varepsilon_{t-i},\varepsilon_{t-1-j})=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j+1}\frac{1}{j}\times 2=2\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)\right)=2$
$\gamma_2=\mathrm{Cov}(Y_t,Y_{t-2})=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j+2}\frac{1}{j}\times 2=2\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+2}\right)\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

■練習問題 2.2　$\bar{x}=\frac{n+1}{2},\ \gamma_1=\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(i-\bar{x})(i-1-\bar{x})=\dfrac{1}{n}(\sum_{i=2}^{n}i(i-1)-\bar{x}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)+\bar{x}^2)=\dfrac{1}{n}(\dfrac{(n+1)n(n-1)}{3}-\bar{x}\dfrac{(2n-1+3)(n-1)}{2}+\bar{x}^2(n-1))=\dfrac{(n-1)(n-3)(n+1)}{12n}$

■練習問題 2.3　$\rho_h=\frac{\gamma_h}{\gamma_0}=\phi_1^h$ より、$\phi_1=\frac{-1}{4},\rho_h=(\frac{-1}{4})^h$

■練習問題 2.4　$E(Y_t) = 3 + \frac{5}{6}E(X_{t-1}) - \frac{1}{6}E(X_{t-2}) + E(\varepsilon_t)$
$\mu = 3 + \frac{5}{6}\mu - \frac{1}{6}\mu \quad \therefore \mu = 9$

$$\therefore Y_t - 9 = \frac{5}{6}(Y_t - 9) - \frac{1}{6}(Y_{t-2} - 9) + \varepsilon_t$$

$Y_t - 9$ を乗じて、期待値をとれば　$\gamma_0 = \frac{5}{6}\gamma_1 - \frac{1}{6}\gamma_2 + \sigma^2$
$Y_{t-1} - 9$ を乗じて、期待値をとれば　$\gamma_1 = \frac{5}{6}\gamma_0 - \frac{1}{6}\gamma_1$
$Y_{t-2} - 9$ を乗じて、期待値をとれば　$\gamma_2 = \frac{5}{6}\gamma_1 - \frac{1}{6}\gamma_0$
$\sigma^2 = \frac{10}{3}$ と合わせてこれらを解いて、　$\gamma_0 = 7, \quad \gamma_1 = 5, \quad \gamma_2 = 3$
また、$n{\geq}2$ では、$\gamma_n = \frac{5}{6}\gamma_{n-1} - \frac{1}{6}\gamma_{n-2}$　特性方程式は、$t^2 - \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 0$ より特性解は $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$
$\gamma_n = C(\frac{1}{2})^n + D(\frac{1}{3})^n$ とおき、$\gamma_0 = 7,\ \gamma_1 = 5$ より、　$\gamma_n = 16(\frac{1}{2})^n - 9(\frac{1}{3})^n \quad (n{\geq}0)$
$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{5}{7}, \quad \rho_2 = \frac{3}{7}, \quad \rho_n = \frac{16(\frac{1}{2})^n - 9(\frac{1}{3})^n}{7}$

■練習問題 2.5　(1)$1 = 0.6x + 0.3x^2$ の解は $-1{\pm}\frac{\sqrt{39}}{3}$ で $\left|-1{\pm}\frac{\sqrt{39}}{3}\right| > 1$ より定常
(2)$\mu = 1 + 0.6\mu + 0.3\mu$ より $\mu = 10$
(3) ユールウォーカー方程式は、

$\gamma_0 = 0.6\gamma_1 + 0.3\gamma_2 + 1$
$\gamma_1 = 0.6\gamma_0 + 0.3\gamma_1$
$\gamma_2 = 0.6\gamma_1 + 0.3\gamma_0$

これを解いて、$(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) = \left(\frac{700}{169}, \frac{600}{169}, \frac{570}{169}\right)$

■練習問題 2.6　ユールウォーカー方程式より、

$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \sigma^2 \quad \therefore 0.6 = \phi_1 0.3 + \sigma^2$
$\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 \quad \therefore 0.3 = \phi_1 0.6 \quad \therefore (\phi_1, \sigma^2) = (0.5, 0.45)$

また、$\mu = \phi_0 + \phi_1\mu$ より、$2.0 = \phi_0 + 0.5{\times}2.0 \quad \therefore \phi_0 = 1.0$

■練習問題 2.7　一般に $-1 < \phi_2 < 1$ で、$\phi_2 - 1 < \phi_1 < 1 - \phi_2$ より、$-0.7 < a < 0.7$

■練習問題 2.8　$AR(2)$ が定常性を持つ $\Longleftrightarrow 1 + 0.5 - a > 0 \cap 1 - 0.5 - a > 0 \cap a > -1 \therefore \ -1 < a < 0.5$

■練習問題 2.9　反転可能性：$|a| < 1$
識別可能性：$|a| \leqq 1$

■練習問題 2.10　$MA(2)$ が反転可能性をもつ $\Longleftrightarrow 1 - 2a > 0 \cap 1 > 0 \cap a > -1$
$\therefore$　反転可能性 : $-1 < a < \frac{1}{2}$
識別可能性 : $-1 \leqq a \leqq \frac{1}{2}$

■練習問題 2.11　$\mu = 3 \quad \gamma_0 = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{21}{16}$
$\gamma_1 = \sigma^2(-\theta_1 + \theta_1\theta_2) = 1{\times}(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}{\times}\frac{1}{4}) = -\frac{3}{8}, \quad \gamma_2 = \sigma^2(-\theta_2) = -\frac{1}{4}, \quad \gamma_3 = 0$

■練習問題 2.12　$\mu = 2$ は明らか。

$$\gamma_0 = V(Y_t) = (1 + 1/4 + 1/4)3^2 = 27/2$$

$$\gamma_1 = \mathrm{Cov}(2 + \varepsilon_{t+1} - \frac{\varepsilon_t}{2} - \frac{\varepsilon_{t-1}}{2}, 2 + \varepsilon_t - \frac{\varepsilon_{t-1}}{2} - \frac{\varepsilon_{t-2}}{2}) = (-1/2 + 1/4)\sigma^2 = -9/4$$

$$\gamma_2 = \mathrm{Cov}(2 + \varepsilon_{t+2} - \frac{\varepsilon_{t+1}}{2} - \frac{\varepsilon_t}{2}, 2 + \varepsilon_t - \frac{\varepsilon_{t-1}}{2} - \frac{\varepsilon_{t-2}}{2}) = (-1/2)\sigma^2 = -9/2$$

$$\gamma_3 = \mathrm{Cov}(2+\varepsilon_{t+3} - \frac{\varepsilon_{t+2}}{2} - \frac{\varepsilon_{t+1}}{2}, 2+\varepsilon_t - \frac{\varepsilon_{t-1}}{2} - \frac{\varepsilon_{t-2}}{2}) = 0$$

$Y_t \sim N(2, 27/2)$.

$$(Y_t, Y_{t+1}) \sim N(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}27/2 & -9/4\\ -9/4 & 27/2\end{pmatrix})$$

■練習問題 2.13　まず、$\mu = 10$ より　$X_t - 10 = 0.6(X_{t-1} - 10) + 0.3(X_{t-2} - 10) + \varepsilon_t$

$$X_{t-1} = 1 + 0.6X_{t-2} + 0.3X_{t-3} + \varepsilon_{t-1} \rightleftarrows X_{t-1} - 10 = 0.6(X_{t-2} - 10) + 0.3(X_{t-3} - 10) + \varepsilon_{t-1}$$
$$X_{t-2} = 1 + 0.6X_{t-3} + 0.3X_{t-4} + \varepsilon_{t-2} \rightleftarrows X_{t-2} - 10 = 0.6(X_{t-3} - 10) + 0.3(X_{t-4} - 10) + \varepsilon_{t-2}$$
$$X_{t-3} = 1 + 0.6X_{t-4} + 0.3X_{t-5} + \varepsilon_{t-2} \rightleftarrows X_{t-3} - 10 = 0.6(X_{t-4} - 10) + 0.3(X_{t-5} - 10) + \varepsilon_{t-3}$$

より、

$$\begin{aligned} X_t - 10 &= 0.6(0.6(X_{t-2} - 10) + 0.3(X_{t-3} - 10) + \varepsilon_{t-1}) + 0.3(0.6(X_{t-3} - 10) + 0.3(X_{t-4} - 10) + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_t \\ &= \varepsilon_t + 0.6\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2} + (0.6)^2(X_{t-2} - 10) + \cdots \\ &= \varepsilon_t + 0.6\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2} + (0.6)^2(0.6(X_{t-3} - 10) + 0.3(X_{t-4} - 10) + \varepsilon_{t-2}) + \cdots \\ &= \varepsilon_t + 0.6\varepsilon_{t-1} + (0.3 + (0.6)^2)\varepsilon_{t-2} + \cdots \end{aligned}$$

$$\therefore \xi_0 = 10, \quad \xi_1 = 0.6, \quad \xi_2 = 0.3 + (0.6)^2 = 0.66$$

■練習問題 2.14　$\mu = 2 + \frac{\mu}{2}$ より、　$\mu = 4$

$\mathrm{Cov}(Y_t, \varepsilon_t) = \mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_t) = V(\varepsilon_t) = 3^2$ より、　$V(Y_t - \varepsilon_t) = V(2 + \frac{1}{2}Y_{t-1} - \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1})$,　$\gamma_0 - 3^2 = \frac{\gamma_0}{4} - \frac{3^2}{3} + \frac{3^2}{9}$

$, \therefore \gamma_0 = \frac{28}{3}$

$h \geqq 2$ のとき、　$\gamma_h = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-h}) = \frac{\gamma_{h-1}}{2}$, また、$\gamma_1 = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \frac{\gamma_0}{2} - \frac{3^2}{3} = \frac{5}{3}$,

$\therefore \gamma_h = \frac{5}{3}(\frac{1}{2})^h \quad (h \geqq 1)$

■練習問題 2.15　$AR(1)$ は　マルコフ過程、$AR(2)$ は 2 重マルコフ過程。

■練習問題 2.16　$(1) S_t = S_{t-1} + \mu + \varepsilon_t, \quad S_0 = 0$ より

$S_t = \mu t + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$

$\therefore \quad E(S_t) = \mu t$

$\mathrm{Cov}(S_t, S_{t-h}) = \mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^t \varepsilon_i, \sum_{j=1}^{t-h} \varepsilon_j) = \mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^{t-h} \varepsilon_i, \sum_{i=1}^{t-h} \varepsilon_j) = V(\sum_{i=1}^{t-h} \varepsilon_i) = \sigma^2(t-h)$

$V(S_t) = \sigma^2 t$ より

$S_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$

$$(S_t, S_{t-h}) \sim N\left(\begin{pmatrix}\mu t\\ \mu(t-h)\end{pmatrix}, \sigma^2\begin{pmatrix}t & t-h\\ t-h & t-h\end{pmatrix}\right)$$

$(2) I_t = S_t - S_{t-1}$ とおくと

$I_t - I_{t-1} = \mu + \varepsilon_t, \quad I_0 = 0$

$\therefore \quad I_t = \mu t + \sum_{j=1}^t \varepsilon_j$

$\therefore \quad S_t = \sum_{i=1}^t I_i \quad (\because \ S_0 = 0) = \sum_{i=1}^t (\mu i + \sum_{j=1}^t \varepsilon_j) = \mu\frac{t(t+1)}{2} + \sum_{j=1}^t \sum_{i=j}^t \varepsilon_j = \mu\frac{t(t+1)}{2} + \sum_{j=1}^t (t - j + 1)\varepsilon_j$

$\therefore \quad E(S_t) = \frac{\mu t(t+1)}{2}$

$\therefore \quad V(S_t) = \sigma^2 \sum_{j=1}^t (t - j + 1)^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^t i^2 = \frac{t(t+1)(2t+1)}{6}\sigma^2$

$\therefore \quad S_t \sim N\left(\frac{\mu t(t+1)}{2}, \frac{t(t+1)(2t+1)}{6}\sigma^2\right)$

$\mathrm{Cov}(S_t, S_{t-h}) = \mathrm{Cov}(S_t - S_{t-h} + S_{t-h}, S_{t-h}) = V(S_{t-h}) = \frac{(t-h)(t-h+1)(2(t-h)+1)}{6}\sigma^2$

$(S_t, S_{t-h}){\sim}N\left(\frac{\mu}{2}\begin{pmatrix} t(t+1) \\ (t-h)(t-h+1)\end{pmatrix}, \frac{\sigma^2}{6}\begin{pmatrix} t(t+1)(2t+1) & (t-h)(t-h+1)(2(t-h)+1) \\ (t-h)(t-h+1)(2(t-h)+1) & (t-h)(t-h+1)(2(t-h)+1)\end{pmatrix}\right)$

(3)$\frac{S_t}{a^t} = \frac{S_{t-1}}{a^{t-1}} + \frac{\mu}{a^t} + \frac{\varepsilon_t}{a^t}$
$\frac{S_t}{a^t} = \sum_{i=1}^t \frac{\mu}{a^i} + \sum_{i=1}^t \frac{\varepsilon_i}{a^i}$
$\therefore \quad S_t = a^t \mu \frac{\frac{1}{a}-(\frac{1}{a})^{t+1}}{1-\frac{1}{a}} + \sum_{i=1}^t a^{t-i}\varepsilon_i = \mu\frac{a^t-1}{a-1} + \sum_{i=1}^t a^{t-i}a^{t-i}\varepsilon_i$
$\therefore \quad E(S_t) = \mu\frac{a^t-1}{a-1}, \quad V(S_t) = \sigma^2\sum_{i=1}^t a^{2(t-i)} = \sigma^2\frac{a^{2(t-1)}-a^{-2}}{1-a^{-2}} = \sigma^2\frac{a^{2t}-1}{a^2-1}$
$\mathrm{Cov}(S_t, S_{t-h}) = \mathrm{Cov}(S_t - S_{t-h} + S_{t-h}, S_{t-h}) = V(S_{t-h}) == \sigma^2\frac{a^{2(t-h)}-1}{a^2-1}$
$S_t \sim N(\mu\frac{a^t-1}{a-1}, \sigma^2\frac{a^{2t}-1}{a^2-1})$
$(S_t, S_{t+1}) \sim N(\binom{\mu\frac{a^t-1}{a-1}}{\mu\frac{a^t-1}{a-1}}, \frac{\sigma^2}{a^2-1}\begin{pmatrix} a^{2t}-1 & a^{2t-2}-1 \\ a^{2t-2}-1 & a^{2t}-1\end{pmatrix})$
(4)$S_t = S_{t-1} + \mu(t-1) + \varepsilon_t, \quad S_0 = 0$ より
$S_t = \mu\frac{t(t-1)}{2} + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$
$\therefore \quad E(S_t) = \mu\frac{t(t-1)}{2}$
$\mathrm{Cov}(S_t, S_{t-h}) = \mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^t \varepsilon_i, \sum_{j=1}^{t-h}\varepsilon_j) = \mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^{t-h}\varepsilon_i, \sum_{i=1}^{t-h}\varepsilon_j) = V(\sum_{i=1}^{t-h}\varepsilon_i) = (t-h)V(2Be(1/2) - 1) = t-h$
(5)$I_t = S_t - S_{t-1}$ とおくと
$I_t - I_{t-1} = \mu + \varepsilon_t, \quad I_0 = 0$
$\therefore \quad I_t = \mu t + \sum_{j=1}^t \varepsilon_j$
$\therefore \quad S_t = \sum_{i=1}^t I_i \quad (\because\ S_0 = 0) = \sum_{i=1}^t(\mu i + \sum_{j=1}^t \varepsilon_j) = \mu\frac{t(t+1)}{2} + \sum_{j=1}^t\sum_{i=j}^t \varepsilon_j = \mu\frac{t(t+1)}{2} + \sum_{j=1}^t (t - j+1)\varepsilon_j$
$\therefore \quad E(S_t) = \frac{\mu t(t+1)}{2}$
$\therefore \quad V(S_t) = \sum_{j=1}^t (t-j+1)^2 = \sigma^2\sum_{i=1}^t i^2 = \frac{t(t+1)(2t+1)}{6}$
$\mathrm{Cov}(S_t, S_{t-h}) = \mathrm{Cov}(S_t - S_{t-h} + S_{t-h}, S_{t-h}) = V(S_{t-h}) = \frac{(t-h)(t-h+1)(2(t-h)+1)}{6}$
(6) $\frac{S_t}{a^t} = \frac{S_{t-1}}{a^{t-1}} + \frac{\mu}{a^t} + \frac{\varepsilon_t}{a^t}$
$\frac{S_t}{a^t} = \sum_{i=1}^t \frac{\mu}{a^i} + \sum_{i=1}^t \frac{\varepsilon_i}{a^i}$
$\therefore \quad S_t = a^t \mu \frac{\frac{1}{a}-(\frac{1}{a})^{t+1}}{1-\frac{1}{a}} + \sum_{i=1}^t a^{t-i}\varepsilon_i = \mu\frac{a^t-1}{a-1} + \sum_{i=1}^t a^{t-i}a^{t-i}\varepsilon_i$
$\therefore \quad E(S_t) = \mu\frac{a^t-1}{a-1}, \quad V(S_t) = \sum_{i=1}^t a^{2(t-i)} = \sigma^2\frac{a^{2(t-1)}-a^{-2}}{1-a^{-2}} = \frac{a^{2t}-1}{a^2-1}, \ \mathrm{Cov}(S_t, S_{t-h}) = V(S_{t-h}) = \frac{a^{2(t-h)}-1}{a^2-1}$

■練習問題 2.17 $\mu = 6$ より、 $(1 - \frac{5}{6}L + \frac{1}{6}L^2)(Y_t - 6) = \varepsilon_t$ と変形され、 $Y_t - 6 = ((1 - \frac{1}{2}L)(1 - \frac{1}{3}L))^{-1}(\varepsilon_t) = (\frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2}L)^{-1} + \frac{-1}{2}(1 - \frac{1}{3}L)^{-1})(\varepsilon_t)$ (部分分数分解) $= \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{3}(\frac{1}{2}L)^i + \frac{-1}{2}(\frac{1}{3}L)^i)(\varepsilon_t)$

$$\therefore Y_t = 6 + \sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{3}\frac{1}{2^i} + \frac{-1}{2}\frac{1}{3^i})\varepsilon_{t-i}$$

■練習問題 2.18 $\mu = 3$ より、 $Y_t - 3 = \frac{1}{3}L(Y_t - 3) + \frac{-1}{4}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ と変形でき、$Y_t - 3 = (1 - \frac{1}{3}L)^{-1}(\frac{-1}{4}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{3}L)^i(\frac{-1}{4}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) = \frac{-1}{4}\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^i\varepsilon_{t-1-i} + \sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^i\varepsilon_{t-i} = \varepsilon_t + \frac{-1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^{i-1}\varepsilon_{t-1-i} + \sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^i\varepsilon_{t-i}$

$$\therefore Y_t = 3 + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4}\frac{1}{3^i}\varepsilon_{t-i}$$

■練習問題 2.19　$\hat{Y}_{T+1} = E(Y_{T+1}|Y_T = 2.7) = E(2 + \frac{1}{3}Y_T + \varepsilon_T|Y_T = 2.7) = 2 + \frac{1}{3}2.7 = 2.9$
$E((\hat{Y}_{T+1} - Y_{T+1})^2)|Y_T = 2.7) = E((\varepsilon_{T+1})^2) = 1/5$
$\hat{Y}_{T+2} = E(Y_{T+2}|Y_T = 2.7) = E(2+\frac{1}{3}Y_{T+1}+\varepsilon_{T+1}|Y_T = 2.7) = 2+\frac{1}{3}E(Y_{T+1}|Y_T = 2.7) = 2+\frac{1}{3}\hat{Y}_{T+1} = \frac{89}{30}$
$E((\hat{Y}_{T+2}-Y_{T+2})^2)|Y_T = 2.7) = E((2+\frac{1}{3}Y_{T+1}+\varepsilon_{T+2}-2-\frac{1}{3}\hat{Y}_{T+1})^2|Y_T = 2.7) = V(\frac{1}{3}\varepsilon_{T+1}+\varepsilon_{T+2}) = \frac{50}{9}$
$Y_{T+1} - \hat{Y}_{T+1} = \varepsilon_{T+1} \sim N(0, 1/5)$ より、信頼度 95% で　$2.9 - \frac{1.96}{\sqrt{5}} \leqq Y_{T+1} \leqq 2.9 + \frac{1.96}{\sqrt{5}}$
$Y_{T+2} - \hat{Y}_{T+2} = \varepsilon_{T+2} + \frac{1}{3}\varepsilon_{T+1} \sim N(0, 2/9)$ より、信頼度 95% で　$\frac{89}{30} - \frac{1.96\sqrt{2}}{3} \leqq Y_{T+2} \leqq \frac{89}{30} + \frac{1.96\sqrt{2}}{3}$

■練習問題 2.20　$\hat{Y}_{T+1} = E(Y_{T+1}|\varepsilon_T = 2/3,\ \varepsilon_{T-1} = 1/3, \varepsilon_{T-2} = -1/3) = E(1+\varepsilon_{T+1}-\frac{2}{3}\varepsilon_T-\frac{1}{3}\varepsilon_{T-1}|\varepsilon_T = 2/3, \varepsilon_{T-1} = 1/3, \varepsilon_{T-2} = -1/3) = \frac{4}{9}$
$E((\hat{Y}_{T+1} - Y_{T+1})^2)|\varepsilon_T = 2/3, \varepsilon_{T-1} = 1/3, \varepsilon_{T-2} = -1/3) = E((\varepsilon_{T+1})^2) = \frac{1}{2^2}$　$\hat{Y}_{T+2} = E(Y_{T+2}|\varepsilon_T = 2/3, \varepsilon_{T-1} = 1/3, \varepsilon_{T-2} = -1/3) = E(1 + \varepsilon_{T+2} - \frac{2}{3}\varepsilon_{T+1} - \frac{1}{3}\varepsilon_T|\varepsilon_T = 2/3, \varepsilon_{T-1} = 1/3, \varepsilon_{T-2} = -1/3) = \frac{7}{9}$
$E((\hat{Y}_{T+2} - Y_{T+2})^2)|\varepsilon_T = 2/3, \varepsilon_{T-1} = 1/3, \varepsilon_{T-2} = -1/3) = V(\varepsilon_{T+1} - \frac{2}{3}) = \frac{13}{36}$　$Y_{T+1} - \hat{Y}_{T+1} = \varepsilon_{T+1} \sim N(0, 1/4)$ より、信頼度 95% で　$\frac{4}{9} - \frac{1.96}{2} \leqq Y_{T+1} \leqq \frac{4}{9} + \frac{1.96}{2}$
$Y_{T+2} - \hat{Y}_{T+2} = \varepsilon_{T+2} - \frac{2}{3}\varepsilon_{T+1} \sim N(0, \frac{13}{36})$ より、信頼度 95% で　$\frac{7}{9} - \frac{1.96\sqrt{13}}{6} \leqq Y_{T+2} \leqq \frac{7}{9} + \frac{1.96\sqrt{13}}{6}$

■練習問題 2.21　γ_n　の条件より、　$\gamma_n = 3(\frac{1}{2})^n + A\alpha^n$,　$|\alpha| < \frac{1}{2}$ を満たしている。　また特性方程式 $1 = \phi_1 x + \phi_2 x^2$ の解の一つが　2 なので　$1 = 2\phi_1 + 4\phi_2$ が成立する。　また、　ユールウォーカー方程式より, $\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1$, つまり、　$1 = 5\phi_1 + \phi_2$ 、　この 2 つを連立させ、　$(\phi_1, \phi_2) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ 、　すると、特性方程式を解いて $\alpha = \frac{-1}{3}$ $\therefore \rho_1 = \frac{3(\frac{1}{2})+A\frac{-1}{3}}{3+A}$ を解いて、$A = \frac{27}{16}$ $\therefore \gamma_n = 3(\frac{1}{2})^n + \frac{27}{16}(\frac{-1}{3})^n$, $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) = (\frac{75}{16}, \frac{15}{16}, \frac{15}{16})$　また、　$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \sigma^2$ より、　$\sigma^2 = \frac{35}{8}$

■練習問題 2.22　$E(Y_t) = \phi_0 + \phi_1 E(Y_{t-1}) + E(\varepsilon_t)$ より､$\mu = \phi_0 + \phi_1\mu$
$V(Y_t) = V(\phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t)$ より､$\gamma_0 = (\phi_1)^2\gamma_0 + \sigma^2$
$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = Cov(\phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t, Y_{t-1})$ より､$\gamma_1 = \phi_1\gamma_0$
これらより、　$(\phi_0, \phi_1, \sigma^2) = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{8}{3})$ $\rho_h = 3^{-h}$
また、$Y_t = 2 + \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} 3^{-i}\varepsilon_{t-i}$
$E(Y_t|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = 2 + \varepsilon_t + \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}$
$E(Y_t|\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-3}, \dots) = 2 + \frac{1}{3^2}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} 3^{-i}\varepsilon_{t-2-i} = 2 + \frac{1}{9}(Y_{t-2} - 2)$
$Y_t = \varepsilon_t + \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1} + X$, $E(X) = 2, V(X) = V(\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^{i+2}\varepsilon_{t-i-2}) = \sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^{2(i+2)}\frac{8}{3} = \frac{1}{27}$, X は$\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}$と独立とおけるので $E((Y_t)^2|\varepsilon_t,\ \varepsilon_{t-1}) = E((\varepsilon_t + \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1} + X)^2|\varepsilon_t,\ \varepsilon_{t-1}) = \varepsilon_t^2 + \frac{1}{9}\varepsilon_{t-1}^2 + \frac{2}{3}\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + 4\varepsilon_t + \frac{4}{3}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{27} + 2^2$

(別解) $Y_t = \frac{4}{3}+\frac{1}{3}Y_{t-1}+\varepsilon_t = \frac{4}{3}+\frac{1}{3}(\frac{4}{3}+\frac{1}{3}Y_{t-2}+\varepsilon_{t-1})+\varepsilon_t) = \frac{16}{9}+\frac{1}{9}Y_{t-2}+\frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t$ で $(Y_t)^2$ を計算してもよい。　さらに条件付分散を用いると、$V(Y_t|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = (\frac{1}{9})^2 V(Y_{t-2}) = \frac{1}{27}$, $E(Y_t|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = 2+\varepsilon_t+\frac{1}{3}\varepsilon_{t-1}$ とあわせて、$E((Y_t)^2|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = V(Y_t|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) + (E(Y_t|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}))^2 = \frac{1}{27} + (2 + \varepsilon_t + \frac{1}{3}\varepsilon_{t-1})^2$

■練習問題 2.23　(1)$\frac{1}{9}(1 + 1 + 1 + 2 * 2 * \frac{1}{4}) = \frac{4}{9}$　(2) $\mathrm{Cov}(Y_{t-1}, \varepsilon_t) = \mathrm{Cov}(2 + \frac{1}{3}Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{Cov}(Y_t, \varepsilon_t) = \mathrm{Cov}(2 + \frac{1}{3}Y_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t) = \frac{13}{12}$

(2) $E(Y_t) = 3$, (2) を用いてこの場合のユール・ウォーカー方程式を作ると $\gamma_0 = \frac{1}{3}\gamma_1 + \frac{13}{12}, \gamma_1 = \frac{1}{3}\gamma_0 + \frac{1}{4}$ これをといて　$\gamma_0 = \frac{21}{16}, \gamma_1 = \frac{11}{16}$ $h \geqq 2$ で　$\gamma_h = \frac{1}{3}\gamma_{h-1}$ となるので　$h \geqq 1$ では$\gamma_h = \frac{11}{16}(\frac{1}{3})^{h-1}$

■練習問題 2.24　(1)$E(Y_t) = \frac{10}{3}, \gamma_0 = V(Y_t) = \frac{625}{21}$, $\gamma_h = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-h}) = \frac{625}{21}(0.4)^h$

(2)$Y_t = \frac{10}{3} + \sum_{i=0}^{\infty}(0.4)^i \varepsilon_{t-i}$

(3)$Y_t \sim N(\frac{10}{3}, \frac{625}{21})$

(4) $E(Y_{t+1}|Y_t = a) = 2 + 0.4a$, $V(Y_{t+1}|Y_t = a) = 5^2$, $E(Y_{t+2}|Y_t = a) = 2.8 + 0.16a$, $V(Y_{t+2}|Y_t = a) = 29$

■練習問題 2.25　$Y_t = \frac{100}{21} + \sum_{i=0}^{\infty}(\frac{3}{2}(\frac{3}{10})^i - \frac{1}{2}(\frac{1}{10})^i)\varepsilon_{t-i}$

8.3　第 3 章練習問題解答

■練習問題 3.1　i 行目が硬貨の残り枚数 $i-1$ 枚に対応するとすると、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 2/4 & 1/4 & 0 \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 9/16 & 6/16 & 1/16 & 0 \\ 27/64 & 27/64 & 9/64 & 1/64 \end{pmatrix}$$

$(P(X_4 = 0|X_2 = 3), P(X_4 = 1|X_2 = 3), P(X_4 = 2|X_2 = 3), P(X_4 = 3|X_2 = 3)) = (P(X_2 = 0|X_0 = 3), P(X_2 = 1|X_0 = 3), P(X_2 = 2|X_0 = 3), P(X_2 = 3|X_0 = 3)) = (27/64, 27/64, 9/64, 1/64)$

■練習問題 3.2

$$\begin{aligned}
&P(X_4 = x_4, X_2 = x_2, X_1 = x_1 \mid X_3 = x_3) \\
&= \frac{P(X_4 = x_4, X_2 = x_2, X_1 = x_1, X_3 = x_3)}{P(X_3 = 3)} \\
&= P(X_4 = x_4 \mid X_3 = x_3, X_2 = x_2, X_1 = x_1)\frac{P(X_3 = x_3, X_2 = x_2, X_1 = x_1)}{P(X_3 = x_3)} \\
&= P(X_4 = x_4 \mid X_3 = x_3)P(X_2 = x_2, X_1 = x_1 \mid X_3 = x_3)\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P(X_1 = x_1 \mid X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4) \\
&\quad = \frac{P(X_1 = 1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4)}{P(X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4)} \\
&\quad = \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3)P(X_4 = 4|X_3 = x_3, X_2 = x_2, X_1 = x)}{P(X_2 = 2, X_3 = 3)P(X_4 = 4|X_3 = x_3, X_2 = x_2)} \\
&\quad = \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3)}{P(X_2 = x_2, X_3 = x_3)} \\
&\quad = \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 2)P(X_3 = x_3|X_2 = 2, X_1 = x_1)}{P(X_2 = 2)P(X_3 = x_3|X_2 = x_2)} \\
&\quad = \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{P(X_2 = x_2)} = P(X_1 = x_1|X_2 = x_2)
\end{aligned}$$

■練習問題 3.3　固有値は 1 と 1/12 なので　$P^n = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}3 & 8\\ 3 & 8\end{pmatrix} + \frac{1}{11}(\frac{1}{12})^n\begin{pmatrix}8 & -8\\ -3 & 3\end{pmatrix}$ つまり、$(P(X_n = 1|X_0 = 1),\, P(X_n = 2|X_0 = 1)) = (1,0)P^n = (\frac{3}{11} + \frac{8}{11}(\frac{1}{12})^n, \frac{8}{11}(1-(\frac{1}{12})^n))\,,\ \vec{\pi} = (\frac{3}{11}, \frac{8}{11})$.

■練習問題 3.4　固有値は 1 と 2/3 なので $P^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + (\frac{2}{3})^n\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

つまり、$((P(X_n = 1),\, P(X_n = 2)) = (1-(3/4)(\frac{2}{3})^n, (3/4)(\frac{2}{3})^n)\,,\ \vec{\pi} = (1,0)$.

■練習問題 3.5　吸収状態は $\{1,2,3\}$，過渡的状態は $\{4,5\}$.

$$\begin{pmatrix}\vec{\pi}_1\\ \vec{\pi}_2\\ \vec{\pi}_3\\ \vec{\pi}_4\\ \vec{\pi}_5\end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 5/17 & 6/17 & 6/17 & 0 & 0\\ 13/34 & 1/17 & 19/34 & 0 & 0\end{pmatrix} = (\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3, \vec{0}, \vec{0})\,.$$

■練習問題 3.6　Y_t の定常分布は (3/17, 4/17, 4/17, 6/17), X_t の極限分布は (7/17, 10/17).

■練習問題 3.7　固有値は $1, 1/3, 1/9$ より、$P^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} + (\frac{1}{3})^n\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix} + (\frac{1}{9})^n\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$

よって

$(P(X_n = 1), P(X_n = 2), P(X_n = 3)) = (1/2, 1/3, 1/6)P^n = (1 - \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^n + \frac{1}{6}(\frac{1}{9})^n,\ \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^n - \frac{1}{3}(\frac{1}{9})^n,\ \frac{1}{6}(\frac{1}{9})^n)$

■練習問題 3.8

$$\begin{aligned}&P(f(X_t) \leqq y\,|\,f(X_{t_n}) = y_n, f(X_{t_{n-1}}) = y_{n-1}, \cdots, f(X_{t_1}) = y_1)\\ &\quad = P(X_t \in f^{-1}((-\infty, y])\,|\,X_{t_n} = f^{-1}(y_n), X_{t_{n-1}} = f^{-1}(y_{n-1}), \cdots, X_{t_1} = f^{-1}(y_1))\\ &\quad = P(X_t \in f^{-1}((-\infty, y])\,|\,X_{t_n} = f^{-1}(y_n)) = P(f(X_t) \leqq y\,|\,f(X_{t_n}) = y_n)\,.\end{aligned}$$

■練習問題 3.9　$x, x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$ について以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}&P(X_t \leqq x\,|\,X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \cdots, X_{t_n} = x_n)\\ &\quad = P(Y_{t_n+1}Y_{t_n+2}\cdots Y_t \leqq x/x_n\,|\,X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \cdots, X_{t_n} = x_n)\\ &\quad = P(Y_{t_n+1}Y_{t_n+2}\cdots Y_t \leqq x/x_n)\end{aligned}$$

但し，最後の等式は $Y_1, Y_2 \ldots, Y_t, \ldots$ の独立性による．一方，同様にして以下が成り立つことが示せる.

$$P(X_t \leqq x\,|\,X_{t_n} = x_n) = P(Y_{t_n+1}Y_{t_n+2}\cdots Y_t \leqq x/x_n)$$

よって X_t はマルコフ連鎖.

■練習問題 3.10　$X_t = Y_1 \cdot Y_2 \cdots Y_t,\ (X_0 = 1)$　）$E(X_t\,|\,X_1, \cdots, X_s) = X_sE(Y_{s+1}Y_{s+2}\cdots Y_t) = X_s\,.$

■練習問題 3.11　$E[Z_t^2 - t\,|\,\xi_1, \cdots, \xi_s] = E[(Z_t - Z_s + Z_s)^2 - t\,|\,\xi_1, \cdots, \xi_s] = E[(Z_t - Z_s)^2] + 2Z_sE[Z_t - Z_s] + Z_s^2 - t = Z_s^2 - s\,.$

■**練習問題** 3.12 $E[(N_t-\lambda t)^2-\lambda t\,|\,N_u, 0 \leqq u \leqq s] = E[(N_t-N_s+N_s-\lambda t)^2-\lambda t\,|\,N_u, 0 \leqq u \leqq s] = E[(N_t-N_s)^2]+2(N_s-\lambda t)E[N_t-N_s]+(N_s-\lambda t)^2-\lambda t = \cdots = (N_s-\lambda s)^2-\lambda s$.

■**練習問題** 3.13 $E[W_t^2-t\,|\,W_u, 0 \leqq u \leqq s] = E[(W_t-W_s+W_s)^2-t\,|\,W_u, 0 \leqq u \leqq s] = E[(W_t-W_s)^2]+2W_sE[W_t-W_s]+W_s^2-t = W_s^2-s$.

■**練習問題** 3.14 $E(N_s(N_s-1)(N_s-2)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)\frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!} = \lambda^3 s^3 e^{-\lambda s}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(\lambda s)^{k-3}}{(k-3)!} = \lambda^3 s^3$, $E[N_s^3] = E[N_s(N_s-1)(N_s-2)]+3E[N_s^2]-2E[N_s] = \lambda^3 s^3+3\lambda^2 s^2+\lambda s$, $E[N_s^2 N_t] = E[N_s^2]E[N_t-N_s]+E[N_s^3] = \lambda t(\lambda s+\lambda^2 s^2)+2\lambda^2 s^2+\lambda s$.

■**練習問題** 3.15 x^3 は奇関数なので $E[W_t^3]=0$. $E[W_t^4] = 2\int_0^\infty x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\{-\frac{x^2}{2t}\}\,dx$（ここで $y=\frac{x^2}{2t}$ と変数変換すると）$=\frac{4t^2}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{5}{2}) = 3t^2$. $E[e^{\alpha W_t}] = M_{N(0,t)}(\alpha) = \exp\{\frac{1}{2}\alpha^2 t\}$. $E[W_t e^{W_t}] = \frac{d}{d\alpha}E[e^{\alpha W_t}]|_{\alpha=1} = te^{t/2}$. $E[W_s^2 W_t^2] = E[W_s^2(W_t-W_s+W_s)^2] = E[W_s^2]E[(W_t-W_s)^2]+2E[W_s^3]E[W_t-W_s]+E[W_s^4] = 2s^2+st$.

■**練習問題** 3.16 $f_{T_2}(x) = f_{T_1+T_2-T_1}(x) = f_{\Gamma(2,\lambda)}(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}\quad (x>0)$, $f_{T_n}(x) = f_{\Gamma(n,\lambda)}(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-\lambda x}\quad (x>0)$, $P[T_2 > 3T_1] = P[T_2-T_1 > 2T_1] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx\int_{2x}^\infty \lambda e^{-\lambda y}\,dy = 1/3$.
T_3-T_2, T_2-T_1, T_1は独立で $\sim Exp(\lambda)$ より,
$P(T_3>3T_2>4T_1) = \int\int\int_{z+x+y>3(x+y)>4x}\lambda^3 e^{-\lambda(x+y+z)}dxdydz = \int\int\int_{z>2(x+y),3y>x}\lambda^3 e^{-\lambda(x+y+z)}dxdydz = \int\int_{3y>x}\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}e^{-2\lambda(x+y)}dxdy = \lambda^2\int_0^\infty e^{-3\lambda x}dx\int_{\frac{x}{3}}^\infty e^{-3\lambda y}dy = \frac{\lambda}{3}\int_0^\infty e^{-4\lambda x}dx = \frac{1}{12}$
(別解 $P[T_3>3T_2>4T_1] = E[P[T_3>3T_2>4T_1\,|\,T_1]] = \int_0^\infty P[T_1\in dx]P[T_3-T_1+x > 3(T_2-T_1+x) > 4x] = \int_0^\infty P[T_1\in dx]P[T_3-T_2 > 2(T_2-T_1)+2x, T_2-T_1 > \frac{x}{3}] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx\int_{x/3}^\infty \lambda e^{-\lambda y}\,dy\int_{2y+2x}^\infty \lambda e^{-\lambda z}\,dz = 1/12$).

■**練習問題** 3.17 $x>0$ について $f_{M_t}(x) = \int_{-\infty}^x f_{(M_t,W_t)}(x,y)dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\exp\{-\frac{x^2}{2t}\}$, その他の場合は $f_{M_t}(x)=0$. $E[M_t]=\sqrt{\frac{2t}{\pi}}$, $E[M_t^2]=t$. M_t-W_t と $|W_t|$ の密度関数は共に M_t の密度関数と同じ.

■**練習問題** 3.18 推移確率行列 $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ q & 1-q\end{pmatrix}$ とおくと、$P(X_n=1)=1-(1-q)^n$ より、$P(T\leqq n) = 1-(1-q)^n$ つまり、 $T\sim Fs(q)$ よって $E(T)=\frac{1}{q}$ より、$q=\frac{1}{6}$

■**練習問題** 3.19 固有値が $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\}$ であることと、$\{1\}$ だけが吸収状態 ($\lim_{n\to\infty}P(X_n=1)=1$) より、$P(X_n=1) = 1+A(\frac{1}{2})^n+B(\frac{1}{3})^n$ とおける。すると、 $P(T\leqq n) = 1+A(\frac{1}{2})^n+B(\frac{1}{3})^n$ つまり、$P(T\geqq n) = -A(\frac{1}{2})^{n-1}-B(\frac{1}{3})^{n-1}$ すると、$E(T)=\sum_{n=1}^\infty P(T\geqq n) = \sum_{n=1}^\infty -A(\frac{1}{2})^{n-1}-B(\frac{1}{3})^{n-1} = -2A-\frac{3}{2}B$
$E(\frac{T(T+1)}{2}) = \sum_{n=1}^\infty nP(T\geqq n) = \sum_{n=1}^\infty -An(\frac{1}{2})^{n-1}-Bn(\frac{1}{3})^{n-1} = (-A)\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}+(-B)\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = -4A-\frac{9}{4}B$, $-2A-\frac{3}{2}B=\frac{9}{4}$, $-4A-\frac{9}{4}B = \frac{E(T^2)+E(T)}{2} = \frac{V(T)+E(T)^2+E(T)}{2} = \frac{39}{8}$ を解いて、
$A=-\frac{3}{2}, B=\frac{1}{2}$, $P(X_n=1) = 1-\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n+\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^n$

■練習問題 3.20　$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$(P(X_2=0), P(X_2=1), P(X_2=2), P(X_2=3)) = (P(X_0=0), P(X_0=1), P(X_0=2), P(X_0=3))P^2 = (4/81, 41/81, 32/81, 4/81)$

$\vec{\pi}P = \vec{\pi}$ を解いて　$\vec{\pi} = (1/20, 9/20, 9/20, 1)$

$P(X_{n+1}=1) = P(X_n=0) + \frac{4}{9}P(X_n=1) + \frac{4}{9}P(X_n=2)$

$P(X_{n+1}=2) = \frac{4}{9}P(X_n=1) + \frac{4}{9}P(X_n=2) + P(X_n=3)$

$a_{n+1} = 1 - a_n + \frac{8}{9}a_n, a_0 = 1$ を解いて、$a_n = \frac{9}{10} + \frac{1}{10}(\frac{-1}{9})^n$

(注意　n=0,1,2 を代入して検算しておくこと。)

■練習問題 3.21　$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$

$(P(X_2=0), P(X_2=1), P(X_2=2)) = (9/16, 3/8, 1/16)$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vec{a} & R \end{pmatrix}$ とおくと

$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (E-R)^{-1}(E-R^n)\vec{a} & R^n \end{pmatrix}$ となるので

$R^n = (1/2)^n \frac{R-(1/4)E}{(1/2)-(1/4)} + (1/4)^n \frac{R-(1/2)E}{(1/4)-(1/2)} = \begin{pmatrix} (1/2)^n & 0 \\ 2(1/2)^{n-1} - 2(1/4)^n & (1/4)^n \end{pmatrix}$

よって $P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-(1/2)^n & (1/2)^n & 0 \\ 1-2(1/2)^n+(1/4)^n & 2(1/2)^n - 2(1/4)^n & (1/4)^n \end{pmatrix}$

$(P(X_n=0), P(X_n=1), P(X_n=2)) = (1-2(1/2)^n+(1/4)^n,\ 2(1/2)^n-2(1/4)^n,\ (1/4)^n)$

$\lim_{n\to\infty}(P(X_n=0), P(X_n=1), P(X_n=2)) = (1,0,0)$

(注意　これは　吸収状態が 1 個しかないから明らか。)

■練習問題 3.22　(a) $P = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$

$\vec{\pi}P = \vec{\pi}$ を解いて、$\vec{\pi} = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$

(注意　この場合はすべての列ベクトルも和が 1 になるので確率ベクトルである。このときは定常分布の成分はすべて同じになる。)

(b) $T \sim Fs(1/6)$, $P(T=k) = \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{k-1}$　$(k=1,2\ldots)$

$E(T) = \frac{1}{1/6} = 6,\quad V(T) = \frac{5/6}{(1/6)^2} = 30$

(c) $Y_i = i$ 回目のサイコロの目 とおくと、　$E(X_T|T=n) = E(Y_1+Y_2+\cdots+Y_{n-1}+Y_n|T=n) = E(Y_1'+Y_2'+\cdots+Y_{n-1}'+6) = 3(n-1)+6$, ここで　$Y' \sim DU\{1,2,\ldots,5\}$　$E(X_T|T) = 3T+3$, $V(X_T|T=n) = V(Y_1+\cdots+Y_{n-1}+6|T=n) = V(Y')(n-1) = 2(n-1)$,　$V(X_T|T) = 2(T-1)$, $E(X_T) = E(X_T|T) = E(3T+3) = 21$,　$V(X_T) = E(V(X_T|T)) + V(E(X_T|T)) = E(2(T-1)) + V(3T+3) = 10 + 9V(T) = 280$*2

■練習問題 3.23　求める確率を p_n とおくと、$p_{n+1} = (1-p)p_n + p(1-p_n)$, $p_1 = 1-p$ を解いて、$p_n = \frac{1}{2}(1+(1-2p)^n)$
別解 $p_n = P(B(n,p) = \text{偶数}) = \frac{g_{B(n,p)}(1)+g_{B(n,p)}(-1)}{2} = \frac{1}{2}(1+(1-2p)^n)$

■練習問題 3.24　(1) $p_{n+1} = \frac{1}{3}q_n + \frac{2}{3}r_n$

(2) 同様に $q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n$
これと、$p_{n+1} = \frac{1}{3}q_n + \frac{2}{3}(1-p_n-q_n)$　より、q_n を消去して　$p_{n+2} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{9}$、 特殊解は　$\frac{1}{3}$ より、$p_{n+2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(p_n - \frac{1}{3})$, また、特性解は $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ したがって　$p_n = \frac{1}{3} + C(\frac{1}{\sqrt{3}})^n + D(-\frac{1}{\sqrt{3}})^n$ とおけ、$p_0 = 1, p_1 = 0$ より、　$C = \frac{2-\sqrt{3}}{6}$, $D = \frac{2+\sqrt{3}}{6}$ よって　$p_n = \frac{1}{3} + \frac{2-\sqrt{3}}{6}(\frac{1}{\sqrt{3}})^n + \frac{2+\sqrt{3}}{6}(-\frac{1}{\sqrt{3}})^n$

■練習問題 3.25　r_n, q_n をそれぞれ n 回の試行の後赤球が 0 個、2 個の確率とすると、$p_{n+1} = \frac{2}{5}r_n + \frac{17}{25}p_n + \frac{2}{5}q_n = \frac{17}{25}p_n + \frac{2}{5}(1-p_n)$, $p_0 = 1$ とあわせ、　$p_n = \frac{5}{9} + \frac{4}{9}(\frac{7}{25})^n$

■練習問題 3.26　得点 $n+2$ でゲームが終わる。$\Longleftrightarrow$ 最初に 1 が出てその後の得点が $n+1$　または　最初に 2 が出てその後の得点が n なので

$p_{n+2} = \frac{1}{6}p_{n+1} + \frac{1}{3}p_n$

特性解は $\frac{2}{3}, \frac{-1}{2}$ で　$p_n = C(\frac{2}{3})^n + D(\frac{-1}{2})^n$ と置け、
$p_0 = \frac{1}{2}$, $p_1 = \frac{1}{12}$ より、$p_n = \frac{2}{7}(\frac{2}{3})^n + \frac{3}{14}(\frac{-1}{2})^n$
$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \frac{2}{7}\frac{2}{3}\frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} + \frac{3}{14}\frac{-1}{2}\frac{1}{(1+\frac{1}{2})^2} = \frac{5}{3}$
$E(X(X-1)) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)p_n = \frac{2}{7}\frac{4}{9}\frac{2}{(1-\frac{2}{3})^3} + \frac{3}{14}\frac{1}{4}\frac{2}{(1+\frac{1}{2})^3} = \frac{62}{9}$
(参考　$E(t^X) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{6}t-\frac{1}{3}t^2}$ と確率母関数を求め ($\because$ $E(t^X) = E(E(t^X|T)) = E((\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}t^2)^{T-1}) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{6}t-\frac{1}{3}t^2}$, ここで　T はゲームをやめるまでのサイコロ投げの回数で　$T \sim Fs(\frac{1}{2})$ つまり　$T-1 \sim Ge(\frac{1}{2})$ でもいいし、　$E(t^X) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n p_n$ を直接計算してもよい。) 微分しても求まる。)

■練習問題 3.27　A が勝つ確率を p_A, B が勝つ確率を p_B, C が勝つ確率を p_C とすると、$p_A = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}p_C$, ($\because$ A が 6 以外を出せば C の立場になるため)$p_B = \frac{5}{6}p_A$, $p_A + P_B + P_C = 1$ とあわせて　$p_A = \frac{36}{91}$
(別解 $p_A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{3i} = \frac{36}{91}$)

■練習問題 3.28　$p = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{5}{6}\frac{5}{6}p$ を解いて、$p = \frac{18}{29}$
$E(T) = x$　とおくと、$x = \frac{1}{3} + 2\frac{2}{3} + 3\frac{2}{3}\frac{5}{6}\frac{1}{6} + (3+x)\frac{2}{3}\frac{5}{6}\frac{5}{6}$
これを解いて $x = \frac{120}{29}$

---

*2 (**) マルチンゲール理論における　Optional Stopping Theorem を知っていると $X_n - 3.5n$ がマルチンゲールより $0 = E(X_T - 3.5T)$, $E(X_T) = 3.5E(T) = 21$, また、$X_t^2 - 7tX_t - \frac{35}{12}t + \frac{49}{4}t^2$ がマルチンゲールより、$E(X_T^2) = 7E(TX_T) + \frac{35}{12}E(T) + \frac{49}{2}E(T^2) = 7E(TE(X_T|T)) + \frac{35}{12}E(T) + \frac{49}{2}E(T^2) = 721$ よって　$V(X_T) = E(X_T^2) - E(X_T)^2 = 280$　と計算してもいい。

■練習問題 3.29　ドア A を選ぶ事象も A と書くことにすると, $x=E(T)=E(T,A)+E(T,B)+E(T,C)=E(T|A)P(A)+E(T|B)P(B)+E(T|C)P(C)=2\frac{1}{3}+(3+x)\frac{1}{3}+(5+x)\frac{1}{3}$
これより、　$x=10$
$y=E(T^2)=E(T^2|A)P(A)+E(T^2|B)P(B)+E(T^2|C)P(C)=4\frac{1}{3}+(y+60+9)\frac{1}{3}+(y+100+25)\frac{1}{3}$
これを解いて　$y=198,\ V(T)=y-x^2=98$

■練習問題 3.30　(1) $T_1\sim Fs(p)\therefore E(T_1)=\frac{1}{p},V(T_1)=\frac{1-p}{p^2}$
$P(T_1=\text{奇数})=\sum_{i=1}^{\infty}p(1-p)^{2i-1-1}=\frac{1}{2-p}$
(2) T_2の分布　$\sim T_1+T_1'$ つまり、　$E(T_2)=\frac{2}{p},V(T_2)=\frac{2(1-p)}{p^2}$,
(注意　$T_2-2\sim NB(2,p)$)
(3) 1,2 回目が　HH(表表) ならそこで終わり、HT ならその後は　T_3' と同じ分布の確率変数 T_3', 1 回目が T(裏) ならその後は T_3''
よって　$E(T_3)=2p^2+p(1-p)(2+E(T_3'))+(1-p)(1+E(T_3''))$ これを解いて $E(T_3)=\frac{1+p}{p^2}$

■練習問題 3.31　得点をあらわす確率変数を X とおくと、題意より、次が成立する。

$$X=\begin{cases}1+X' & \text{確率 } p\\ 0 & \text{確率}\quad (1-p)(1-r)\\ X'' & \text{確率}\quad (1-p)r\end{cases}$$

ここで　X', X'' は　X と同分布な確率変数。よって　$E=E(X)$ とおくと、$E=p(1+E)+(1-p)rE$
これを解いて、　$E=\frac{p}{(1-p)(1-r)}$

■練習問題 3.32　(1)$P(X_1=3)=1/2,\ P(X_1=2)=1/3,\ P(X_1=1)=1/3,\ P(X_2=3)=1/9,\ P(X_2=2)=2/9,\ P(X_2=1)=2/3$
(2)$P(X_4=2|X_2=3)=P(X_2=2)=2/9,\ P(X_4=2|X_2=2)=1/9,\ P(X_4=2|X_2=2,X_1=3)=P(X_4=2\cap X_2=2\cap X_1=3)/P(X_2=2\cap X_1=3)=1/9$, または　あきらかにマルコフ性を持つので
　$P(X_4=2|X_2=2,X_1=3)=P(X_4=2|X_2=2)=1/9,\ P(X_4=2|X_2=2,X_1=2)=1/9$
$P(X_2=3|X_3=2)=P(X_3=2\cap X_2=3)/P(X_3=2)=1/3,\ P(X_2=3|X_4=2,X_3=2)=1/3$

(3)$(P(X_{n+1}=1),P(X_{n+1})=2,P(X_{n+1})=3)=(P(X_n=1),P(X_n=2),P(X_n=3))\begin{pmatrix}1&0&0\\2/3&1/3&0\\1/3&1/3&1/3\end{pmatrix}$

これを解いて $(P(X_n=1),P(X_n=2),P(X_n=3))=(1-(n+1)(1/3)^n,\ n(1/3)^n,\ (1/3)^n)$
(4)$n\geqq 2$ をまず考える。$n-1$ 回目まで　ずっと 3 人の場合と　i　$(1\leqq i\leqq n-1)$ 回目に 2 人になる場合に分けて計算して $p_n=(1/3)^{n-1}(1/3+(n-1)(1/3)^{n-1}(2/3)=(2n-1)(1/3)^n$ 明らかに　$p_1=1/3$ より、これは　$n=1$ でも成立する。よって求める答えは $p_n=(2n-1)(1/3)^n$

$$\text{期待回数}=\sum_{n=1}^{\infty}np_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2n(n-1)+n)(1/3)^n=2(1/3)^2\frac{2}{(1-1/3)^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{(1-1/3)^2}=9/4$$

別解
一人の勝者が決まるまでの回数を　X とおくと

$$X=\begin{cases}1+X' & \text{確率 } 1/3\\ 1+Fs(2/3) & \text{確率}\quad 1/3\\ 1 & \text{確率 } 1/3\end{cases}$$

となる。ここで　X' は　X と同分布の確率変数 (あいこの場合),　また　$Fs(2/3)$ は勝者が 2 人になった

以降で一人の勝者が決まるまでの回数の確率分布である。すると、$E(X)=(1/3)(1+E(X))+(1/3)(1+3/2)+1/3$ を解いて　$E(X)=9/4$

■練習問題 3.33　(1)　$P(Y_n \leqq k)=(k/6)^n$　(2)$P(Y_n=k)=(k/6)^n-((k-1)/6)^n$　(3)$E(Y_n)=\sum_{k=1}^{6} k((k/6)^n-((k-1)/6)^n$　(4)$V(Y_n)=\sum_{k=1}^{6} k^2((k/6)^n-((k-1)/6)^n-(\sum_{k=1}^{6} k((k/6)^n-((k-1)/6)^n)^2$
(5)$\lim_{n\to\infty} E(Y_n)=6$,)$\lim_{n\to\infty} V(Y_n)=6^2-6^2=0$
(6)$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(7)$(P(Z_{n+1}=4),\,P(Z_{n+1}=5),\,P(Z_{n+1}=6))=(P(Z_n=4),\,P(Z_n=5),\,P(Z_n=6))\begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
より、これらを解いて　$(P(Z_n=4),\,P(Z_n=5),\,P(Z_n=6))=((1/3)^n,(5/6)^n-(1/3)^n,1-(5/6)^n)$
(注意、本問の場合、$P(Z_n=6)=P(Fs(1/6)\leqq n)=1-P(Fs(1/6)\geqq n+1)=1-(5/6)^n$ が意味を考えればすぐにわかる。　もちろん　$P(Z_n=4)$ も簡単にわかる。)

8.4　第 4 章練習問題解答

■練習問題 4.1　(1)$0\le x\le 1$ とし、$F_X(x)=P(\max(U_1,\ldots,U_n)\le x)=P(U_1\le x)^n=x^n$　$\therefore\ f_X(x)=nx^{n-1}$　$(0\le x\le 1)$
(2)x^n の逆関数は $x^{\frac{1}{n}}$ なので $X\sim U^{\frac{1}{n}}$
また $1-F_Y(x)=P(\min(U_1,\ldots,U_n)\ge x)=(1-x)^n$　$\therefore\ F_X(x)=1-(1-x)^n$
$y=1-(1-x)^n$ を解くと　$(1-x)^n=1-y \rightleftarrows (1-x)=(1-y)^{\frac{1}{n}}$　$\therefore\ x=1-(1-y)^{\frac{1}{n}}$
つまり、$Y\sim 1-(1-U)^{\frac{1}{n}}\sim 1-U^{\frac{1}{n}}$

■練習問題 4.2　(1)$x\ge 0$ として、$F_{X^2}(x)=P(X^2\le x)=P(X\le\sqrt{x})=F(\sqrt{x})$
(2)$x\ge 0$ として、$F_{\sqrt{X}}(x)=P(\sqrt{X}\le x)=P(X\le x^2)=F(x^2)$
(3)$0\le x\le 1$ のとき、

$$\begin{aligned} F_{\sin X}(x) &= P(\sin X\le x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(2n\pi\le X\le \sin^{-1}x+2n\pi)+\sum_{n=0}^{\infty} P((2n+1)\pi-\sin^{-1}x\le X\le(2n+2)\pi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(F(\sin^{-1}x+2n\pi)-F(2n\pi))+\sum_{n=0}^{\infty}(-F((2n+1)\pi-\sin^{-1}x)+F((2n+2)\pi)) \end{aligned}$$

$-1\le x\le 0(\sin^{-1}x\leqq 0$ に注意) のとき、

$$\begin{aligned} F_{\sin X}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(2n\pi+\pi-\sin^{-1}x\le X\le 2n\pi+2\pi+\sin^{-1}x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(F((2n+2)\pi+\sin^{-1}x)-F((2n+1)\pi-\sin^{-1}x))) \end{aligned}$$

(4)$F_{h(X)}(x) = P(h(X) \leq x) = P(X \leq h^{-1}(x)) = F(h^{-1}(x))$
(5)$0 \leq x \leq 1$ として
$F_{F(X)}(x) = P(F(X) \leq x) = P(X \leq F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x$ つまり $F(X) \sim U(0,1)$
(6)$0 \leq x \leq 1$ として
$F_{(F(X))^2}(x) = P((F(X))^2 \leq x) = P(F(X) \leq \sqrt{x}) = P(X \leq F^{-1}(\sqrt{x})) = F(F^{-1}(\sqrt{x})) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x \leq 1)$
(7)$F_{(h(F(X)))}(x) = P(h(F(X)) \leq x) = P(F(X) \leq h^{-1}(x)) = P(X \leq F^{-1}(h^{-1}(x))) = F(F^{-1}(h^{-1}(x))) = h^{-1}(x)$

■練習問題 4.3 標準正規分布の正の部分を作ればよい。 あとは対称性があるので もう一つ乱数を持ってきて正か負をそれで判断する。また、負の相関法だと自動的に正・負両方用いるので正の部分だけ作れば十分である。$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{\lambda\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}+\lambda x} = \frac{2}{\lambda\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\lambda)^2+\frac{1}{2}\lambda^2} \leq \frac{2e^{\frac{1}{2}\lambda^2}}{\lambda\sqrt{2\pi}} = C(\lambda)$
つまり、

$$Y \sim Exp(\lambda),\ U \sim U(0,1) \text{ を作り} \begin{cases} U \leq e^{-\frac{1}{2}(Y-\lambda)^2} \text{ なら } Y \text{ を採用} \\ U > e^{-\frac{1}{2}(Y-\lambda)^2} \text{ ならもとに戻る} \end{cases} \text{ を繰り返して作る}$$

$C'(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\lambda^2} (\lambda e^{\frac{1}{2}\lambda^2} \lambda^2 - e^{\frac{1}{2}\lambda^2}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\lambda^2} e^{\frac{1}{2}\lambda^2} (\lambda^2 - 1)$

λ	0		1	
$C'(\lambda)$		$-$	0	$+$
$C(\lambda)$		↘	最小	↗

増減表を書くと、$\lambda = 1$ が最小。つまり最適である。

■練習問題 4.4 (1) まず $0 < x < 1$ に対して $P(\sum_{i=1}^k U_i \leq x) = \frac{\lambda^k}{k!}$ を示す。
$k = 1$ の時は、明らか。
k のとき成立するとする。$k+1$ のとき

$$P\left(\sum_{i=1}^{k+1} U_i \leq x\right) = \int_0^x P\left(y + \sum_{i=1}^{k} U_i \leq x\right) f_{U_{k+1}}(y) dy = \int_0^x \frac{(x-y)^k}{k!} dy$$
$$= \int_0^x \frac{u^k}{k!} du = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

すると、$P\left(\sum_{i=1}^k U_i \leq 1\right) = \frac{1}{k!}$ $\quad \therefore\ P(N > k) = P(\sum_{i=1}^k U_i \leq 1) = \frac{1}{k!}$
$\therefore\ E(N) = \sum_{k=0}^\infty P(N > k) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} = e$
($\because\ P(N = k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!}$ を出して計算しても良い)

$E(N(N-2)) = \sum_{k=1}^\infty k(k-2) \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=3}^\infty \frac{1}{(k-3)!} = e \qquad \therefore\ E(N^2) = 2E(N) + e = 3e$
$\therefore\ V(N) = E(N^2) - (E(N))^2 = 3e - e^2 = (3-e)e$

【別解】$\sum_{k=1}^\infty kP(N > k) = \sum_{k=1}^\infty kE(\mathbf{1}_{\{N>k\}}) = E(\sum_{k=1}^\infty k\mathbf{1}_{\{N>k\}}) = E(\sum_{k=1}^{N-1} k) = E\left(\frac{(N-1)N}{2}\right)$
また、$\sum_{k=1}^\infty kP(N > k) = \sum_{k=1}^\infty k\frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(k-1)!} = e \qquad \therefore\ E(N^2) = 2e + E(N) = 3e$

(2) 定義より

$$P(M > k) = P(U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_k) \quad (\because\ M > k \rightleftarrows U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_k)$$
$$= \frac{1}{k!} \quad (\text{全ての } 1 \sim k \text{ の順列が同じ確率})$$

すると、$M \sim N \qquad \therefore$ (1) より $E(M) = e, \qquad V(M) = (3-e)e$

■練習問題 4.5　$E(g(U)) = E(\sin(\frac{\pi}{2}U)) = \int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \frac{dy}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$
$V(g(U)) = V(\sin\frac{\pi}{2}U) = \int_0^1 (\sin\frac{\pi}{2}x)^2\,dx - (\frac{2}{\pi})^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 y\,dy - (\frac{2}{\pi})^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2y}{2}\,dy - (\frac{2}{\pi})^2 = \frac{1}{2} - (\frac{2}{\pi})^2 = \frac{\pi^2-8}{2\pi^2} > 0$
$E(g(1-U)) = E(\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}U)) = \int_0^1 \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \frac{dy}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} = E(g(U))$,
$V(g(1-U)) = V(g(U))$
$Cov(g(1-U), g(U)) = E(\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}U)\sin(\frac{\pi}{2}U)) - (\frac{2}{\pi})^2 = E(\frac{1}{2}\sin\pi U) - (\frac{2}{\pi})^2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin\pi x\,dx - (\frac{2}{\pi})^2 = \frac{1}{\pi} - (\frac{2}{\pi})^2 = \frac{\pi-4}{\pi^2} < 0$
よって、$2M$ 個の独立な一様分布に従う確率変数を使った場合、$U\left(\frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{2M} g(U_i)\right) = \frac{V(g(U))}{2M} = \frac{1}{2M}\times\frac{\pi^2-8}{2\pi^2}$
M 個の一様分布 $U_1, \ldots, U_m$ と M 個の $1-U_1$　　$1-U_M$ を使った場合
$V\left(\frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{M}(g(U_i) + g(1-U_i))\right) = \frac{1}{2M}\left(V(g(U)) + Cov(g(U), g(1-U))\right) = \frac{1}{2M}\left(\frac{\pi^2-8}{2\pi^2} + \frac{\pi-4}{\pi^2}\right)$ と分散が小さくなる。

■練習問題 4.6　$N = \min\{n | \sum_{i=1}^n U_i > 1\}$ と同様に $N' = \min\{n | \sum_{i=1}^n (1-U_i) > 1\}$ も用いる。
$1-U_i \sim U(0,1)$ より、$N \sim N'$　　つまり $E(N) = E(N') = e$
ここで、$Cov(N, N') < 0$ が示されればよい。
$U_1 + U_2 + (1-U_1) + (1-U_2) = 2$ より、　$N \geq 3 \rightarrow N' = 2$　　かつ　　$N' \geq 3 \rightarrow N = 2$ となる。
$k \geq 2$ として $P(N > k \cap N' = 2) = P(N > k) = \frac{1}{k!}$
$\therefore\ P(N = k+1 \cap N' = 2) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k-1)!} = \frac{k}{(k+1)!}$　$(k \geq 2)$
同様に $P(N' = k+1 \cap N = 2) = \frac{k}{(k+1)!}$　$(k \geq 2)$ で他の事象は確率 0
$\therefore\ E(NN') = 2\times 2\times \sum_{k=2}^{\infty}(k+1)\frac{k}{(k+1)!} = 4\times\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!} = 4(e-1)$
$\therefore\ Cov(N, N') = E(NN') - E(N)E(N') = 4(e-1) - e^2 = -(e-2)^2 < 0$

■練習問題 4.7　$E(h(U)) = E(U^2) = \frac{1}{3}$,　$V(h(X)) = Var(U^2) = E(U^4) - (E(U^2))^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$
$Cov(g(X), h(X)) = Cov(e^U, U^2) = E(U^2 e^U) - E(U^2)E(e^U) = \int_0^1 x^2 e^x\,dx - \frac{1}{3}(e-1) = \left[(x^2 - 2x + 2)e^x\right]_0^1 - \frac{1}{3}(e-1) = (e-2) - \frac{1}{3}(e-1) = \frac{2}{3}e - \frac{5}{3}$

$$\left(\because \int f(x)e^x\,dx = \underbrace{(f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x)\cdots)}_{0\text{ になるまで微分}} e^x \text{ を用いると計算が速い}\right)$$

$Var(g(X)) = Var(e^U) = E(e^{2U}) - (E(e^U))^2 = \frac{e^2-1}{2} - (e-1)^2 = \frac{e^2-1}{2} - (e^2 - 2e + 1) = -\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{3}{2}$
これより制御変量法による分散は、

$$\begin{aligned} Var(\hat{\theta}_n^{(3)}) &= \frac{1}{n}\left(Var(e^U) - \frac{Cov(e^U, U^2)^2}{Var(U^2)}\right) = \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{3}{2} - \frac{(\frac{2}{3}e - \frac{5}{3})^2}{\frac{4}{45}}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{3}{2} - \frac{45}{4}\times\frac{1}{9}(2e-5)^2\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{3}{2} - \frac{5}{4}(4e^2 - 20e + 25)\right) \\ &= \frac{1}{n}(0.2420 - 0.2382) \fallingdotseq \frac{1}{n}\times 0.0038 \end{aligned}$$

と減少している。

$E(g(U)) = E(\sqrt{1-U^2}) = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = $ 第 1 象限内の半径 1 の円の面積 $= \frac{\pi}{4}$
$V(g(U)) = E(1-U^2) - (E(\sqrt{1-U^2}))^2 = \frac{2}{3} - (\frac{\pi}{4})^2 \fallingdotseq 0.0498$

$E(U\sqrt{1-U^2})=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_1^0 \sqrt{u}\frac{-du}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1=\frac{1}{3}$
$\therefore\ Cov(g(U),U)=E(Ug(U))-E(U)E(g(U))=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{8}=-0.0594$
$\therefore\ E(U)=\frac{1}{2},\quad V(U)=E(U^2)-(E(U))^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$
これより制御変量法による分散は

$$V(\hat{\theta}_n^{(3)})=\frac{1}{n}\left(V(g(U))-\frac{Cov(g(U),U)^2}{Var(U)}\right)=\frac{1}{n}\left(0.0498-\frac{(-0.0594)^2}{\frac{1}{12}}\right)$$
$$=\frac{1}{n}(0.0498-0.0423)=\frac{1}{n}\times0.0075$$

と、$Var(\hat{\theta}_n)=\frac{1}{n}\times0.0498$ に比べて減少している。

$E(g(U))=\frac{\pi}{4},\quad V(g(U))=\frac{2}{3}-(\frac{\pi}{4})^2\fallingdotseq0.0498$
$E(U^2\sqrt{1-U^2})=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^1 u\sqrt{1-u}\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)}=\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\pi}{16}$
$\therefore\ Cov(U^2,\sqrt{1-U^2})=E(U^2\sqrt{1-U^2})-E(U^2)E(\sqrt{1-U^2})=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{3}\times\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{48}=-0.06545$
これより制御変量法による分散は

$$V(\hat{\theta}_n^{(3)})=\frac{1}{n}\left(V(g(U))-\frac{Cov(g(U),U^2)^2}{Var(U^2)}\right)=\frac{1}{n}\left(0.0498-\frac{(-0.06545)^2}{\frac{4}{45}}\right)$$
$$=\frac{1}{n}(0.0498-0.0482)=\frac{1}{n}\times0.0016$$

と、$Var(\hat{\theta}_n)=\frac{1}{n}\times0.0498$ に比べて減少している。

■練習問題 4.8　$\frac{f(x)}{g(x)}=30(x(1-x))^2=30\left(\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2\right)^2\leqq\frac{30}{4^2}=\frac{15}{8}$　　$\therefore\ c=\frac{15}{8}$ ととる。
また、繰り返し回数は、$F_s(\frac{1}{c})$ となるので、$E(F_s(\frac{1}{c}))=\frac{1}{\frac{1}{c}}=c=\frac{15}{8}$ 回の繰り返し

■練習問題 4.9　$F=100\times e^{N(\mu,\sigma^2)}=100e^{\mu+\sigma Z_1}=100e^{0.1+0.2\times1.2}$
$G=Fe^{N(\mu,\sigma^2)}=Fe^{\mu+\sigma Z_2}=Fe^{0.1+0.2\times(-0.6)}$
$\therefore\ FG=100e^{0.1+0.2\times1.2}100e^{0.1+0.2\times1.2}e^{0.1+0.2\times(-0.6)}=10000e^{0.3+0.2\times(1.8)}$

■練習問題 4.10　$0.6>0.4$ より、平均 4 の指数分布が選択される。
逆関数法より、$-\frac{1}{\lambda}\log(1-U)=-4\log(1-0.25)$　　$(-4\log 0.25$ でも良い)

■練習問題 4.11　まず　分布関数 $F_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{3x} & (x\leqq0)\\ 1-\frac{1}{2}e^{-3x} & (x\geqq0)\end{cases}$

となるので　その逆関数 g は　$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}\log(2x) & (0<x<\frac{1}{2})\\ -\frac{1}{3}\log2(1-x) & (\frac{1}{2}\leqq x<1)\end{cases}$

よって $U\sim U(0,1)$ をとり、　$X=\begin{cases}\frac{1}{3}\log(2U) & (0<U<\frac{1}{2})\\ -\frac{1}{3}\log2(1-U) & (\frac{1}{2}\leqq U<1)\end{cases}$ とすればよい。

(別解)
ラプラス分布 (第 6 章指数分布　参照) と指数分布の関係より、$X=\frac{1}{3}(M_1-M_2)$, ($M_1\sim M_2\sim Exp(1)$ で独立) となるので、$X=\frac{1}{3}(-\log U_1+\log U_2)$　　($U_1\sim U_2\sim U(0,1)$ で独立) とすればよい。

■**練習問題** 4.12　F_Xの逆関数 g は　$g(x) = (-\frac{1}{a}\log(1-x))^{\frac{1}{b}}$ より、$X = (-\frac{1}{a}\log(1-U))^{\frac{1}{b}}$もしくは $(-\frac{1}{a}\log U)^{\frac{1}{b}}$

■**練習問題** 4.13　F_Xの逆関数 g は　$g(x) = -\log(-\log x)$ より、$X = -\log(-\log U)$ ととる。
(注意: $X \sim -\log Exp(1)$ である。これは　$M_1, M_2, \cdots \sim Exp(1)$ で独立とするとき、
$\max(M_1, M_2, \ldots, M_n) - \log n \to X \quad (n \to \infty)$ である。
$\because \lim_{n\to\infty} F_{\max(M_1,M_2,\ldots,M_n)-\log n}(x) = \lim_{n\to\infty}(F_{M_1}(x+\log n))^n = \lim_{n\to\infty}(1-e^{-(x+\log n)})^n = e^{-e^{-x}}$

■**練習問題** 4.14　$X = \max(g_1(U_1), \ldots, g_n(U_n))$ ととると、　$F_X(x) = P(X \leqq x) = \Pi_{i=1}^n F_i(x)$ となる。
　また、$Y = \min(g_1(U_1), \ldots, g_n(U_n))$ ととると、$F_Y(x) = 1 - P(\min(g_1(U_1), \ldots, g_n(U_n)) \geqq x) = 1 - \Pi_{i=1}^n(1-F_i(x))$ である。

■**練習問題** 4.15　X_i をパラメータ i の指数分布で独立とすると、それらと独立に $P(I=1) = \frac{1}{6}$, $P(I=2) = \frac{1}{3}$, $P(I=3) = \frac{1}{2}$ となる確率変数 I をとってくると、$X \sim X_I$ である。よって

$$
\begin{aligned}
0 \leqq U_1 \leqq 1/6 &\longrightarrow \quad X = -\log(U_2) \\
1/6 < U_1 \leqq 1/2 &\longrightarrow \quad X = -\frac{1}{2}\log(U_2) \\
1/2 < U_1 \leqq 1 &\longrightarrow \quad X = -\frac{1}{3}\log(U_2)
\end{aligned}
$$

とすればよい。

■**練習問題** 4.16　$X_1 \sim Exp(2)$, $X_2 \sim U(0,1)$ で独立とし、、それらと独立に $P(I=1) = \frac{1}{4}$, $P(I=2) = \frac{3}{4}$ となる確率変数 I をとってくると、$X \sim X_I$ である。よって

$$
\begin{aligned}
0 \leqq U_1 \leqq 1/4 &\longrightarrow \quad X = -\frac{1}{2}\log(U_2) \\
1/4 < U_1 \leqq 1 &\longrightarrow \quad X = U_2
\end{aligned}
$$

とすればよい。

■**練習問題** 4.17　$X_1 \sim Exp(5)$, $X_2 \sim \sqrt{U(0,1)}$ で独立とし、それらと独立に $P(I=1) = \frac{4}{5}$, $P(I=2) = \frac{1}{5}$ となる確率変数 I をとってくると、$X \sim X_I$ である。よって

$$
\begin{aligned}
0 \leqq U_1 \leqq 4/5 &\longrightarrow \quad X = -\frac{1}{5}\log(U_2) \\
4/5 < U_1 \leqq 1 &\longrightarrow \quad X = \sqrt{U_2}
\end{aligned}
$$

とすればよい。

$$
\begin{aligned}
0 \leqq U_1 \leqq 4/5 &\longrightarrow \quad X = -\frac{1}{5}\log(U_2) \\
4/5 < U_1 \leqq 1 &\longrightarrow \quad X = \max(U_2, U_3)
\end{aligned}
$$

でもよい。

■**練習問題** 4.18　(1) 第 6 章より, $X \sim B(n, p_1)$ かつ 条件 $X = l$ のもとで、$Y \sim B(n-l, \frac{p_2}{p_2+p_3})$ より、　2 項分布のシミュレーション (第 6 章参照) を 2 つ行えばよい。
(2)$f_X(x) = \int_0^{1-x} 2dx = 2(1-x), F_X(x) = \int_0^x 2(1-u)du = 2x - x^2, g(x) = (F_X)^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}$
また, $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{1-x} \quad (0 < y < 1-x)$ つまり, $X = x$ のもとで、 $Y \sim (1-x)U(0,1)$

$X = 1-\sqrt{1-U_1}, Y = \sqrt{1-U_1}U_2$ とすればよい。

(3) 第 6 章より, (Z_1, Z_2) を独立で $Z_i \sim N(0,1)$ とすると, $\frac{X-\mu_1}{\sigma_1} = Z_1$,　つまり $X = \mu_1 + \sigma_1 Z_1$

$\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2} = \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2$,　つまり $Y = \mu_2 + \sigma_2(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2)$, この　(X,Y) が求めるものなので, $X = \mu_1 + \sigma_1\Phi^{-1}(U_1)$, $Y = \mu_2 + \sigma_2(\rho\Phi^{-1}(U_1) + \sqrt{1-\rho^2}\Phi^{-1}(U_2))$ ととればよい。

$X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$, $X = x$ のもとで $Y \sim N(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1), (1-\rho^2)\sigma_2^2)$, (第 6 章) を用いても良い。

また, ${}^t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma^2 \end{pmatrix}$ とし、$\binom{X}{Y} = \binom{\mu_1}{\mu_2} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\binom{\Phi^{-1}(U_1)}{\Phi^{-1}(U_2)}$ としてもよい。

■練習問題 4.19　(a) $F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}x)$ $F_X^{-1}(x) = \tan(\pi(u-\frac{1}{2}))$ より、$X \sim \tan(\pi(U-\frac{1}{2}))$

(b) $F_X(x) = \int_0^x 2(1-u)du = 2x - x^2$　　$(0 < x < 1)$ $F_X^{-1}(x) = 1-\sqrt{1-x}(0 < x < 1)$ より、$X \sim 1-\sqrt{1-U}$

■練習問題 4.20　$u \geqq 0$ に対して, $F_{X_1^2+X_2^2}(u) = P(X_1^2 + X_2^2 \leqq u) = \int\int_{x^2+y^2\leqq u}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy = \frac{1}{2\pi}\int\int_{0<r<\sqrt{u}}e^{-\frac{r^2}{2}}rdr\int_0^{2\pi}d\theta = 1-e^{-\frac{1}{2}u}$

$F^{-1}(u) = -2\log(1-u)$ より、$X \sim \sqrt{-2\log(1-U)}$

(注意, $X_1^2 + X_2^2 \sim \Gamma(1/2,1/2) + \Gamma(1/2,1/2) \sim \Gamma(1,1/2) \sim Exp(1/2)$ より、指数分布のシミュレーションになる。)

(c)

$F_X(x) = \int_0^x f_X(x)dx = \frac{\log(1+x^2)}{\log 2}$

$y = \frac{\log(1+x^2)}{\log 2} \iff x = \sqrt{2^y - 1}$,　$X = \sqrt{2^U - 1}$

(d)

$F_X(x) = \frac{2}{\pi}\sin^{-1}x$

$y = \frac{2}{\pi}\sin^{-1}x \iff x = \sin(\frac{\pi}{2}y)$,　$X = \sin(\frac{\pi}{2}U)$

■練習問題 4.21　$g(x) = e^x$ として、　$E(g(U)) = \int_0^1 xe^x dx = [(x-1)e^x]_0^1 = 1$,　$E(g(U)^2) = \int_0^1 x^2e^{2x}dx = (1/8)[(u^2-2u+2)e^u]_0^2 = \frac{e^2-1}{4}$ $V(g(U)) = \frac{e^2-1}{4} - 1 = 0.597264$

すると、$U_1, U_2, \ldots, U_{2M}$ の $2M$ 個の一様乱数を用いると

$V(\frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{2M} g(U_i)) = \dfrac{V(g(U))}{2M} = \dfrac{0.597264}{2M}$

また、$\mathrm{Cov}(g(U), g(1-U)) = e/6 - 1 = -0.5469530$ より、

負の相関法で、$U_1, U_2, \ldots, U_M, 1-U_1, 1-U_2, \ldots, 1-U_M$ の $2M$ 個の一様乱数を用いると $V(\frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{M}(g(U_i) + g(1-U_i))) = \dfrac{V(g(U)) + \mathrm{Cov}(g(U), g(1-U))}{2M} = \dfrac{0.05031}{2M}$ とかなり分散が減少しており、シミュレーションの精度が良くなる。

■練習問題 4.22　$g(x) = e^{-x}$ として、　$E(g(U)) = \int_0^1 e^{-x}dx = 1-e^{-1}$,　$E(g(U)^2) = \int_0^1 e^{-2x}dx == \frac{1-e^{-2}}{2}$, $V(g(U)) = \frac{1-e^2}{2} - (1-e^{-1})^2 = 0.032756$

すると、$U_1, U_2, \ldots, U_{2M}$ の $2M$ 個の一様乱数を用いると

$V(\frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{2M} g(U_i)) = \dfrac{V(g(U))}{2M} = \dfrac{0.032756}{2M}$

また、$\mathrm{Cov}(g(U), g(1-U)) = e^{-1} - (1-e^{-1})^2 = -0.031697$ より、

負の相関法で、$U_1, U_2, \ldots, U_M, 1-U_1, 1-U_2, \ldots, 1-U_M$ の $2M$ 個の一様乱数を用いると $V(\frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{M}(g(U_i) +$

$g(1-U_i))) = \dfrac{V(g(U)) + \mathrm{Cov}(g(U), g(1-U))}{2M} = \dfrac{0.001059}{2M}$ とかなり分散が減少しており、シミュレーションの精度が良くなる。

■練習問題 4.23　$U_1, U_2, \ldots, U_n$ の n 個の一様乱数を用いると練習問題 4.21 の解答より

$V(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i)) = \dfrac{V(g(U)}{n} = \dfrac{0.597264}{n}$

また、$\mathrm{Cov}(g(U), U) = \int_0^1 x^2 e^x dx - E(g(U))E(U) = [(x^2-2x+2)e^x]_0^1 - 1/2 = e - 5/2 = 0.218281828$ より、

制御変量負の相関法で、$V(\hat{\theta}_n^{(3)}) = \frac{1}{n}(V(g(U)) - \frac{\mathrm{Cov}(g(U),U)^2}{V(U)}) = \frac{0.0255}{n}$ 、$\mathrm{Cov}(g(U), U^2) = \int_0^1 x^3 e^x dx - E(g(U))E(U^2) = [(x^3-3x^2+6x-6)e^x]_0^1 - 1/3 = (-2e+6) - 1/3$ より、

制御変量負の相関法で、$V(\hat{\theta}_n^{(3)}) = \frac{1}{n}(V(g(U)) - \frac{\mathrm{Cov}(g(U),U^2)^2}{V(U^2)}) = \frac{0.00160583}{n}$ 、$\mathrm{Cov}(g(U), e^U) = \int_0^1 xe^{2x} dx - E(g(U))E(e^U) = (1/4)[(u-1)e^x]_0^2 - (e-1) = \frac{e^2-4e+5}{4}$ より、

制御変量負の相関法で、$V(\hat{\theta}_n^{(3)}) = \frac{1}{n}(V(g(U)) - \frac{\mathrm{Cov}(g(U),e^U)^2}{V(e^U)}) = \frac{0.003849}{n}$

■練習問題 4.24　(1) $x > 0$ として　$F_X(x) = P(X \leqq x) = E(P(X \leqq x|A)) = E(P(X \leqq |A)1_{A<x} + P(X \leqq x|A)1_{A>x}) = E(1_{A<x} + \frac{x}{A}1_{A>x}) = P(\frac{1}{A} > \frac{1}{x}) + x\int_0^1 /xye^{-y}dy = e^{-1/x} + x[-(y+1)e^{-y}]_0^{1/x} = x(1-e^{-1/x})$

(2) (1) より、　$Y \sim X$. よって　Y をシミュレートすればよいが,　$U(0,a) \sim aU(0,1)$ より、独立な $U_1, U_2 \sim U(0,1)$ をとり、$X = \frac{U_2}{-\log U_1}$ ととればよい。

8.5　第 5 章練習問題解答

■練習問題 5.1　(1) 頂点は　$P_1 : \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $P_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(1.1)　P_1 で最大値 11 をとる。

(1.2)　P_2 で　最大値 8 をとる。

(2) 頂点は $P_1 : \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $P_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $P_3 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4/3 \end{pmatrix}$ (2.1) P_1 で最大値 4 をとる。

(2.2) P_1と P_3 で最大値 8 をとる。

(3) 頂点は　$P_1 : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $P_2 : \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3.1) P_2 で最大値 15 をとる。(3.2) P_1 で最大値-20 をとる。

■練習問題 5.2　(1)$w = x + y + 0u + 0v$ を max

条件　$3x + y + 1 \cdot u = 12,\ x + 3y + 1 \cdot v = 12,\ \ x, y, u, v \geq 0$

$$\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

*3

$$
\begin{array}{cccccc|c}
 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 12 \\
 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 4 \\
\hline
 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{ccccc|c}
\frac{8}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 8 \\
\frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 4 \\
\hline
-\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 4
\end{array}
$$

*4

$$
\rightarrow
\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 3 \\
\frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 4 \\
\hline
-\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 4
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 3 \\
0 & 1 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 3 \\
\hline
0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 6
\end{array}
$$

$(x, y) = (3, 3)$ のとき $w = 6$ でこれは最適である。

$(2) w = x + 2y + 0u + 0v + 0s$ を max

条件　$x + y + u = 5,\ x + 3y + v = 12,\ 3x + y + s = 10,\ x, y, u, v, s \geq 0$

$$
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\
\hline
-1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

*5

$$
\rightarrow
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
\frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 4 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\
\hline
-1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cccccc|c}
\frac{2}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\
\frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 4 \\
\frac{8}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 5 \\
\hline
-\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 8
\end{array}
$$

*6

$$
\rightarrow
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\
\frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 4 \\
\frac{8}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 5 \\
\hline
-\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 8
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\
0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\
0 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{17}{2}
\end{array}
$$

$$\therefore\quad (x, y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) \text{ のとき、} \max w = \frac{17}{2} \text{ (最適解)}$$

$(3) w = x + y + 0u + 0v + 0s$ を max

条件　$4x + y + u = 8,\ x + 2y + v = 10,\ 10x + y + s = 15,\ x, y, u, v, s \geq 0$

$$
\begin{array}{cccccc|c}
4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\
10 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\
\hline
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cccccc|c}
4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\
\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 5 \\
10 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\
\hline
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cccccc|c}
\frac{7}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 3 \\
\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 5 \\
\frac{19}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 10 \\
\hline
-\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 5
\end{array}
\rightarrow
$$

$$
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & \frac{6}{7} \\
\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 5 \\
\frac{19}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 10 \\
\hline
-\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 5
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & \frac{6}{7} \\
0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 0 & 0 & \frac{32}{7} \\
0 & 0 & -\frac{19}{7} & \frac{6}{7} & 1 & 0 & \frac{13}{7} \\
\hline
0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 1 & \frac{38}{7}
\end{array}
$$

$$\therefore\quad (x, y) = \left(\frac{6}{7}, \frac{32}{7}\right) \text{ のとき、} \max w = \frac{38}{7} \text{ (最適解)}$$

---

*3 これは、頂点 ${}^t(0, 0, 12, 12)$ で　w=0

*4 頂点 ${}^t(0, 4, 8, 0)$ で, $w = 4$

*5 これは、頂点 ${}^t(0, 0, 5, 12, 12)$ で　w=0

*6 これは、頂点 ${}^t(0, 4, 1, 0, 5)$ で　w=8

(4)$w=3x+2y+0u+0v+$ を max

条件　$6x+15y+u=390,\ 2x+y+v=40,\ x,y,u,v,\geq 0$

$$\begin{array}{ccccc|c} 6 & 15 & 1 & 0 & 0 & 390 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 40 \\ \hline -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \to \begin{array}{ccccc|c} 6 & 15 & 1 & 0 & 0 & 390 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 20 \\ \hline -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \to \begin{array}{ccccc|c} 0 & 12 & 1 & -3 & 0 & 270 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 20 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 60 \end{array} \to$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{45}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 20 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 60 \end{array} \to \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{45}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{24} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{35}{4} \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{24} & \frac{11}{8} & 1 & \frac{285}{4} \end{array}$$

$$\therefore\quad (x,y)=\left(\frac{35}{4},\frac{45}{2}\right) \text{ のとき、} \max w=\frac{285}{4}\ \text{(最適解)}$$

(5)$w=x+2y+z+0u+0v+0s$ を max

条件　$x+y+z+u=18,\ x+3y+z+v=21,\ 3x+y+z+s=24,\ x,y,z,u,v,s\geq 0$

$$\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 18 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 21 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 24 \\ \hline -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \to \begin{array}{ccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 18 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 24 \\ \hline -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \to$$

$$\begin{array}{ccccccc|c} \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 11 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 7 \\ \frac{8}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 17 \\ \hline -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 14 \end{array} \to \begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{33}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 7 \\ \frac{8}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 17 \\ \hline -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 14 \end{array} \to$$

$$\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{33}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{39}{2} \end{array}$$

$$\therefore\quad (x,y,z)=\left(0,\frac{3}{2},\frac{33}{2}\right) \text{ のとき、} \max w=\frac{29}{2}\ \text{(最適解)}$$

上の 3 つ目から

$$\begin{array}{ccccccc|c} \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 11 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{51}{8} \\ \hline -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 14 \end{array} \to \begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{27}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{39}{8} \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{51}{8} \\ \hline 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & 1 & 14+\frac{17}{8} \end{array} \to$$

$$\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{27}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & 0 & 1 & \frac{39}{2} \end{array}$$

とし、$\max w=\frac{39}{2}$ だが、最大値を与える $(x,y,z)=(3,\frac{3}{2},\frac{27}{2})$ のように複数存在する場合もある．これはシンプレックス法の途中で複数選択可能な場合があり　別のルートを選択すれば　最大値は同じだが　とられる点が異なる場合がある。

(6)$w=2x+y+z+0u+0v+0s$ を max

条件　$x+y+z+u=18,\ x+3y+z+v=21,\ 4x+y+z+s=24,\ x,y,z,u,v,s \geq 0$

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 18 \\
1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 21 \\
4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 24 \\
\hline
-2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 18 \\
1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 21 \\
1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 6 \\
\hline
-2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\rightarrow
$$

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 12 \\
0 & \frac{11}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 15 \\
1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 6 \\
\hline
0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & 12
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 1 & 1 & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 16 \\
0 & \frac{11}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 15 \\
1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 6 \\
\hline
0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & 12
\end{array}
\rightarrow
$$

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 1 & 1 & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 16 \\
0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
1 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 2 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{12} & 1 & 20
\end{array}
\rightarrow
$$

$\therefore\ \ (x,y,z)=(2,0,16)$ のとき、$\max w = 20$ (最適解)

注 これも最適値を与える (x,y,z) の組は複数あり、$(x,y,z)=(2,\frac{3}{2},\frac{29}{2})$ もそうである。

8.6　第 6 章練習問題解答

■練習問題 6.1　(1)$c=\frac{1}{\log 2}$ (2) $E(X)=\int_1^2 x\frac{c}{x}dx=\frac{1}{\log 2}$, $E(X^2e^X)=c\int_1^2 x^2e^xdx=c[(x^2-2x+2)e^x]_1^2=\frac{(2e^2-e)}{\log 2}$

■練習問題 6.2　(1) $k=1$ を代入して　$c=24$　(2) $E(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{24}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{8}{k(k+1)(k+2)}-\frac{8}{(k+1)(k+2)(k+3)})=\frac{4}{3}$

また, $E(\frac{X(X+1)}{2})=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{24}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=2$ よって　$E(X^2)=\frac{8}{3}$, $V(X)=\frac{8}{9}$

■練習問題 6.3　(1)$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)2^{-k}=3, E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)(k+1)2^{-k}=13, \therefore V(X)=13-9=4$ (2)$E(X)=\int_0^{\infty}(t+1)e^{-t}dt=2, E(X^2)=\int_0^{\infty}(2t^2+2t)e^{-t}dt=6, \therefore V(X)=6-4=2$

■練習問題 6.4　(1) $f_{(S,T)}(s,t)=f_{(X,Y)}(x,y)|\frac{dxdy}{dsdt}|=\frac{1}{2st^2}$　$(0<\frac{1}{t}<s<t,$ $f_T(t)=\frac{\log t}{t^2}$　$(t>1)$, $f_S(s)=1/2$　$(0<s<1)$ $\frac{1}{2s^2}$　$(s>1)$

$F_{\log X}(x)=P(\log X<x)=P(X<e^x)$, $f_{\log X}(x)=f_X(e^x)e^x=e^{-x}$　$(x>0)$

(2)$f_{(S,T)}(s,t)=f_{(X,Y)}(x,y)|\frac{dxdy}{dsdt}|=\frac{1}{2}e^{-s}$　$(-s<t<s)$, $f_S(s)=se^{-s}$　$(s>0)$ $f_T(t)=\frac{1}{2}e^{-t}$　$(t>0)$ $\frac{1}{2}e^t$　$(t<0)$

$f_{T|S}(t|s)=\frac{1}{2s}$　$(-s<t<s)$

■練習問題 6.5　まず分布関数を求める。　$P(0\leqq Y\leqq 4)=1$ に注意して、　$0\leqq x\leqq 1$ のとき、$F_Y(x)=P(Y\leqq x)=P(X^2\leqq x)=P(-\sqrt{x}\leqq X\leqq\sqrt{x})=\frac{2\sqrt{x}}{3}$, $1\leqq x\leqq 4$ のとき、　$F_Y(x)=P(-\sqrt{x}\leqq X\leqq\sqrt{x}=P(-1\leqq X\leqq\sqrt{x})=\frac{\sqrt{x}+1}{3}$

これらを　x で微分して　求める密度関数 $f_X(x)$ は $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^{-1/2} & (0<x\leqq 1)\\ \frac{1}{6}x^{-1/2} & (1<x\leqq 4)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$

■練習問題 6.6　(1)2,9 (2)0,3 (3)$\frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$, $3+\frac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}$, (4)$\frac{2}{\sqrt{p}}, 3+\frac{6}{p}$

(5)0, $\frac{9}{5}$, (もちろん 3 より小さい) (6) 密度関数は　$f(x)=2x\,(0<x<1)$ で計算し歪度 $-\frac{2\sqrt{2}}{5}$, 尖度 $\frac{12}{5}$

■練習問題 6.7　(1)$P(X\geq m|X\geq n)=\frac{P(X\geq m\cap X\geq n)}{P(X\geq n)}=(1-p)^{m-n}$ (2)$P(X_1=n|X_1+X_2=m)=\frac{P(X_1=n\cap X_2=m-n)}{P(X_1+X_2=m)}=\frac{\binom{m}{n}\binom{N_1+N_2-m}{N_1-n}}{\binom{N_1+N_2}{N_1}}=\frac{\binom{N_1}{m}\binom{N_2}{m-n}}{\binom{N_1+N_2}{m}}$ (3)$P(X_1=n|X_1+X_2=m)=\frac{1}{m+1}$ (4)$P(X_1=n|X_1+X_2=m)=\binom{m}{n}(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^n(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^{m-n}$

■練習問題 6.8　$f_{\frac{X}{Y}}(x)=\int_0^{\infty}yf_X(xy)f_Y(y)dy=\int_0^{\infty}y\lambda_1e^{-\lambda_1xy}\lambda_2e^{-\lambda_2y}dy=\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1x+\lambda_2)^2}$　$(0<x)$

■練習問題 6.9　(1)$E(Y^2|X=i)=\sum_{j=1}^{N}j^2\frac{P(X=i\cap Y=j)}{P(X=i)}=\frac{\frac{i}{6}(N+1)(2N+1)+\frac{1}{4}N(N+1)^2}{i+\frac{N+1}{2}}, \therefore E(Y^2|X)=\frac{\frac{X}{6}(N+1)(2N+1)+\frac{1}{4}N(N+1)^2}{X+\frac{N+1}{2}}$ (2)$E(E(Y|X))=E(Y)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}jP(X=i\cap Y=j)=\frac{7N+5}{12}$ (3)$V(X)=\frac{(N-1)(11N+13)}{144}$ (4)$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{-(N-1)^2}{144}$

■練習問題 6.10　$X\sim Po(a)$, $P(Y=j|X=i)=\frac{P(X=i\cap Y=j)}{P(X=i)}=e^{-bi}\frac{(bi)^j}{j!}, \therefore$ $X=i$ のもとで $Y\sim Po(bi)$, よって、$E(X)=a, E(Y)=ab, E(XY)=b(a+a^2)$ より、$Cov(X,Y)=ab+ab^2-ab^2=ab, V(Y)=$

$E(bX)+V(bX)=ba+b^2a$

■練習問題 6.11　$P(X=i)=\sum_{j=0}^{i}(1-a)^2a^i=(1-a)^2(i+1)a^i \quad (i \geqq 0)$
$P(Y=j)=\sum_{i=j}^{\infty}(1-a)^2a^i=(1-a)a^j \quad (j \geqq 0)$
$P(X=i|Y=j)=(1-a)a^{i-j} \quad (i \geqq j)$
$P(Y=j|X=i)=\frac{1}{i+1} \quad (0 \leqq j \leqq i)$
条件 $Y=j$ のもとで　$X-j \sim Ge(1-a)$ より、$E(X|Y)=Y+\frac{a}{1-a}$ 条件 $X=i$ のもとで　$Y \sim DU\{0,1,\ldots i\}$ より、　$E(Y|X)=\frac{X}{2}$

■練習問題 6.12　(1)$E(X|Y)=X$ (2)$E(Y|X)=E(Y)=\mu_2$ (3)$E(X^2|X)=X^2$ (4)$E(XY|X)=XE(Y)=\mu_2X$ (5)$E(X+Y)^2|X)=X^2+2XE(Y)+E(Y^2)=X^2+2\mu_2X+\mu_2^2+\sigma_2^2$ (6)$V(X+Y|X)=V(Y)=\sigma_2^2$

■練習問題 6.13　$E(Y)=E(E(Y|X))=E(2X+1)=3, E(XY)=E(E(XY|X))=E(2X^2+X)=2(3+1)+1=9$

■練習問題 6.14　$f_X(x)=\int_0^x 24y(1-y)dy=12x^2(1-x) \quad (0 \leq x \leq 1), f_Y(y)=\int_y^1 24y(1-x)dx=12y(1-y)^2 \quad (0 \leq y \leq 1), E(X)=12\int_0^1 x^3(1-x)dx=\frac{3}{5}, E(Y)=12\int_0^1 y^2(1-y)^2dy=\frac{2}{5}, f_{Y|X}(y|x)=\frac{2y}{x^2}, f_{X|Y}(x|y)=\frac{2(1-x)}{(1-y)^2}, E(Y|X=x)=\frac{1}{x^2}\int_0^x 2y^2dy=\frac{2}{3}x, \therefore \ E(Y|X)=\frac{2}{3}X, E(X|Y=y)=\frac{1}{(1-y)^2}\int_y^1 2x(1-x)dx=\frac{1-3y^2+2y^3}{3(1-y)^2}, \therefore \ E(X|Y)=\frac{1-3Y^2+2Y^3}{3(1-Y)^2}, E(Y^2|X=x)=\frac{x^2}{2}, \therefore E(Y^2|X)=\frac{X^2}{2}$

■練習問題 6.15　$f_X(x)=e^{-x}\,(x>0),\ f_Y(y)=\frac{2y}{(1+y^2)^2}\,(y>0), E(X)=1,\ E(Y)=\int_0^{\infty}\frac{2y^2}{(1+y^2)^2}dy=\int_0^{\pi/2}\frac{2\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\pi}{2},\ f_{Y|X}(y|x)=2xye^{-xy^2},\ f_{X|Y}(x|y)=x(1+y^2)^2e^{-x(1+y^2)}, E(Y|X)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{X}},\ E(X|Y)=\frac{2}{1+Y^2},\ E(X^2|Y)=\frac{6}{(1+Y^2)^2}$

■練習問題 6.16　$f_X(x)=\frac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2}\ (0 \leq x \leq 1), E(X)=\frac{4}{\pi}\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx=\frac{4}{3\pi}, f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}), E(Y|X)=\frac{\sqrt{1-X^2}}{2}$

■練習問題 6.17　$c=\frac{1}{2},\ f_X(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)\,(0<x<\pi/2), E(X)=\frac{\pi}{4},\ f_{Y|X}(y|x)=\frac{\sin(x+y)}{\sin x+\cos x}\,(0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2})$
$E(Y|X)=\frac{(\frac{\pi}{2}-1)\sin X+\cos X}{\sin X+\cos X}$

■練習問題 6.18　(1) $\int\int_{0<y<x<\infty} e^{-2x-y}dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-3y}dy=\frac{1}{6}, c=6$　(2)$f_X(x)=6(e^{-2x}-e^{-3x})$　$(x>0)$　(3)$f_Y(y)=3e^{-3y}$　$(y>0)$　(4) $E(X)=5/6$　(5) $E(Y)=1/3$　(6)$f_{Y|X}(y|x)=\frac{e^{-2x-y}}{e^{-2x}-e^{-3x}}$　$(0<y<x)$, (7)$f_{X|Y}(x|y)=2e^{-2(x-y)}$　$(0<y<x<\infty)$　(8)$E(X|Y))=Y+1/2$ (9)$\frac{1}{4}(\because Y=y$ のもとで　$X=y+Exp(2))$ (10)$E(XY|Y)=Y(Y+1/2)$ (11)$E(XY)=E(E(XY|Y)))=E(Y^2+\frac{Y}{2})=7/18$ もちろん、直接 $E(XY)$ を計算してもよい (12)$\mathrm{Cov}(X,Y)=1/9$

■練習問題 6.19　(1)$f_{(X,Y)}(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)=xe^{-xy}e^{-x}$ (2)$f_Y(y)=\frac{1}{(1+y)^2}$　(3) $E(Y|X=x)=\int_0^{\infty}yf_{Y|X}(y|x)dy=\frac{1}{X}$　(4)$V(Y|X)=V(Exp(x))=\frac{1}{x^2}$　(5)$f_{X|Y}(x|y)=x(1+y)^2e^{-x(1+y)}$ (6)$E(X|Y)=\frac{1}{1+Y}$　(7) $V(X|Y)=E(X^2|Y)-E(X|Y)^2=\frac{2}{(1+Y)^2}$

■練習問題 6.20　(1) $E(X_2|X_1=x)=2x+1$　(2)$E(X_2)=E(E(X_2|X_1)=E(2X_1+1)=5$　(3) $V(X_2|X_1=x)=x^2$　(4) $V(X_2)=E(V(X_2|X_1))+V(E(X_2|X_1))=E(X_1^2)+V(2X_1+1)=2^2+3^2+2^23^2=49$　(5) $E(X_1X_2)=E(X_1E(X_2|X_1))=E(X_1(2X_1+1))=2(2^2+3^2)+2=28$ (6)$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=28-2*5=18$

(7)$E(X_3)=E(E(X_3|X_1,X_2))=E(3X_1+X_2)=11$　(8)$V(X_3)=E(V(X_3|X_1,X_2))+V(E(X_3|X_1,X_2))=E((X_1+X_2)^2)+V(3X_1+X_2)=381$

■練習問題 6.21　(1) $\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$　(2)$P(U_2$が最大$\cap U_3>U_4)=\frac{1}{8}$
(3) $f_{U_{(2)}}(x)=\frac{4!}{2}x(1-x)^2=12x(1-x)^2$　$U_{(2)}\sim\beta(2,3)$
(4) $E(U_{(2)})=E(\beta(2,3))=\frac{2}{5}$　(5) $V(U_{(2)})=V(\beta(2,3))=\frac{1}{25}$
(6)$f_{(U_{(3)},U_{(4)})}(x,y)=12x^2$　$(0<x<y<1)$ $(\therefore P(U_{(3)}+U_{(4)}<1)=\int_0^{1/2}dx\int_x^{1-x}12x^2dy=\frac{1}{8}$
(7) $\frac{2}{5}$

■練習問題 6.22　(1)$F_X(x)=x^2$　より、$f_{X_{(3)}}(x)=\frac{5!}{2!}2!(x^2)^2(2x)(1-x^2)^2$
(2)$E(X_{(3)})=\frac{160}{231}$　(3) $f_{(X_{(4)},X_{(5)})}(x,y)=\frac{5!}{3!}(x^2)^3(2x)(2y)=80x^7y\,(0\leqq x\leqq y\leqq 1)$　(4) $f_{X_{(4)}|X_{(5)}}(x|y)=\frac{f_{(X_{(4)},X_{(5)})}(x,y)}{f_{X_{(5)}}(y)}=\frac{8x^7}{y^8}\,(0\leqq x\leqq y)$
(5)$E(X_{(4)}|X_{(5)})=\int_0^{X_{(5)}}x\frac{8x^7}{{X_{(5)}}^8}dx=\frac{8X_{(5)}}{9}$

■練習問題 6.23$^{(*)}$　$U_1,U_2\sim U(0,1)$ とし、 $U_{(1)},U_{(2)}$ を考えると $f_{(U_{(1)},U_{(2)})}(x,y)=2$　$(0<x<y<1)$
X は $X=\begin{cases}U_{(1)} & U_{(1)}\leqq 1-U_{(2)}\\ U_{(2)} & U_{(1)}>1-U_{(2)}\end{cases}$
$0\leqq u\leqq 1$ として $F_X(u)=P(U_{(1)}\leqq x\cap U_{(1)}\leqq 1-U_{(2)})+P(U_{(2)}\leqq x\cap U_{(1)}>1-U_{(2)})$
$0\leqq u\leqq 1/2$ のとき、　$F_X(x)=P(U_{(1)}\leqq x\cap U_{(1)}\leqq 1-U_{(2)})=\int_0^u dx\int_x^{1-x}2dy=2u-u^2$
$1/2\leqq u\leqq 1$ のとき、$F_X(u)=P(X\leqq 1/2)+P(1/2<X<u)=1/2+P(1/2<U_{(2)}<u\cap U_{(1)}>1-U_{(2)})=1/2+\int_{1/2}^u dy\int_{1-y}^y 2dx=2u^2-2u+1$

■練習問題 6.24　(1) $f_R(u)=2(2-1)\int_0^{2\pi-u}(F_U(u+x)-F_U(x))^{2-2}f_U(u+x)f_U(x)dx=\frac{2\pi-u}{(2\pi)^2}$

(2) $Y=\begin{cases}R & R\leqq\pi\\ 2\pi-R & R>\pi\end{cases}$
より、$E(Y)=E(R,R\leqq\pi)+E(2\pi-R,R>\pi)=\int_0^\pi u\frac{2\pi-u}{(2\pi)^2}du+\int_\pi^{2\pi}(2\pi-u)\frac{2\pi-u}{(2\pi)^2}du=\frac{\pi}{2}$

■練習問題 6.25　(1) 対称性より明らかにどちらも $\frac{1}{120}$ (2)1,2,3 どうし 4,5 どうしは入れ替えてもよいので求める確率=$3!2!P(X_1<X_2<X_3<X_4<X_5)=\frac{1}{10}$

■練習問題 6.26　(1) $F_{X_{(n)}}(x)=F(x)^n$ より、　$f_{X_{(n)}}(x)=nF(X)^{n-1}f(x)$　(2) $F_{X_{(1)}}(x)=1-(1-F(x))^n$ より、　$f_{X_{(1)}}(x)=n(1-F(x))^{n-1}f(x)$
(3)$f_{X_{(i)}}(x)=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}F(x)^{i-1}f(x)(1-F(x))^{n-i}$ (4)$f_{X_{(i)},X_{(j)}}(x,y)=\frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}F(x)^{i-1}f(x)(F(y)-F(x))^{j-i-1}f(y)(1-F(x))^{n-j}$
(5)$f_{X_{(n)}-X_{(1)}}(x)=\int_{-\infty}^\infty f_{X_{(1)},X_{(n)}}(u,x+u)du=n(n-1)\int_{-\infty}^\infty f(u)(F(x+u)-F(u))^{n-2}f(x+u)du$
(6) $F_{Y_{i,n}}(x)=P_{Y_{i,n}}(x)=P(F(X_{(i)})\leqq x)=P(X_{(i)}\leqq F^{-1}(x))$ よって　$f_{Y_{i,n}}(x)=f_{X_{(i)}}(F^{-1}(x))(F^{-1}(x))'=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}(F(F^{-1}(x))^{i-1}f(F^{-1}(x))(1-F(F^{-1}(x))^{n-i}(F^{-1}(x))'=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}x^{i-1}(1-x)^{n-i}$　$(\because F(F^{-1}(x))=x$ の両辺を x で微分して　$f(F^{-1}(x))(F^{-1}(x))'=1)$ $\therefore Y_{i,n}\sim\beta(i,n-i+1)$ $\therefore E(Y_{i,n})=\frac{i}{n+1}$
別解　F は単調増加なので, $Y_{i,n}=F(X_1),F(X_2),\dots,F(X_n)$ の　第 i 位順序統計量=$U_1,U_2,\dots,U_n$ ($U_i\sim U(0,1)$ で独立) の　第 i 位順序統計量　$\sim\beta(i,n-i+1)$
(8) $F_{Z_{n,n}}(n-x)=P(Z_{n,n}\leqq n-x)=P(Y_{n,n}\leqq 1-x/n)=\int_0^{1-x/n}nu^{n-1}du=(1-\frac{x}{n})^n$
$\therefore\lim_{n\to\infty}F_{Z_{n,n}}(n-x)=e^{-x}$　(つまり、$n-Z_{n,n}=n(1-Y_{n,n})\xrightarrow[n\to\infty]{}Exp(1))$

(9) $F_{Z_{1,n}}(x) = P(Y_{1,n} \leqq x/n) = 1-(1-x/n)^n \underset{n\to}{\longrightarrow} 1-e^{-x}$ (つまり $Z_{1,n} \underset{n\to}{\longrightarrow} Exp(1)$)

■練習問題 6.27 $(1)\bar{F}_X(t) = \exp\{-Ct - \frac{A}{B+1}t^{B+1}\}, {}_tp_x = \exp\{-Ct - \frac{A}{B+1}((x+t)^{B+1} - x^{B+1})\}$
$(2)\bar{F}_X(t) = (t+B)^{-A(t+B)}B^{AB}e^{-t(C-A)}, {}_tp_x = (x+t+B)^{-A(t+x+B)}(x+B)^{A(x+B)}e^{-t(C-A)}$

■練習問題 6.28 $(1)\frac{T-x}{2}, \frac{(T-x-n)^2}{2(T-x)}$
$(2)\frac{1}{\lambda}, \frac{e^{-n\lambda}}{\lambda}$
$(3)\frac{(T-x)(2T+x)}{3(T+x)}, \frac{1}{T^2-x^2}(T^2n - \frac{1}{3}(x+n)^3 - \frac{1}{3}x^3)$
$(4)\frac{T-x}{3}, \frac{(T-x-n)^2(2T+x+n)}{3(T^2-x^2)}$
$(5)\frac{1}{2\lambda}, \frac{e^{-2n\lambda}}{2\lambda}$
$(6)\frac{\frac{2e^{-\lambda x}}{\lambda} - \frac{e^{-2\lambda x}}{2\lambda}}{1-(1-e^{-\lambda x})^2}, \frac{\frac{2e^{-\lambda(x+n)}}{\lambda} - \frac{e^{-2\lambda(x+n)}}{2\lambda}}{1-(1-e^{-\lambda x})^2}$

■練習問題 6.29 $(1)\frac{2t}{1-t^2}$ $(2)\ \frac{1}{t}$ $(3)2t$

■練習問題 6.30 $(1)1-\frac{1}{1+t}$ $(2)1-e^{-t^2}$ $(3)1-e^{t^4/4}$ $(4)1-e^{e^{-t}-1}$ *7

■練習問題 6.31 $\bar{F}_X(t) = e^{-\int_0^t as^3ds} = e^{-at^4/4}$ よって $e^{-a4^4/4} = 1/2$ より、$a = \frac{\log 2}{4^3}$
$\bar{F}_X(6) = e^{-a6^4/4} = (\frac{1}{2})^{(\frac{3}{2})^4}$

■練習問題 6.32 $f_X(t) = \begin{cases} (1-t)e^{-t+t^2/2} & (0 \leqq t \leqq 1) \\ (t-1)e^{t-t^2/2-1} & (t \geqq 1) \end{cases}$
$m = 1 + \sqrt{log4 - 1}$

■練習問題 6.33 $P(X>1) = e^{-\int_0^1 \frac{1}{2}ds} = e^{\frac{-1}{2}}, P(X>2) = e^{-\int_0^1 \frac{1}{2}ds + \int_1^2 sds} = e^{-2}$
上よりメディアンは 1 と 2 の間にあることがわかるので $\int_1^m sds = \log 2 - \frac{1}{2}$ より $m = \sqrt{2\log 2}$

■練習問題 6.34 $\max(X_1,\ldots,X_n) \sim Be(1-(1-p_1)\cdots(1-p_n)), \min(X_1,\ldots,X_n) \sim Be(p_1\cdots p_n)$

■練習問題 6.35 $Y_i = 1(\text{if} X_i = 0 \cap X_{i+1} = 1), 0(\text{otherwise})$ とすると、$E(Y_i) = p(1-p)$ より、$E(Y) = E(Y_1+\cdots+Y_{n-1}) = (n-1)p(1-p)$, また、$E(Y_i^2) = p(1-p), V(Y_i) = p(1-p)(1-p+p^2), E(Y_iY_{i+1}) = 0$ より、$Cov(Y_i, Y_{i+1}) = -p^2(1-p)^2$, 独立性より, $Cov(Y_i, Y_j) = 0$ ($|i-j| \geq 2$ のとき) となるので, $V(Y) = V(Y_1)+\cdots+V(Y_{n-1})+2Cov(Y_1,Y_2)+\cdots+2Cov(Y_{n-2},Y_{n-1}) = p(1-p)((3p^2-3p+1)n-5p^2+5p-1)$

■練習問題 6.36 $X \sim B(n,\frac{1}{2}), Y \sim B(n,\frac{5}{18}), E(X) = \frac{1}{2}n, V(X) = \frac{1}{4}n, E(Y) = \frac{5}{18}n, V(Y) = \frac{65}{324}n, E(X_iY_i) = \frac{1}{4}$ より、$Cov(X_i,Y_i) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{18} = \frac{1}{9} \therefore Cov(X,Y) = nCov(X_i,Y_i) = \frac{1}{9}n$
$\max(Y-3,0)+\min(Y-3,0) = Y-3$ より、期待得点$=E(\max(Y-3,0)) = E(Y-3) - E(\min(Y-3,0)) = \frac{5n}{18} - 3 + 3(\frac{13}{18})^n + 2n(\frac{5}{18})(\frac{13}{18})^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}(\frac{5}{18})^2(\frac{13}{18})^{n-2}$

■ 練習問題 6.37

事象 A が起こる確率は $\frac{5}{8}$ なので、 $E(X) = E(2^{B(n,\frac{5}{8})}) = (\frac{3}{8} + 2*\frac{5}{8})^n = (\frac{13}{8})^n$, $E(X^2) = E(4^{B(n,\frac{5}{8})}) = (\frac{23}{8})^n$
, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (\frac{23}{8})^n - (\frac{13}{8})^{2n}$
$E(Y) = E(\max(B(n,\frac{5}{8})-2,0)) = E(B(n,\frac{5}{8})-2) - E(\min(B(n,\frac{5}{8})-2,0)) = \frac{5}{8}-2-(-2(\frac{3}{8})^n - n\frac{5}{8}(\frac{3}{8})^{n-1})$
$E(Y^2) = E((B(n,\frac{5}{8})-2-\min(B(n,\frac{5}{8})-2,0))^2) = V(B(n,\frac{5}{8}))+E(B(n,\frac{5}{8}))^2-2(B(n,\frac{5}{8}-2)\min(B(n,\frac{5}{8})-2,0)+(\min(B(n,\frac{5}{8})-2,0))^2) = \frac{15n}{64} + \frac{25n^2}{64} - \frac{5n}{2} + 4 - 4(\frac{3}{8})^n - n\frac{5}{8}(\frac{3}{8})^{n-1}$

*7 本問は $F_X(\infty) = 1-e^{-1} < 1$ となってしまうが, これは $P(X=\infty) = e^{-1}$ と解釈する。

$E(Z)=\sum_{i=1}^n E(2^i\xi_i)=\sum_{i=1}^n \frac{5}{4}(2^n-1)$
$V(Z)=\sum_{i=1}^n V(2^i\xi_i)=\sum_{i=1}^n 4^i\frac{15}{64}=\frac{5}{16}(4^n-1)$, ここで $\xi\sim Be(\frac{5}{8})$ で独立

■練習問題 6.38 $n+1-X\sim X, n-Y\sim Y$ で X,Y は独立 より、 $P(X>Y)=P(n+1-X>n-Y)=P(Y+1>X)=P(Y\geqq X)$, $\therefore P(X>Y)=\frac{1}{2}$

■練習問題 6.39 (1)$P(XY\leqq 4)+P(X\leqq 2)-P(XY\leqq 4\cap X\leqq 2)=\frac{8}{N^2}+\frac{2}{N}-\frac{6}{N^2}=\frac{2(N+1)}{N^2}$ (2)$\frac{N+1}{2}$
(3)$\sum_{k=1}^N k^2\frac{1}{N}=\frac{(N+1)(2N+1)}{6}$, $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{N^2-1}{12}$
(4)$\frac{(N+1)(N+2)}{3}$ (5)$\frac{1}{N+1}$ (6) $\frac{N+3}{4(N+1)(N+2)}$ (7)$\frac{3^{N+1}-3}{2N}$
(8) $P(X\leqq k)P(Y\leqq k)=\frac{k^2}{N^2}$ (9)$\frac{2k-1}{N^2}$
(10)$\frac{(N-k+1)^2}{N^2}$ (11)$\frac{2(N-k)+1}{N^2}$
(12)$\frac{(N+1)(4N-1)}{6N}$ (13)$\frac{(N+1)(N-1)(2N^2+1)}{36N^2}$
(14)$\frac{(N+1)(2N+1)}{6N}$ (15)$P(X\geqq k)=\sum_{l=k}^N\frac{1}{N}=\frac{N-k+1}{N}$, $E(X,X\geqq k)=\sum_{l=k}^N l\frac{1}{N}=\frac{1}{N}\frac{k+N}{2}(N-k+1)$,$\therefore$ $E(X|X\geqq k)=\frac{E(X,\geqq k)}{P(X\geqq k)}=\frac{k+N}{2}$
(16)$P(X\leqq k)=\frac{k}{N}$, $E(X^2,X\leqq k)=\sum_{l=1}^N l^2\frac{1}{N}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6N}$, $\therefore E(X|X\leqq k)=\frac{(k+1)(2k+1)}{6}$
(17) $P(X\geqq Y)=\sum_{k=1}^N P(k\geqq Y)P(X=k)=\frac{N+1}{2N}$, $E(X,X\geqq Y)=\sum_{k\geqq l\geqq 1}kP(X=k\cap Y=l)=\sum_{k=1}^N k^2\frac{1}{N^2}=\frac{(N+1)(2N+1)}{6N}$,$\therefore E(X|X\geqq Y)=\frac{2N+1}{3}$
(18) $\frac{N(N+1)}{2}$ (19)$X+E(Y)=X+\frac{N+1}{2}$
(20)$E(X|X+Y)=E(Y|X+Y)$ より、 $E(X|X+Y)=\frac{E(X|X+Y)+E(Y|X+Y)}{2}=\frac{E(X+Y|X+Y)}{2}=\frac{X+Y}{2}$

■練習問題 6.40 (1)$P(XY\leqq 4)+P(X\leqq 2)-P(XY\leqq 4\cap X\leqq 2)=\frac{6}{N(N-1)}+\frac{2}{N}-\frac{4}{N(N-1)}=\frac{2}{N-1}$
(2)$\frac{N+1}{2}$
(3)$\sum_{k=1}^N k^2\frac{1}{N}=\frac{(N+1)(2N+1)}{6}$, $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{N^2-1}{12}$
(4)$\frac{(N+1)(N+2)}{3}$ (5)$\frac{1}{N+1}$ (6) $\frac{N+3}{4(N+1)(N+2)}$ (7)$\frac{3^{N+1}-3}{2N}$
(8) $P\frac{k(k-1)}{N(N-1)}$ (9)$\frac{k(k-1)-(k-1)(k-2)}{N(N-1)}=\frac{2(k-1)}{N(N-1)}$
(10)$\frac{(N-k)(N-k+1)}{N(N-1)}$ (11)$\frac{2(N-k)}{N(N-1)}$
(12)$\frac{2(N+1)}{3}$ (13)$E(\max(X,Y)(\max(X,Y)+1))=\frac{(N+1)(N+2)}{2}$, $V(\max(X,Y))=E(\max(X,Y)(\max(X,Y)+1))-E(\max(X,Y))-E(\max(X,Y))^2=\frac{(N+1)(N-2)}{18}$
(14)$\frac{N+1}{3}$ (15)$P(X\geqq k)=\sum_{l=k}^N\frac{1}{N}=\frac{N-k+1}{N}$, $E(X,X\geqq k)=\sum_{l=k}^N l\frac{1}{N}=\frac{1}{N}\frac{k+N}{2}(N-k+1)$,$\therefore$ $E(X|X\geqq k)=\frac{E(X,\geqq k)}{P(X\geqq k)}=\frac{k+N}{2}$
(16)$P(X\leqq k)=\frac{k}{N}$, $E(X^2,X\leqq k)=\sum_{l=1}^N l^2\frac{1}{N}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6N}$,$\therefore E(X|X\leqq k)=\frac{(k+1)(2k+1)}{6}$
(17) $P(X\geqq Y)=\sum_{k=1}^N P(k>Y)P(X=k)=\frac{1}{2}$, $E(X,X\geqq Y)=\sum_{k>l\geqq 1}kP(X=k\cap Y=l)=\sum_{k=1}^N k(k-1)\frac{1}{N(N-1)}=\frac{N+1}{3}$,$\therefore E(X|X\geqq Y)=\frac{2(N+1)}{3}$
(18) $\frac{(N+1)(3N+2)}{6}$ (19)$E(Y|X=k)=\sum_{l\neq k}l\frac{P(Y=l\cap X=k)}{P(X=k)}=\frac{1}{N-1}(\frac{N(N+1)}{2}-k)$, $E(Y|X)=\frac{1}{N-1}(\frac{N(N+1)}{2}-X)$, $E(X+Y|X)=X+\frac{1}{N-1}(\frac{N(N+1)}{2}-X)$

■練習問題 6.41 (1)$\frac{6}{N^3}$ (2)$\frac{3}{N^3}$ (3)$P(\max(X,Y,Z)>k)=1-P(\max(X,Y,Z)\leqq k)=1-\frac{k^3}{N^3}$, $E(\max(X,Y,Z)=\sum_{k=0}^N P(\max(X,Y,Z)>k)=\sum_{k=0}^N(1-\frac{k^3}{N^3})=\frac{(N+1)(3N-1)}{4N}$
(4)$\sum_{k=1}^N P(X+Y=k)P(Z=k)=\sum_{k=1}^N(k-1)\frac{1}{N^3}=\frac{N-1}{2N^2}$
(5)$\sum_{k=1}^N P(X+Y\leqq k)P(Z=k)=\sum_{k=1}^N k(k-1)\frac{1}{2N^3}=\frac{(N+1)(N-1)}{6N^2}$
(6)$P(X\geqq Y+Z)=\frac{(N+1)(N-1)}{6N^2}$, $E(X,X\geqq Y+Z)=\sum_{l=1}^N lP(X=l)P(Y+Z\leqq l)=\frac{(N+1)(N-1)(3N+2)}{24N^2}$, $E(X|X\geqq Y+Z)=\frac{3N+2}{4}$
(7)$Y+Z+E(X)=Y+Z+\frac{N+1}{2}$ (8)$\frac{X+Y+Z}{3}$

■練習問題 6.42 (1)$\{1,2,3\}$ だけなので求める確率$=\frac{1}{\binom{N}{3}}$ (2)$\{1,2,6\}$ と $\{1,3,4\}$ だけなので求める確率$=\frac{2}{\binom{N}{3}}$ (3) $E(X_i)=\sum_{k=1}^{N}kP(X_i=k)=\frac{1}{N}\frac{N(N+1)}{2}=\frac{N+1}{2}$, $E(X_i^2)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}k^2=\frac{(N+1)(2N+1)}{2}$, $V(X_i)=\frac{N^2-1}{12}$ (4)$E(X_1,X_1>X_2,X_1>X_3)=$

$$\frac{1}{N(N-1)(N-2)}\sum_{1\leqq l<k\leqq N,1\leqq m<k\leqq N,l\neq m}k=\frac{1}{N(N-1)(N-2)}\sum_{k=1}^{N}k(k-1)(k-2)=\frac{N+1}{4}$$

また、$P(X_1>X_2,X_1>X_3)=\frac{1}{3}$ つまり、$E(X_1|X_1>X_2,X_1>X_3)=\frac{3(N+1)}{4}$ (5) $E(X_1,X_2<X_1<X_3)=$

$$\frac{1}{N(N-1)(N-2)}\sum_{1\leqq k<l<m\leqq N}l=\frac{1}{N(N-1)(N-2)}\sum_{l=2}^{N-1}(l-1)l(N-l)=\frac{N+1}{12}$$

(4) $i\neq j$ として $E(X_iX_j)=\frac{1}{N(N-1)}\sum_{k\neq l}kl=\frac{(N+1)(3N+2)}{12}$, $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=-\frac{N+1}{12}$, $\rho(X_i,X_j)=\frac{-1}{N-1}$, $V(X_1+X_2+X_3)=3V(X_1)+6\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=\frac{(N+1)(N-3)}{4}$

(3)$P(X_{(1)}\geqq k)=\frac{\binom{N-k+1}{3}}{\binom{N}{3}}$ $(1\leqq k\leqq N-2)$, $E(X_{(1)})=\sum_{k=1}^{N-2}\frac{\binom{N-k+1}{3}}{\binom{N}{3}}=\frac{1}{\binom{N}{3}}\sum_{l=3}^{N}\binom{l}{3}=\frac{\binom{N+1}{4}}{\binom{N}{3}}=\frac{N+1}{4}$

$P(X_{(2)}=k)=\frac{(k-1)(N-k)}{\binom{N}{3}}$ $(2\leqq k\leqq N-1)$, $E(X_{(2)})=\sum_{k=2}^{N-1}k\frac{(k-1)(N-k)}{\binom{N}{3}}=\frac{1}{\binom{N}{3}}\sum_{k=2}^{N-1}k(k-1)(N-2-(k-2))=\frac{1}{\binom{N}{3}}((N-2)\frac{N(N-1)(N-2)}{3}-\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4})=\frac{N+1}{2}$

$P(X_{(3)}\leqq k)=\frac{\binom{k}{3}}{\binom{N}{3}}$, $\therefore$ $P(X_{(3)}=k)=\frac{\binom{k}{3}-\binom{k-1}{3}}{\binom{N}{3}}$, $E(X_{(3)})=\frac{1}{\binom{N}{3}}\sum_3^N k(\binom{k}{3}-\binom{k-1}{3})=\frac{1}{\binom{N}{3}}\sum_3^N((k+1)\binom{k}{3}-\binom{k}{3}-k\binom{k-1}{3}))=\frac{3(N+1)}{4}$

(注意 $X_{(1)}$ には しっぽ定理が有効だが、 $X_{(2)},X_{(3)}$ は、しっぽ確率が複雑になるので しっぽ定理は有効ではない。 また いずれにしても $\sum(k+1)k(k-1)(k-2)$ や $\sum k(k-1)(k-2)$ などの計算に持ち込むのが筋である。)

■練習問題 6.43 大のサイコロが最初に 6 の目が出るまでの回数$=X_1$, 小のサイコロが最初に 6 の目が出るまでの回数$=X_2$ とおくと、 X_1,X_2 は独立で $X=\max(X_1,X_2)$ となる。$X_1 \sim X_2Fs(1/6),\min(X_1,X_2)\sim Fs(11/36)$ $P(X\leqq k)=(P(X_1\leqq k)^2=(1-(\frac{5}{6})^k)^2$ $E(X)=E(X_1+X_2)-E(\min(X_1,X_2))=6+6-\frac{36}{11}=\frac{96}{11}$

■練習問題 6.44 (1)$P(C_1\geqq k)=\sum_{l=k}^{\infty}P(C_1=l)=\sum_{l=k}^{\infty}p_1(1-p_1)^l=\frac{p_1(1-p_1)^k}{1-(1-p_1)}=(1-p_1)^k$

(2)$P(C_1=C_3)=\sum_{k=0}^{\infty}P(C_1=C_3=k)=\sum_{k=0}^{\infty}p_1(1-p_1)^kp_2(1-p_2)^k=\frac{p_1p_2}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$

(3) $E(C_1+C_3|C_3)=E(C_1|C_3)+E(C_3|C_3)=E(C_1)+C_3=\frac{1-p_1}{p_1}+C_3$

(4) $P(C_1+C_2=l)=\sum_{k=0}^{l}P(C_1=k\cap C_2=l-k)=\sum_{k=0}^{l}P(C_1=k)P(C_2=l-k)=\sum_{k=0}^{l}p_1(1-p_1)^kp_1(1-p_1)^{l-k}=\sum_{k=0}^{l}(p_1)^2(1-p_1)^l=(l+1)(p_1)^2(1-p_1)^l$

$$\therefore P(C_1=k|C_1+C_2=l)=\frac{P(C_1=k\cap C_2=l-k)}{P(C_1+C_2=l)}=\frac{1}{l+1}\quad(k=0,1,\dots l)$$

$$\therefore E(C_2|C_1+C_2=l)=\sum_{k=0}kP(C_2=k|C_1+C_2=l)=\frac{l}{2},\quad E(C_2|C_1+C_2)=\frac{C_1+C_2}{2}$$

(注意 1 $C_1+C_2\sim NB(2,p_1)$ となるので、 $P(C_1+C_2=l)=P(NB(2,p_1)=l)=\binom{2+l-1}{l}p_1^2(1-p_2)^l=$

$(l+1)p_1^2(1-p_2)^l$ としてもよい。)
(注意 2 $C_1+C_2=l$ のもとで、$C_2 \sim DU\{0,1,\dots l\}$ である。)

(注意 3) 対称性を用いて $E(C_1|C_1{+}C_2)=E(C_2|C_1{+}C_2), \therefore E(C_2|C_1{+}C_2)=\frac{E(C_1|C_1+C_2)+E(C_2|C_1+C_2)}{2}=\frac{E(C_1+C_2|C_1+C_2)}{2}=\frac{C_1+C_2}{2}$ としてもよく, これは独立同分布な確率変数すべてで成立することである。

(5) $E({C_2}^2|C_1+C_2=l)=\sum_{k=0}^{l}k^2P(C_2=k|C_1+C_2=l)=\dfrac{l(2l+1)}{6}$, $\quad V(C_2|C_1+C_2)=E(C_2^2|C_1+C_2)-(E(C_2|C_1+C_2))^2=\dfrac{(C_1+C_2)(C_1+C_2+2)}{12}$

(6) $E(2^{C_2}|C_1+C_2=l)=\sum_{k=0}2^kP(C_2=k|C_1+C_2=l)=\dfrac{2^{l+1}-1}{l+1}$, $\quad E(2^{C_2}|C_1+C_2)=\dfrac{2^{C_1+C_2+1}-1}{C_1+C_2+1}$

(7)$P(C_1\geqq 2C_3{+}1)=\sum_{k=0}^{\infty}P(C_1\geqq 2k{+}1\cap C_3=k)=\sum_{k=0}^{\infty}(1{-}p_1)^{2k+1}p_2(1{-}p_2)^k=\dfrac{(1-p_1)p_2}{1-(1-p_1)^2(1-p_2)}$

(8)$P(C_1\geqq 2C_3-1)=\sum_{k=1}^{\infty}P(C_1\geqq 2k-1\cap C_3=k)+P(C_1\geqq 0\cap C_3=0)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-p_1)^{2k-1}p_2(1-p_2)^k+p_2=\dfrac{(1-p_1)p_2(1-p_2)}{1-(1-p_1)^2(1-p_2)}+p_2$

(9)$P(C_1+C_2\leqq C_3)=\sum_{k=0}^{\infty}P(C_3\geqq k\cap C_1+C_2=k)=\sum_{k=0}^{\infty}P(C_3\geqq k)P(C_1+C_2=k)=\sum_{k=0}^{\infty}(1-p_2)^kP(C_1+C_2=k)=E((1-p_2)^{C_1+C_2})=E((1-p_2)^{C_1})E((1-p_2)^{C_2})=(\dfrac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)})^2$

(少し別の書き方 1) $P(C_1+C_2\leqq C_3)=\sum_{x+y\leqq z}p_1(1-p_1)^xp_1(1-p_1)^yp_2(1-p_2)^z=\sum_{x,y}p_1(1-p_1)^xp_1(1-p_1)^y\sum_{z=x+y}^{\infty}p_2(1{-}p_2)^z=\sum_{x,y}p_1(1{-}p_1)^xp_1(1{-}p_1)^y(1{-}p_2)^{x+y}=\sum_{x}^{\infty}p_1((1{-}p_1)(1{-}p_2))^x\sum_{y}^{\infty}p_1(1{-}p_1)^{x+y}=(\dfrac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)})^2$

(少し別の書き方 2) $P(C_1+C_2\leqq C_3)=E(P(C_1+C_2\leqq C_3|C_1+C_2))=E((1-p_2)^{C_1+C_2})$

■練習問題 6.45 $E(t^{2A+B})=E(t^{2A})E(t^B)=\frac{1-(1-p)^2}{1-(1-p)^2t^2}\left(\frac{(1-p)t}{1+1+p}+\frac{1}{1+1-p}\right)=\frac{p}{1-(1-p)t}\therefore 2A+B\sim Ge(p)$

■練習問題 6.46 $E(X)=N(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N})\because X=1+Fs(\frac{N-1}{N})+\cdots+Fs(\frac{1}{N})$

■練習問題 6.47 $X_1\sim X_2\sim Ge(p)$ で独立として $\alpha=P(X_1\leqq 1\cup X_2\leqq 1|H_0)=1-P(Ge(1/6)\geqq 1)^2=1-(\frac{5}{6})^4=\frac{671}{1296}$
$\beta=P(X_1\geqq 2\cap X_2\geqq 2|H_1)=(\frac{1}{6})^4=\frac{1}{1296}, 1-\beta=\frac{1295}{1296}$

■練習問題 6.48 $P(T=k)=\begin{cases}0 & k=1\\ (\frac{5}{6})^{k-2}\frac{1}{6} & k\geqq 2\end{cases}$
$\therefore T-1\sim Fs(\frac{1}{6}), E(T)=1+6=7, V(T)=V(Fs(1/6)=30$

■練習問題 6.49 $T\sim NB(n+1,1/2)$, $E(T)=n+1$, $V(T)=2(n+1)$
$0\leqq k\leqq n$ として、$P(\min(T,T')=k)=2*P((k,n)$ から右に 1 進む。$)=2\binom{n+k}{k}(\frac{1}{2})^{n+k}*\frac{1}{2}=\binom{n+k}{k}(\frac{1}{2})^{n+k}$

*8

■**練習問題** 6.50 $X \sim NB(4, \frac{1}{6}) + 4, E(X) = 24, V(X) = 120, E(Y|X) = \frac{7}{2}X, V(Y|X) = \frac{35}{12}X, E(Y) = \frac{7}{2} \cdot 24 = 84, V(Y) = \frac{35}{12} \cdot 24 + \frac{49}{4} \cdot 120 = 1540$

■**練習問題** 6.51 $P(Po(70 \cdot \frac{1}{100}) = 0) = e^{-0.7}\frac{(0.7)^0}{0!} \doteqdot \frac{1}{2}$

■**練習問題** 6.52 $Po(5)$ のモードは、4 と 5

■**練習問題** 6.53 $E(t^Y) = E(E(t^Y|X)) = E(e^{X(t-1)}) = \frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_1+1}}{1-\frac{1}{\lambda_1+1}t}, \therefore Y \sim Ge(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+1})$

■**練習問題** 6.54 $P(Y = k) = \frac{1}{a}\int_0^a \frac{x^k}{k!}e^{-x}dx = \frac{1}{ak!}[(-x^k - kx^{k-1} - \cdots - k!)e^{-x}]_0^a = \frac{1}{a}(1 - \sum_{l=0}^k \frac{a^l}{l!}e^{-a})$
$E(Y|X) = E(Po(x))|_{x=X} = X, V(Y|X) = V(Po(x))|_{x=X} = X, E(Y) = E(E(Y|X) = E(X) = \frac{a}{2}, V(Y) = E(V(Y|X)) + V(E(Y|X)) = E(X) + V(X) = \frac{a}{2} + \frac{a^2}{12}$

■**練習問題** 6.55 $HG(20, 8, 5)$ のモードは 2

■**練習問題** 6.56 $X_i = 1$(i 回目の試行で番号 i), 0(i 回目の試行で番号が i でない) とおくと $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N, E(X_1) = \frac{1}{N}, V(X_1) = \frac{N-1}{N^2}, Cov(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) = \frac{1}{N(N-1)} - (\frac{1}{N})^2 = \frac{1}{N(N-1)}, E(X) = NE(X_1) = 1, V(X) = NV(X_1) + N(N-1)\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 1$

■**練習問題** 6.57 $(1) 3/4 + 1/2 - 3/4 * 1/2 = 7/8$ (補集合でもよい。) $(2) (1/2)(1/4 + 1) = 5/8$(図を書く)
(3)$\int_0^1 xe^{xu}du = e^x - 1$ より、$e^{U_1} - 1$ (4) $\int_0^1 (e^x - 1)dx = e - 2$ (5)$\int_0^1 dx \int_0^{x^2}(x^2 - y)dy + \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}}(y - x^2)dx = \frac{11}{30}$
(別解 $E(|U_1 - U_2^2|) = 2E(\max(U_1, U_2^2)) - E(U_2^2) - E(U_1) = 2\int_0^1 (1 - P(\max(U_1, U_2^2) < t))dt = \int_0^1 (1 - x^{3/2})dx - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{11}{30}$
(6)$E(U_1 - U_2^2)^2) = E(U_1^2 - 2U_1U_2^2 + U_2^4) = \frac{1}{5}, V((U_1 - U_2^2) = \frac{1}{5} - (\frac{11}{30})^2 = \frac{59}{900}$

■ **練習問題** 6.58 $P(Y \geqq k) = \int_0^1 P(Y \geqq k|X = x)f_X(x)dx = \int_0^1 (1 - x)^k dx = \frac{1}{k+1}$
$P(Y = k) = P(Y \geqq k) - P(Y \geqq k + 1) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ $(k = 0, 1, 2 \dots)$

■ **練習問題** 6.59 $P(Y = k) = \int_0^1 P(Y = k|X = x)f_X(x)dx = \int_0^1 \binom{k+2}{2}x^3(1 - x)^k dx = \frac{3}{(k+3)(k+4)}$
(注意 同様に $X \sim U(0, 1)$ かつ $X = x$ のもとで $Y \sim NB(\alpha, x)$ のときは $P(Y = k) = \frac{\alpha}{(\alpha+k)(\alpha+1+k)}$ となる。

■**練習問題** 6.60 (1)$\int_t^\infty \lambda e^{-\lambda u}du = e^{-\lambda t}$
(2)$\int_0^\infty P(2M_2 < M_1 < 5M_2|M_2 = t)f_{M_2}(t)dt = \int_0^\infty P(2t < M_1 < 5t)\lambda e^{-\lambda t}dt = \int_0^\infty (e^{-2\lambda t} - e^{-5\lambda t})\lambda e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{6}$
(3)$2M_1 + E(M_2|M_1) = 2M_1 + E(M_2) = 2M_1 + \frac{1}{\lambda}$
(4)$V(2M_1|M_2) = V(2M_1) = \frac{4}{\lambda^2}$
(5) $P(M_1 > 2M_2 + 1) = \int_0^\infty P(M_1 > 2u + 1|M_2 = u)f_{M_2}(u)du = \int_0^\infty P(M_1 > 2u + 1)f_{M_2}(u)du = \int_0^\infty e^{-\lambda(2u+1)}\lambda e^{-\lambda u}du = \frac{e^{-\lambda}}{3}$
(6) $P(M_1 > 2M_2 - 1) = \int_0^\infty P(M_1 > 2u - 1|M_2 = u)f_{M_2}(u)du = \int_0^\infty P(M_1 > 2u - 1)f_{M_2}(u)du = \int_0^{1/2} \lambda e^{-\lambda u}du + \int_{1/2}^\infty e^{-\lambda(2u-1)}\lambda e^{-\lambda u}du = 1 - (\frac{2}{3})e^{-\frac{\lambda}{2}}$

*8 この分布は バナッハのマッチ箱といわれる問題の解である。

■練習問題 6.61　(1)$E(X^4)=\frac{24}{\lambda^4}$
(2)$P(X_3\geq 2X_1+1)=\int_0^\infty P(X_3\geq 2x+1)f_{X_1}(x)dx=\int_0^\infty e^{-\lambda_2(2x+1)}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}dx=\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2}}{\lambda_1+2\lambda_2}$
(3)$P(X_3\geq 2X_1-1)=P(X_1<\frac{1}{2})+\int_0^\infty P(X_3\geq 2x-1)f_{X_1}(x)dx=1-e^{-\frac{1}{2}\lambda_1}+\frac{\lambda_1 e^{-\frac{1}{2}\lambda_1}}{\lambda_1+2\lambda_2}$
(4)$P(X_3\geq 2X_1+X_2)=E(P(X_3\geq 2X_1+X_2|X_2))=E(\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 X_2}}{\lambda_1+2\lambda_2})=\frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1+2\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2)}$
(5)$P([X_1]=k)=\int_k^{k+1}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}dx=e^{-\lambda_1 k}(1-e^{-\lambda_1})$
(6)$P(\{X_1\}\leq k)=\sum_{k=0}^\infty\int_k^{k+x}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}dt=\sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda_1 k}(1-e^{-\lambda_1 x})=\frac{1-e^{-\lambda_1 x}}{1-e^{-\lambda_1}}$
$\therefore f_{\{X_1\}}(x)=\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}}{1-e^{-\lambda_1}}\ (0<x<1)$
(7)$E(X_1|X_1+X_2)=\frac{X_1+X_2}{2}$
(8)$V(X_1|X_1+X_2)=\frac{(X_1+X_2)^2}{12}$
(注意　$[X_1]$ と $\{X_1\}$ は独立.)

■練習問題 6.62　一般に $f_Y(y)=\int f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx$ なので $f_{Y|X}(y|x)=xe^{-xy}, f_Y(y)=\int_0^a xe^{-xy}\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda}{(\lambda+y)^2}\ (0<y)$

■練習問題 6.63　$f_{Y|X}(y|x)=xe^{-xy}, f_Y(y)=\int_0^a xe^{-xy}\cdot\frac{1}{a}dx=\frac{1}{ay^2}\int_0^{ay}ue^{-u}du=\frac{1}{ay^2}[(-u-1)e^{-u}]_0^{ay}=\frac{1}{ay^2}(1-(1+ay)e^{-ay})$

■練習問題 6.64　明らかに　$P(0<Y<1)=1$ $0<x<1$ に対して　$P(Y<x)=P(Y<x\cap X>1)+P(Y<x\cap 0<X<1)=P(X>\frac{1}{x})+P(0<X<x)=1-F_X(\frac{1}{x})+F_X(x)$
$f_X(x)=\frac{d}{dx}(1-F_X(\frac{1}{x})+F_X(x))=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}+e^{-x}\quad(0<x<1)$

■練習問題 6.65　$X_1+X_2+\cdots+X_n\sim\Gamma(n,\frac{1}{\mu})\sim\mu\Gamma(n,1)\ \therefore E((\bar{X})^2)=\frac{1}{n^2}E((\mu)^2(\Gamma(n,1)^2)=\frac{\mu^2 n(n+1)}{n^2}$
、$a_n=\frac{n}{n+1}$
$E((\bar{X})^3)=\frac{1}{n^3}E((\mu)^3(\Gamma(n,1)^3)=\frac{\mu^2 n(n+1)(n+2)}{n^3}$、$a_n=\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$
$f_{Exp(1/\mu)}(x)=\frac{1}{\mu}e^{-\frac{x}{\mu}}, \frac{\partial}{\partial\mu}\log f(x)=\frac{x}{\mu^2}-\frac{1}{\mu}$
よって　$I(\mu)=V(\frac{\partial}{\partial\mu}\log f(X))=V(\frac{X}{\mu^2}-\frac{1}{\mu})=\frac{V(X)}{\mu^4}=\frac{1}{\mu^2}$
一方　$V(\bar{X})=\frac{\mu^2}{n}$ つまり　$V(\bar{X})=\frac{1}{nI(\mu)}$ が成立しクラーメル・ラオの不等式での下限となっている。
よって　$\bar{X}$ は母平均 μ の有効推定量.

■練習問題 6.66　(1)$E(X_1)=\frac{p_1}{a}$
(2)$E(\frac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3})=E(\beta(p_1+p_2,p_3))=\frac{p_1+p_2}{p_1+p_2+p_3}$
(3)$X_1+X_2+X_3\sim\Gamma(p_1+p_2+p_3,a)$
(4)$f_{X_1|X_1+X_2}(y|x)=\frac{1}{B(p_1,p_2)}\frac{y^{p_1-1}(x-y)^{p_2-1}}{x^{p_1+p_2-1}}\ (0<y<x)$
$\therefore X_1+X_2=x$ のもとで、$X_1\sim x\beta(p_1,p_2)$
(5)$E(X_1|X_1+X_2)=\frac{p_1(X_1+X_2)}{p_1+p_2}$
(6)$V(X_1|X_1+X_2)=\frac{p_1p_2(X_1+X_2)^2}{(p_1+p_2+1)(p_1+p_2)^2}$

■練習問題 6.67　(1)$E(X^2)E(Y^2)=1$ (2)$e^{9/2}$ (3)$5^{-1/2}$ (4)$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty xe^{-x^2}e^{-x^2/2}dx=\frac{2}{3\sqrt{2\pi}}$
(5)$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x^2e^{-3x^2}e^{-x^2/2}dx=7^{-3/2}$
(6)$E(e^{-X^2})E(e^{-Y^2})=1/3$, 別解$\frac{1}{2\pi}\int\int_{0<r<\infty,0<\theta<2\pi}e^{-r^2}re^{-r^2/2}drd\theta=1/3$
(7)$E(e^{-\frac{1}{2}X^2}E(e^{XY})|Y))=E(1)=1$
(8)$\frac{1}{2\pi}\int\int_{0<r<\infty,0<\theta<2\pi}\cos^2\theta e^{-r^2}e{-}r^2/2rdrd\theta=1/6$
(9) $2^{n/2}E(|X|^n)=\frac{2^n\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}}$, ($\because$ 正規分布の再生性より, $X-Y\sim N(0,2)\sim\sqrt{2}N(0,1)$)

(10)$5^{n/2}E(|X|^n)=\frac{(10)^{n/2}\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}}$
(11)$\int_0^{1/3}M_{\chi_1^2}(t)dt=\int_0^{1/3}\frac{1}{\sqrt{1-2t}}dt=1-\sqrt{1/3}$
(12)$\int_0^1 E(e^{N\sqrt{x}})dx=\int_0^1 e^{x/2}dx=2(e^{1/2}-1)$
(13)$P(\max(2M_1,2M_2)<2\min(2M_1,2M_2))=2P(M_1<M_2<2M_1)=2\int_0^\infty(e^{-x}-e^{-2x})e^{-x}dx=\frac{1}{3}$ ここで　$X^2+X_1^2\sim\Gamma(1/2,1/2)+\Gamma(1/2,1/2)=\Gamma(1,1/2)=2Exp(1)$ に注意する。
(14) $P(Ge(p)>2Exp(1))=E(1-e^{-Ge(p)/2})=1-\frac{p}{1-e^{-1/2}(1-p)}$
(別解 $P(Ge(p)>Exp(1/2))=\sum_{k=1}^\infty(1-p)^k\int_{k-1}^k 1/2e^{-x/2}dx=\sum_{k=1}^\infty(1-p)^k(e^{-(k-1)/2}-e^{-k/2})=\frac{(1-p)(1-e^{-1/2})}{1-(1-p)e^{-1/2}}$

■練習問題 6.68　(1)$\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}$　(2) $P(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\leqq\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})=P(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\geqq\frac{x-\mu_2}{\sigma_2})$ より　$\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}=-\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}$, $x=\frac{\sigma_1\mu_2+\sigma_2\mu_1}{\sigma_1+\sigma_2}$
(3)$N(\mu_1-\mu_2+3\mu_3,\sigma_1^2+\sigma_2^2+9\sigma_3^2)$
(4)$\sigma_1^2-\sigma_2^2+2\sigma_3^2$
(5)$\chi_n^2\sim\Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$

■練習問題 6.69　(1) μ　(2) $\frac{\sigma^2}{n}$　(3)$\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2$
(4)$\alpha=P(C|H_0)=P(3N(0,1)>10)=1-\Phi(\frac{10}{3})$, $\beta=P(C^c|H_1)=P(\frac{X_1+X_2+X_3-15}{3}<\frac{12-15}{3})=P(N(0,1)<-1)=1-\Phi(1)(=\Phi(-1))$

■練習問題 6.70　再生性より　$X_1+\cdots+X_n\sim N(n\mu,n\sigma^2)$ よって $E(|(X_1-\mu)+(X_2-\mu)+\cdots+(X_n-\mu)|)=E(|N(0,n\sigma^2)|)=E(\sqrt{n}\sigma|N(0,1)|)=\sigma\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ よって　$a_n=\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$
$E((X_1-\mu)^2+(X_2-\mu)^2+\cdots+(X_n-\mu)^2))=\sigma^2E(\chi_n^2)=\sigma^2E(\Gamma(n/2,1/2))=n\sigma^2$,　よって　$b_n=\frac{1}{n}$

■練習問題 6.71　$\frac{a-1}{a+b-2}$

■練習問題 6.72　$f_Y(x)=\frac{1}{B(a,b)}\frac{x^{a-1}}{(1+x)^{(a+b)}}$　$(x>0)$(第 2 種ベータ分布という。)
$f_Z(x)=\frac{1}{B(a,b)}\frac{(x-d)^{a-1}(c-x)^{b-1}}{(c-d)^{a+b-1}}$

■練習問題 6.73　$P(X=k)=\int_0^1 P(X=k|p=x)\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}dx=\int_0^1 x(1-x)^k\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}dx=\frac{B(a+1,b+k)}{B(a,b)}$
$E(X)=\sum_{k=0}^\infty k\int_0^1 x(1-x)^k\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}dx\int_0^1\frac{(1-x)}{x}\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}dx=\frac{a-1}{b}$
$V(X)=E(V(X|p))+V(E(X|p))=E(\frac{1-p}{p^2})+V(\frac{1-p}{p})=\frac{(a+b-1)b}{(a-1)(a-2)}+\frac{(a+b-1)b}{(a-1)^2(a-2)}=\frac{(a+b-1)ab}{(a-1)^2(a-2)}$

■練習問題 6.74　$F_{m,n}=\frac{n}{m}\frac{1-\beta(\frac{n}{2},\frac{m}{2})}{\beta(\frac{n}{2},\frac{m}{2})}$ より、$F_{F_{m,n}}(x)=1-F_{\beta(\frac{n}{2},\frac{m}{2})}(\frac{1}{\frac{mx}{n}+1})$　微分して $f_{F_{m,n}}(x)=\frac{(m/n)^{m/2}x^{m/2-1}}{B(\frac{n}{2},\frac{m}{2})(\frac{m}{n}x+1)^{\frac{m+n}{2}}}$
$f_{t_n^2}(x)=\frac{(1/n)^{1/2}x^{1/2-1}}{B(\frac{n}{2},\frac{1}{2})(\frac{1}{n}x+1)^{\frac{1+n}{2}}}$
$x>0$ のとき、$P(0<t_n<x)=\frac{1}{2}P(t_n^2<x^2)$ より、
$f_{t_n}(x)=xf_{t_n^2}(x^2)=\frac{1}{\sqrt{n}B(\frac{n}{2},\frac{1}{2})(1+\frac{x^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}$　$(-\infty<x<\infty)$
$E(F_{m,n})=\frac{n}{n-2}$　$(n>2)$, $V(F_{m,n})=\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$　$(n>4)$
$E(t_n)=0,(n>1)$, $V(t_n)=\frac{n}{n-2}$　$(n>2)$

■練習問題 6.75　$X\sim B(n,\frac{1}{6})$ より、　$E(X)=\frac{n}{6}$, $V(X)=\frac{5n}{36}$
また　$Z-X=T$ とおくと、　$(X,Y,T)\sim mul(n;1/6,1/6,1/3)$ (4 項分布) となるので

$(X,Y)\sim mul(n;1/6,1/6)$, $(X,T)\sim mul(n;1/6,1/3), (Y,T)\sim mul(n;1/6,1/3)$ より、

$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{-n}{36}$, $\mathrm{Cov}(X,T)=\mathrm{Cov}(Y,T)=\frac{-n}{18}$

$\mathrm{Cov}(X,Z)=\mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(X,T)=\frac{5n}{36}-\frac{n}{18}=\frac{n}{12}$

$\mathrm{Cov}(Y,Z)=\mathrm{Cov}(Y,X)+\mathrm{Cov}(Y,T)=\frac{-12}{n}$

$V(Y+Z)=V(B(n,2/3))=\frac{2n}{9},\ V(X+Z)=V(X)+2\mathrm{Cov}(X,Z)+V(Z)=\frac{5n}{9}$

■練習問題 6.76 $(1)X\sim N(2,1)$ $(2)Y\sim N(-3,6)$ $(3)E(X+Y)=-1, V(X+Y)=V(X)+2\mathrm{Cov}(X,Y)+V(Y)=3, X+Y\sim N(-1,3)$

(4) から (6) は $f_{X|Y}(x|y)$ を計算してもよいが別のやり方で求めよう。

$\frac{Y+3}{\sqrt{6}}=Z_1\sim N(0,1)$

, $\frac{X-2}{1}=\sqrt{1-\rho^2}Z_2+\rho Z_1=\sqrt{\frac{1}{3}}Z_2-\sqrt{\frac{2}{3}}Z_1$ $(Z_2\sim N(0,1)$ で Z_1と独立),

$E(X|Y)=E(2+\sqrt{\frac{1}{3}}Z_2-\sqrt{\frac{2}{3}}Z_1|Z_1=\frac{y+3}{\sqrt{6}})=\frac{3-y}{3}$

$V(X|Y=y)=V(2+\sqrt{\frac{1}{3}}Z_2-\sqrt{\frac{2}{3}}Z_1|Z_1=\frac{y+3}{\sqrt{6}})=\frac{1}{3}, Y=y$ のもとで $X\sim N(\frac{3-y}{3},\frac{1}{3})$

■練習問題 6.77 $E(X^2)=\frac{3}{4\pi}B(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)=\frac{1}{5}$, $V(X)=\frac{19}{320}$

$E(XY)=\frac{3}{4\pi}B(1,1,\frac{1}{2},1)=\frac{2}{5\pi}$, $\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{2}{5\pi}-\frac{9}{64}$

■練習問題 6.78 $P(X^2+Y^2+Z^2>1)=1-P(X^2+Y^2+Z^2<1)=1-\frac{\pi}{6}$

$E(X,X+Y^2+Z\leqq 1)=\iiint_{0\leq x\leq 1,\,0\leq y\leq 1,\,0\leq z\leq 1,\,x+y^2+z\leq 1}xdx\,dy\,dz=\frac{1}{2}B(2,\frac{1}{2},1,1)=\frac{8}{105}$

$E(X|X+Y^2+Z\leqq 1)=\frac{2}{7}$, $E(X|X^2+Y^2+Z^2<1)=\frac{3}{8}$(前頁より) $\therefore E(X,X^2+Y^2+Z^2<1)=\frac{\pi}{16}$, (直接計算してもよい。) $\therefore E(X,X^2+Y^2+Z^2>1)=E(X)-E(X,X^2+Y^2+Z^2<1)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{16}$

■練習問題 6.79 $P(X,Y),Q(Z,W)$ とおくと $E((X-Y)^2+(Z-W)^2)=4\times\frac{1}{4}-4E(X)E(Y)=1-4(\frac{4}{3\pi})^2$

極座標で $P(R\cos\Theta,R\sin\Theta)$ とおくと、すぐにわかるように R と Θ は独立で

$f_R(r)=2r\,(0<r<1)$, $\Theta\sim U(0,\pi/2)$ ゆえに $E(\triangle OPQ)=\frac{1}{2}E(R_1R_2|\sin(\Theta_1-\Theta_2)|)=E(R_1)E(R_2)E(\sin|\theta_1-\theta_2|)=\frac{4}{9}\frac{2(\pi-2)}{\pi^2}$

(注意 $-\pi/2<\theta_1-\theta_2<\pi/2$ より、 $|\sin(\theta_1-\theta_2)|=\sin|\theta_1-\theta_2|$ あとは、練習問題 6.81 の解答を参照)

■練習問題 6.80 $E(|X|)=\frac{4}{3\pi}$, $V(|X|)=\frac{1}{4}-(\frac{4}{3\pi})^2$, $\mathrm{Cov}(|X|,|Y|)=\frac{1}{2\pi}-(\frac{4}{3\pi})^2$

■練習問題 6.81 $\theta_1\sim\theta_2\sim U(0,\pi/2)$ で独立とすると $P(|\theta_1-\theta_2|\leqq x)=1-\frac{(\pi/2-x)^2}{\frac{\pi^2}{4}}$

$\therefore f_{|\theta_1-\theta_2|}(x)=8\frac{\pi/2-x}{\pi^2}$ $(0\leqq x\leqq\pi/2)$

$E(\overset{\frown}{PQ})=E(|\theta_1-\theta_2|)=\int_0^{\pi/2}x8\frac{\pi/2-x}{\pi^2}dx=\frac{\pi}{6}$

$E((\overline{PQ})^2)=E(2-2\cos(\theta_1-\theta_2))=2-2E(\cos(|\theta_1-\theta_2|))=2-2\int_0^{\pi/2}\cos x8\frac{\pi/2-x}{\pi^2}dx=2-\frac{16}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx=2-\frac{16}{\pi^2}$

$E(\triangle OPQ)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin x8\frac{\pi/2-x}{\pi^2}dx=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}x\cos xdx=\frac{2(\pi-2)}{\pi^2}$

$E(扇形\ OPQ)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x8\frac{\pi/2-x}{\pi^2}dx=\frac{\pi}{12}$

■練習問題 6.82 $(1)M_{Z_t}(\alpha)=E(e^{\alpha Z_t})=E(e^{\alpha(\xi_1+\cdots+\xi_t)})=(E(e^{\alpha\xi_1}))^t=(\frac{e^\alpha+e^{-\alpha}}{2})^t=\cosh^t\alpha$

$E(Z_te^{\alpha Z_t})=(E(e^{\alpha Z_t}))'=t\cosh^{t-1}\alpha\cdot\sinh\alpha$

$(2)E(Z_t^3-3tZ_t|\xi_1,\ldots,\xi_{t-1})=E((Z_{t-1}+\xi_t)^3-3t(Z_{t-1}+\xi_t)|\xi_1,\ldots,\xi_{t-1})$

$= E(Z_{t-1}^3 + 3Z_{t-1}^2\xi_t + 3Z_{t-1}\xi_t^2 + \xi_t^3 - 3tZ_{t-1} - 3t\xi_t|\xi_1,\dots,\xi_{t-1}) = Z_{t-1}^3 - 3(t-1)Z_{t-1}$
$E(\frac{e^{\alpha Z_t}}{\cosh^t\alpha}|\xi_1,\dots,\xi_{t-1}) = E(\frac{e^{\alpha(Z_{t-1}+\xi_t)}}{\cosh^t\alpha}|\xi_1,\dots,\xi_{t-1}) = \frac{e^{\alpha Z_{t-1}}}{\cosh^t\alpha}E(e^{\alpha\xi_t}) = \frac{e^{\alpha Z_{t-1}}}{\cosh^(t-1)\alpha}$

■練習問題 6.83 $(1)E(Z_t^{(p)}) = E(\xi_1^{(p)} + \cdots + \xi_t^{(p)}) = tE(\xi_1^{(p)}) = (2p-1)t$
$V(Z_t^{(p)}) = V(\xi_1^{(p)} + \cdots + \xi_t^{(p)}) = tV(\xi_1^{(p)}) = 4p(1-p)t$
$(2)M_{Z_t^{(p)}}(\alpha) = E(e^{\alpha Z_t^{(p)}}) = E(e^{\alpha(\xi_1^{(p)}+\cdots+\xi_t^{(p)})}) = (E(e^{\alpha\xi_1^{(p)}}))^t = (pe^\alpha + (1-p)e^{-\alpha})^t$
$E(Z_t^{(p)}e^{\alpha Z_t^{(p)}}) = (E(e^{\alpha Z_t^{(p)}}))' = t(pe^\alpha + (1-p)e^{-\alpha})^{t-1}(pe^\alpha - (1-p)e^\alpha)$
$(3)E(Z_t^{(p)} - (2p-1)t|\xi_1^{(p)},\dots,\xi_t^{(p)}) = E(Z_{t-1}^{(p)} + \xi_t^{(p)} - (2p-1)t|\xi_1^{(p)},\dots,\xi_{t-1}^{(p)})$
$= Z_{t-1}^{(p)} + (2p-1) - (2p-1)t = Z_{t-1}^{(p)} - (2p-1)(t-1)$

■練習問題 6.84 $(1)g_{Y_t}(\alpha) = E(E(\alpha^{Y_t}|N_t) = E((g_X(\alpha))^{N_t}) = e^{-\lambda t(1-g_X(\alpha))}$
(2) $g_{Y_t}(\alpha) = e^{-\lambda t(1-(1-p+p\alpha))} = e^{-\lambda pt(1-\alpha)}$, $\therefore Y_t \sim Po(\lambda pt)$
(3) $g_X(\alpha) = \frac{\log 1-q\alpha}{\log 1-q}$, $g_{Y_t}(\alpha) = (\frac{1-q}{1-q\alpha})^{-\frac{\lambda t}{\log 1-q}}$
$\therefore Y_t \sim NB(-\frac{\lambda t}{\log 1-q}, 1-q)$

■練習問題 6.85 $E(\alpha^{N_\theta}) = E(E(\alpha^{N_\theta}|\theta)) = E(e^{-\lambda\theta(1-\alpha)}) = \frac{\frac{\mu}{\mu+\lambda}}{1-\frac{\lambda\alpha}{\mu+\lambda}}$
$\therefore N_\theta \sim Ge(\frac{\mu}{\mu+\lambda})$
$\theta \sim \Gamma(p,a)$ なら $E(\alpha^{N_\theta}) = E(E(\alpha^{N_\theta}|\theta)) = E(e^{-\lambda\theta(1-\alpha)}) = (\frac{\frac{a}{a+\lambda}}{1-\frac{\lambda\alpha}{a+\lambda}})^p$
$\therefore N_\theta \sim NB(p, \frac{a}{a+\lambda})$

■練習問題 6.86 $(1)V(W_t) + V(W_t) = 2t$ (2) $\mathrm{Cov}(W_t,W_s) + \mathrm{Cov}(W_t',W_s) + \mathrm{Cov}(W_t,W_s') + \mathrm{Cov}(W_t',W_s') = s+0+0+s = 2s$
(3) μt (4)$t = au$ より $a = \frac{t}{u}$ (5)$E(W_t|W_u) = E(W_t - aW_u|W_u) + aE(W_u|W_u) = E(W_t - aW_u) + aW_u = \frac{t}{u}W_u$ (多次元正規分布なので無相関なら独立)
(6) $E(W_t - aW_u + aW_u)^2|W_u) = E((W_t - aW_u)^2) + a^2W_u^2 = t + \frac{t^2}{u} + \frac{t^2}{u^2}W_u^2$
$(7)e^{\frac{t}{2}}$ $(8)e^{2t} - e^t$ $(9)E(e^{-ttW_1^2}) = E(e^{-t^2N(0,1)^2}) = E(e^{-t^2\Gamma(1/2,1/2)} = \frac{1}{\sqrt{1+2t^2}}$
(10) $E(e^{\sigma W_t+\mu_t}) = e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t}$ $(11)e^{(2\mu+\sigma^2)t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$
(12) $\int_0^t E(W_v)dv = 0$ (13) $\int_0^t E(W_v^2)dv = \int_0^t vdv = \frac{t^2}{2}$
$(14)2\iint_{0\leqq v\leqq q\leqq t}\int_0^t vdvdq = \frac{t^3}{3}$
(15) まず $\mathrm{Cov}(W_t - aW_s - bW_u, W_s) = \mathrm{Cov}(W_t - aW_s - bW_u, W_u) = 0$ となるように a,b をとると、$a = \frac{u-t}{u-s}, b = \frac{t-s}{u-s}$, すると、$E(W_t|W_s,W_u) = aW_s + bW_u + E(W_t - aW_s - bW_u|W_s,W_u) = aW_s + bW_u + E(W_t - aW_s - bW_u)$
$= aW_s + bW_u = \frac{u-t}{u-s}W_s + \frac{t-s}{u-s}W_u$ (多次元正規分布より両方ともに無相関なら 両方に対して独立になる。

■練習問題 6.87 (1) 特殊解は 3^n 特性方程式の解は 2(重解) $a_n = 3^n + (C+Dn)2^n$ とおけ、境界条件より $a_n = 3^n + (3n+1)2^n$
(2)特殊解は -1, $a_n = 45^n - 1$ (3) 特殊解は $-n - \frac{1}{2}$, $a_n = -n - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}5^n$
(4) 特殊解は $\frac{n5^n}{5}$, $a_n = (\frac{n}{5} + 3)5^n$ (5) 特性解は-2,3 , $a_n = (-2)^n + 43^n$
(6) 特殊解は $n - \frac{1}{6}$, $a_n = -n - \frac{1}{6} + \frac{-2}{5}(-2)^n + \frac{2}{5}3^n$
(7) 特殊解は 2^n, 特性解は-3,1, $a_n = 1 + 2^n$
(8) 特性解は $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (黄金数, golden number), $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$
(9) 特性解は $\pm\sqrt{-1}$ 、$a_n = \frac{1}{2}((\sqrt{-1})^n + (-\sqrt{-1})^n)$
(10) 特殊解は 2, 特性解は -1,2,3 、$a_n = 2 + (\frac{-1}{2})(-1)^n + 42^n + (\frac{-1}{2})3^n$

■練習問題 6.88 $p_n=\frac{1}{1+\alpha}p_{n+1}+\frac{\alpha}{1+\alpha}p_{n-1}, p_0=1, p_1=0$ より、$p_n=\frac{\alpha^n-\alpha^N}{1-\alpha^N}$
b_n=最初の所持金が $n\$$ のときにゲームをやめるまでの回数の期待値とすると、 $b_n=1+\frac{1}{1+\alpha}b_{n+1}+\frac{\alpha}{1+\alpha}b_{n-1}$
境界条件は $b_0=b_N=0$ で特殊解は $-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}n$, $b_n=-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}n+\frac{N(1+\alpha}{1-\alpha}\frac{\alpha^n-1}{\alpha^N-1}$

■練習問題 6.89$^{(**)}$ $q_n=P(Y=n)$ とおくと 定義より、$n \geqq 1$ に対して $q_{n+1}=\frac{1}{2}p_n$ (最初に表が出た場合のみを考えている) また $q_1=\frac{1}{2}$ である。また $p_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}p_n$ (最初に表がでたらリーチがかかり、裏がでたらもとに戻るからである。) これらより p_n の漸化式を求めると $p_{n+1}=\frac{1}{4}p_{n-1}+\frac{1}{2}p_n$ となり、この特性方程式は $t^2-\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}=0$ で 特性解は $(\alpha,\beta)=(\frac{1+\sqrt{5}}{4},\frac{1-\sqrt{5}}{4})$ となる。$p_n=C\alpha^{n-1}+D\beta^{n-1}$ とおけるので、 (注意、 $p_n=C\alpha^n+D\beta^n$ とおくと、p_1,p_2 から C,D を求めるのはめんどうになる。) $(p_1,p_2)=(0,1/4)$ から $(C,D)=(\frac{1}{2\sqrt{5}},\frac{-1}{2\sqrt{5}})$ となる。 つまり、 $p_n=\frac{1}{2\sqrt{5}}(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})$ すると、
$E(t^X)=\sum_{n=1}p_nt^n=\dfrac{\frac{t^2}{4}}{1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}t^2}$ 計算には解と係数の関係 $\alpha+\beta=\frac{-1}{2}, \alpha\beta=\frac{-1}{4}$ を用いた。また、
$E(t\ X)=\frac{1}{2}E(t^{1+Y})+\frac{1}{2}E(t^{1+X}), E(t^Y)=\frac{1}{2}t^1+\frac{1}{2}E(t^{1+X})$ を解いても $E(t^X)$ が得られ、これから逆に p_n が求まることにも注意しておく。

■練習問題 6.90 (1) 事象 $N>k$ は k 個目のお菓子では、1 種類か、2 種類しかそろっていないということなので、各確率を計算して $P(N>k)=3(\frac{1}{3})^k+3((\frac{2}{3})^k-2(\frac{1}{3})^k)=3(\frac{2}{3})^k-3(\frac{1}{3})^k$ for $k \geqq 1$
(2) 明らかに $P(N>0)=1$ なので しっぽ定理より $E(N)=\sum_{k=0}^{\infty}P(N>k)=1+\sum_{k=1}^{\infty}3((\dfrac{2}{3})^k-3(\dfrac{1}{3})^k)=\dfrac{11}{2}$
(注意 練習問題 6.46 と同様に $1+E(Fs(2/3))+E(Fs(1/3))=3(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=\frac{11}{2}$ でもよい。)
(3)$\sum_{k=0}^{\infty}kP(N>k)=3\sum_{k=1}k((\dfrac{2}{3})^k-(\dfrac{1}{3})^k)=\dfrac{63}{4}$
(4)$\sum_{k=0}^{\infty}kP(N>k)=E(\sum_{k=0}^{\infty}k1_{N>k})=E(\sum_{k=0}^{N-1}k)=\dfrac{(N-1)N}{2}$ よって $E(N^2)=37$, $V(N)=37-(11/2)^2=\frac{27}{4}$ (別解 独立な $Fs(2/3)$ と $Fs(1/3)$ で $V(N)=V(1+Fs(2/3)+Fs(1/3))=\frac{1/3}{(2/3)^2}+\frac{2/3}{(1/3)^2}=\frac{27}{4}$ でもよい。)

8.7 第 7 章演習問題解答

(1) p^2. (2) p. (3) $Np^2(1-p)^{N+2}+\binom{N}{3}p^4(1-p)^{N-2}$. (4) $1-p+p(1-p)^N$. (5) $A+B\sim B(N+1,p)$. (6) $B_1+B_2\sim B(2N,p)$. (7) $4Np(1-p)$. (8) $5\frac{1-p}{p^2}$. (9) $\frac{1-p}{p^2}$. (10) $P[C\geqq k]=\sum_{i=k}^{\infty}p(1-p)^i=(1-p)^k$. (11) $(1-p)^{2k+1}$. (12) $2Np(1-p)$. (13) $P[C=\text{偶数}]=\sum_{i=0}^{\infty}p(1-p)^{2i}=\dfrac{1}{2-p}$. (14) $P[K=\text{偶数}]=\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}e^{-\lambda}=\frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda})$. (15) $P[C_1\geqq 2C_2+1]=\sum_{i=0}^{\infty}P(C_1\geqq 2i+1\cap C_2=i)=\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^{2i+1}p(1-p)^i=\dfrac{1-p}{p^2-3p+3}$. (16) $P[C_1\geqq 2C_2-1]=P(C_2=0)+\sum_{i=1}^{\infty}P(C_1\geqq 2i-1\cap C_2=i)=p+\dfrac{(1-p)^2}{p^2-3p+3}$. (17) $C_1+C_2+\cdots+C_N\sim NB(N,p)$. (18) $E[K^2]=V(K)+(E(K))^2=\lambda^2+\lambda$. (19) $E[K(K-1)]=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\dfrac{\lambda^ke^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=2}^{\infty}\dfrac{\lambda^ke^{-\lambda}}{(k-2)!}=\lambda^2$. (20) $E\left[\frac{1}{K+1}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k+1}\dfrac{\lambda^ke^{-\lambda}}{k!}=$

$\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$.　(21) $E\big[\frac{1}{(K+1)(K+2)}\big]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\frac{1-(1+\lambda)e^{-\lambda}}{\lambda^2}$.　(22) $(tp+1-p)^N$. (23) $\frac{p}{1-t(1-p)}$，但し $|t|<\frac{1}{1-p}$.　(24) $E[t^{C'}]=E[t^{C+1}]=\frac{tp}{1-t(1-p)}$，但し $|t|<\frac{1}{1-p}$.　(25) $E[t^D]=(E[t^C])^N=\big(\frac{p}{1-t(1-p)}\big)^N$，但し $|t|<\frac{1}{1-p}$.　(26) $e^{\lambda(t^2-1)}$.　(27) $E\big[\frac{1}{B+1}\big]=\int_0^1(tp+1-p)^N dt=\frac{1-(1-p)^{N+1}}{p(N+1)}$.　(28) $E\big[\frac{1}{K+2}\big]=E\big[\frac{1}{K+1}\big]-E\big[\frac{1}{(K+1)(K+2)}\big]=\frac{\lambda-1+e^{-\lambda}}{\lambda^2}$. ($\int_0^1 te^{\lambda(t-1)}dt$ を計算しても良い。) (29) $\frac{p}{1-p}\log(\frac{1}{p})$.　(30) $\frac{p}{(1-p)^2}\log(\frac{1}{p})-\frac{p}{1-p}$.　(31) $k=0,1,\cdots$ について以下が成立.

$$P[\min(C_1,C_2)=k]=2P[C_1=k\,,\,C_1<C_2]+P[C_1=C_2=k]=(1-p)^{2k}(1-(1-p)^2)$$

故に，$\min(C_1,C_2)\sim Ge(1-(1-p)^2)$. (32) $\frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2}$.　(33) $\frac{(1-p)^2}{(1-(1-p)^2)^2}$.　(34) 任意の実数 x,y について以下が成立する.

$$\max(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}|x-y|\ ,\ \min(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)-\frac{1}{2}|x-y|$$

故に，$\max(x,y)=x+y-\min(x,y)$ と表せるので

$$E[\max(C_1,C_2)]=2E[C]-[\min(C_1,C_2)]=\frac{(1-p)(3-p)}{p(2-p)}\,.$$

(35) $k=0,1,\cdots$ について，$P[\max(C_1,C_2)=k]=2P[Ge(p)=k]-P[Ge(1-(1-p)^2)=k]$ となるので，

$$\begin{aligned}V[\max(C_1,C_2)]&=2E[Ge(p)(Ge(p)-1)]-E[Ge(1-(1-p)^2)(Ge(1-(1-p)^2)-1)]\\&\quad+E[\max(C_1,C_2)]-(E[\max(C_1,C_2)])^2\\&=4\Big(\frac{1-p}{p}\Big)^2-2\Big(\frac{(1-p)^2}{p(2-p)}\Big)^2+\frac{(1-p)(3-p)}{p(2-p)}-\Big(\frac{(1-p)(3-p)}{p(2-p)}=\frac{(1-p)(2p^2-5p+5)}{p^2(2-p)^2}\Big)^2.\end{aligned}$$

(36) 任意の実数 x,y について $|x-y|=\max(x,y)-\min(x,y)$ が成立するので，

$$E[|C_1-C_2|]=E[\max(C_1,C_2)]-E[\min(C_1,C_2)]=\frac{2(1-p)}{p(2-p)}\,.$$

(37) $\frac{p(1-p)^{|k|}}{2-p}$.　(38) $V[|C_1-C_2|]=E((C_1-C_2)^2)-(E(|C_1-C_2|))^2=\frac{2}{2-p}E[Ge(p)^2]-(E[|C_1-C_2|])^2=\frac{2(1-p)}{p^2}-\Big(\frac{2(1-p)}{p(2-p)}\Big)^2$.　(39) $E[\max(k,C)]=kP[C<k]+E[C1_{(C\geqq k)}]=k+\frac{(1-p)^{k+1}}{p}$.　(40) $E[\min(k,C)]=k+E[C]-E[\max(k,C)]=\frac{1-p}{p}-\frac{(1-p)^{k+1}}{p}$.　(41) $E[|C-k|]=E[\max(k,C)]-E[\min(k,C)]=k-\frac{1-p}{p}+2\frac{(1-p)^{k+1}}{p}$((39), (40), (41) は　$E(C|C\geqq k)=k+\frac{1-p}{p}$ を用いてもできる。) (42) $E[|K-\lambda|]=E[(\lambda-K)1_{(K<\lambda)}]+E[(K-\lambda)1_{(K\geqq\lambda)}]=-2\lambda P[K\geqq\lambda]+2E[K1_{(K\geqq\lambda)}]=-2\lambda P[K\geqq\lambda]+2\lambda P[K\geqq\lambda-1]=\frac{2\lambda^\lambda}{(\lambda-1)!}e^{-\lambda}$.　(43) $2\leqq k\leqq N+1$ の時は，$P[I_1'+I_2'\leqq k]=\frac{1}{N^2}\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=1}^{k-l}1=\frac{(k-1)k}{2N^2}$.　$N+2\leqq k\leqq 2N$ の時は，$P[I_1'+I_2'\leqq k]=\frac{1}{N^2}\Big(\sum_{l=1}^{k-N}\sum_{m=1}^{N}1+\sum_{l=k-N+1}^{N}\sum_{m=1}^{k-l}1\Big)=\frac{1}{N^2}\Big(N(k-N)+k(2N-k)-\frac{N(N+1)}{2}+\frac{(k-N)(k-N+1)}{2}\Big)$. (44) $\frac{1}{N+1}\frac{1-t^{N+1}}{1-t}$.　(45) $E\big[\frac{1}{(I+1)(I+2)}\big]=\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^N(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2})=\frac{1}{N+2}$.　(46) $n-H\sim HG(N,N-m,n)$. (47) $m-H\sim HG(N,m,N-n)$.　(48) $P[C=B]=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}p(1-p)^k=p(1-p^2)^N$. (49) $P[C\geqq B]=\sum_{i=0}^{\infty}P(C\geqq k)P(B=k)=E((1-p)^B)=(1-p^2)^N$.　(50) $P[K\leqq C]=E(1_{K\leqq C})=E(E(1_{K\leqq C}|K))=E((1-p)^K)=e^{-\lambda p}$.　(51) $E[e^{tX}]=e^{\frac{1}{2}t^2}$ (52) $E[e^{tX^2}]=\frac{1}{\sqrt{1-2t}}$，但し $t<\frac{1}{2}$.

(53) $E[e^{tY}] = \exp\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\}$. (54) $E[e^{tY^2}] = \frac{1}{\sqrt{1-2\sigma^2 t}}\exp\{\frac{\mu^2 t}{1-2\sigma^2 t}\}$，但し $t < \frac{1}{2\sigma^2}$. (55) $aX \sim N(0, a^2)$. (56) $aX - bY \sim N(-b\mu, a^2 + b^2\sigma^2)$. (57) $X_1^2 + X_2^2 \sim \chi_2^2$. (58) $E\left[\frac{X_1^2}{X_1^2+X_2^2+X_3^2}\right] = \frac{1}{3}E\left[\frac{X_1^2+X_2^2+X_3^2}{X_1^2+X_2^2+X_3^2}\right] = \frac{1}{3}$. $E(\beta(1/2, 2/2) = 1/3$ でもよい。 (59) $V(\beta(1/2, 2/2) = 4/45$. (60) $E(\beta(1/2, 2/2)^n) = \frac{1}{2n+1}$. (61) $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi_{n-1}^2$. (62) $E[|X|] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty xe^{-x^2/2}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. (63) $E[|X|^m] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{m/2}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)$. (64) $\Phi(\cdot)$ を標準正規分布の分布関数，$\Phi^{-1}(\cdot)$ をその逆関数とすると，$P[X \leqq x] = \Phi(x) = P[U \leqq \Phi(x)] = P[\Phi^{-1}(U) \leqq x]$. 故に，$f(x) = \Phi^{-1}(x)$. (65) $P[Y \leqq y] = P\big[U \leqq \Phi\big(\frac{y-\mu}{\sigma}\big)\big] = P[\mu + \sigma\Phi^{-1}(U) \leqq y]$. 故に，$f(y) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(y)$. (66) $P[M \leqq x] = P[U \leqq 1 - e^{-\lambda x}] = P\big[-\frac{1}{\lambda}\log(1-U) \leqq x\big]$. 故に，$f(x) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-x)$. (67) $E[e^{tX_1X_2}|X_1] = M_{N(0,1)}(tX_2) = e^{\frac{1}{2}t^2X_1^2}$. (68) $E[e^{tX_1X_2}] = E[E[e^{tX_1X_2}|X_1]] = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$，但し $|t| < 1$. (69) $E[e^{t(X1X_2+X_3X_4)}] = (E[e^{tX_1X_2}])^2 = \frac{1}{1-t^2}$，但し $|t| < 1$. (70) $\tilde{M}_1, \tilde{M}_2$ を独立な確率変数でかつ共に分布は $Exp(1)$ に従うものとすると次が成り立つ．$E[e^{t(X_1X_2+X_3X_4)}] = \frac{1}{1+t}\frac{1}{1-t} = E[e^{-t\tilde{M}_1}]E[e^{t\tilde{M}_2}] = E[e^{t(\tilde{M}_2-\tilde{M}_1)}]$. 故に，$X_1X_2 + X_3X_4 \sim \tilde{M}_2 - \tilde{M}_1$. (71)$f_{\max(X_1,X_2)}(x) = 2\Phi(x)f_X(x)$. (72) 極座標を用いて $E[\max(X_1, X_2)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. (73) m が奇数の時は，$E[(Y-\mu)^m] = 0$. m が偶数の時は，$E[(Y-\mu)^m] = \sigma^m E[X^m] = \sigma^m 2^{m/2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\big(\frac{m+1}{2}\big) = \sigma^m(m-1)\times(m-3)\times\cdots\times 3\times 1$. (74) $f_{e^X}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\big\{-\frac{(\log x)^2}{2}\big\}\frac{1}{x}$ ，$x > 0$ の時.（但し指定された範囲の外では密度関数はゼロ．以降もそのように約束する.） (75) $f_{e^Y}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\big\{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\big\}\frac{1}{x}$ ，$x > 0$ の時. (76) $f_{U^m}(x) = \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$ ，$0 < x < 1$ の時. (77) $f_{e^U}(x) = 1/x$ ，$1 < x < e$ の時. (78) $f_{\log U}(x) = e^x$ ，$x < 0$ の時. (79) $E[e^{tU}] = \frac{e^t-1}{t}$. (80) $V[e^{tU}] = \frac{e^{2t}-1}{2t} - \big(\frac{e^t-1}{t}\big)^2$. (81) $P[B = k\,|\,B + C = N] = \dfrac{P(B=k)P(C=N-k)}{P(B+C=N)} = \dfrac{\binom{N}{k}p^k(1-p)^{2(N-k)}}{(p+(1-p)^2)^N}$. (82) $E[e^{t(M_1-M_2)}] = \frac{\lambda^2}{\lambda^2-t^2}$，但し $|t| < \lambda$. (83) $E[e^{taM}] = \frac{\lambda/a}{\lambda/a-t}$ なので，$aM \sim Exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$. 分布関数、密度関数を用いても良い。 (84) $E[e^{taO}] = (1-t)^{-p}$ なので，$aO \sim \Gamma(p, 1)$. (85) $f_{\log M}(x) = \lambda\exp\{x - \lambda e^x\}$，但し $x \in \mathbb{R}$. (86) $f_{e^M}(x) = \frac{\lambda}{x}e^{-\lambda\log x}$ ，$x > 1$ の時. (87) $f_{\log O}(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)}\exp\{xp - ae^x\}$，但し $x \in \mathbb{R}$. (88) $f_{e^O}(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)}(\log x)^{p-1}x^{-(1+a)}$ ，$x > 1$ の時. (89) $P[M_1 > 3M_2] = E[P[M_1 > 3M_2|M_2]] = \int_0^\infty P[M_1 > 3x]P[M_2 \in dx] = \frac{1}{4}$. (90) $P[M_1 + M_2 \geqq 3M_3] = \int_0^\infty P[M_1 + M_2 \geqq 3z]P[M_3 \in dz] = \int_0^\infty (P[M_1 \geqq 3z] + P[M_1 < 3z\,,\,M_1 + M_2 \geqq 3z])P[M_3 \in dz] = \frac{7}{16}$. $(P[M_1 + M_2 \geqq 3M_3] = 1 - P(3M_3 > M_1 + M_2) = 1 - E(e^{-\lambda/3M_1})E(e^{-\lambda/3M_2})$ を用いてもよい。 (91) $\min(M_1, M_2) \sim Exp(2\lambda)$. (92) $\frac{1}{2\lambda}$. (93) $\frac{1}{4\lambda^2}$. (94) $E[\max(M_1, M_2)] = 2E[M] - E[\min(M_1, M_2)] = \frac{3}{2\lambda}$. (95) $V[\max(M_1, M_2)] = E[(\max(M_1, M_2))^2] - \big(\frac{3}{2\lambda}\big)^2 = 2E[M_1^2 1_{(M_1>M_2)}] - \big(\frac{3}{2\lambda}\big)^2 = 2\int_0^\infty dx\int_0^x x^2 f_{M_1}(x)f_{M_2}(y)\,dy - \big(\frac{3}{2\lambda}\big)^2 = \frac{5}{4\lambda^2}$. (96) $E[|M_1 - M_2|] = E[\max(M_1, M_2)] - E[\min(M_1, M_2)] = \frac{1}{\lambda}$. (97) $V[|M_1 - M_2|] = E[(M_1 - M_2)^2] - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{d^2}{dt^2}E[e^{t(M_1-M_2)}]\big|_{t=0} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{d^2}{dt^2}\frac{\lambda^2}{\lambda^2-t^2}\big|_{t=0} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$. (98) $E[\max(a, M)] = E[M1_{(M>a)}] + aP[M \leqq a] = a + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda a}$. (99) $E[\min(a, M)] = a + E[M] - E[\max(a, M)] = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda a})$. (100) $E[|M - a|] = E[\max(a, M)] - E[\min(a, M)] = a - \frac{1}{\lambda}(1 - 2e^{-\lambda a})$. (101) $V[\min(a, M)] = a^2P[M \geqq a] + E[M^2 1_{(M<a)}] - \big(\frac{1-e^{-\lambda a}}{\lambda}\big)^2 = -2\frac{a}{\lambda}e^{-\lambda a} + \frac{1-e^{-2\lambda a}}{\lambda^2}$. (102) $E[M\,|\,M < x] = \int_0^\infty yP[M \in dy\,|\,M < x] = \int_0^\infty y\frac{d}{dy}P[M \leqq y\,|\,M < x]\,dy = \int_0^x y\frac{f_M(y)}{P[M<x]}\,dy = \frac{1}{\lambda} - \frac{xe^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}}$. $E[M\,,M < x] = E(M) - E(M\,,M > x) = E(M) - E(M|M > x)P(M > x)$ を用いても良い。 (103) $E[M^2\,|\,M > x] = \int_0^\infty y^2\frac{d}{dy}P[M \leqq y\,|\,M > x]\,dy = \int_x^\infty y^2\frac{f_M(y)}{P[M>x]}\,dy = x^2 + \frac{2x}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}$. 指数分布の無記憶性より $E(M^2|M > x) = E((x + M)^2))$ や $V(M|M > x) = \frac{1}{\lambda^2}$ を用いても良い。 (104) $E[X\,|\,X > x] = \frac{1}{\Phi(x)}\int_x^\infty u\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Phi(-x)}\exp\{-\frac{1}{2}x^2\}$. (105) $E[X^2\,|\,X > a] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Phi(-a)}a\exp\{-\frac{1}{2}a^2\} + 1$. (106) $E[Y\,|\,Y > x] = \dfrac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\Phi\left(\frac{\mu-x}{\sigma}\right)}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} + \mu$.

(107) $E[Y^2 \,|\, Y > x] = \dfrac{\sigma(x+\mu)}{\sqrt{2\pi}\Phi\left(\frac{\mu-x}{\sigma}\right)} \exp\left\{ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \right\} + \mu^2 + \sigma^2$. (108) $P[NB(2,p) \geqq k] = P[C_1 + C_2 \geqq k] = (1-p)^k(1+kp)$. (109) $P[\Gamma(2,a) \leqq x] = \int_x^\infty ue^{-au} = 1 - e^{-ax}(1+ax)$. (110) $\cdot\, k \geqq 0$ の時，$P[2C_1 - C_2 = 2k] = P[C_2 = 2(C_1 - k)] = \sum_{l=k}^\infty P[C_2 = 2(l-k)]P[C_1 = l] = \frac{p(1-p)^k}{p^2-3p+3}$，$\cdot\, k < 0$ の時，$P[2C_1 - C_2 = 2k] = P[C_2 = 2(C_1 + |k|)] = \sum_{l=0}^\infty P[C_2 = 2(l+|k|)]P[C_1 = l] = \frac{p^2(1-p)^{2|k|}}{p^2-3p+3}$. (111) $\cdot\, k \geqq 0$ の時，$P(C_1 = 2(C_2-k)-1) = \displaystyle\sum_{l=k+1}^\infty P(C_1 = 2(l-k)-1)P(C_2 = l) = \dfrac{p^2(1-p)^{k+2}}{1-(1-p)^3}$

$\cdot k < 0$ の時, $P(C_1 = 2(C_2-k)-1) = \displaystyle\sum_{l=0}^\infty P(C_1 = 2(l-k)-1)P(C_2 = l) = \dfrac{p^2(1-p)^{-2k-1}}{1-(1-p)^3}$

(112) $f_{M_1+M_2+M_3}(x) = f_{\Gamma(3,\lambda)}(x) = \frac{\lambda^3}{2}x^2e^{-\lambda x}$，$x > 0$ の時. (113) $f_{M_1/M_2}(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$，$x > 0$ の時． (114) $f_{\max(M_1,M_2)}(x) = 2\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})$，$x > 0$ の時． (115) $E[U^m(1-U)^n] = B(m+1, n+1) = \frac{1}{(m+n+1)\binom{m+n}{m}}$. (116) $E[U_1^m(1-U_2)^n] = E[U_1^m]E[(1-U_2)^n] = \frac{1}{(m+1)(n+1)}$. (117) $\lambda \leqq 1$ の時，$E[Me^M] = \infty$．$\lambda > 1$ の時，$E[Me^M] = \frac{d}{dt}E[e^{tM}]\big|_{t=1} = \frac{d}{dt}\frac{\lambda}{\lambda-t}\big|_{t=1} = \frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}$. (118) $f_{\max(M_1,3M_2)}(x) = \lambda e^{-\lambda x} + \frac{1}{3}\lambda e^{-\frac{1}{3}\lambda x} - \frac{4}{3}\lambda e^{-\frac{4}{3}\lambda x}$，$x > 0$ の時. (119) $P[U_1 \leqq U_2^3] = \int_0^1 dy \int_0^{y^3} dx = \frac{1}{4}$. (120) $P[U_1 \leqq U_2^3 \,|\, U_1 \leqq U_2^2] = \frac{P[U_1 \leqq U_2^3]}{P[U_1 \leqq U_2^2]} = \frac{3}{4}$. (121) $f_{U_1+U_2}(x) = 1 - |1-x|$，$0 < x < 2$ の時． (122) $\cdot\ 0 < x < 1$ の時，$f_{U_1+4U_2}(x) = x/4$，$\cdot\ 1 \leqq x \leqq 4$ の時，$f_{U_1+4U_2}(x) = 1/4$，$\cdot\ 4 < x < 5$ の時，$f_{U_1+4U_2}(x) = 5/4 - x/4$. (123) $f_{U_1-U_2}(x) = 1 - |x|$，$-1 < x < 1$ の時． (124) $\cdot\ 0 < x \leqq 1$ の時，$f_{U_1/U_2}(x) = 1/2$，$\cdot\ x > 1$ の時，$f_{U_1/U_2}(x) = 1/(2x^2)$． (125) $f_{U_1U_2}(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right)$，$0 < x < 1$ の時． (126) $f_{\min(U_1,U_2)}(x) = 2(1-x)$，$0 < x < 1$ の時. (127) $f_{\max(U_1,U_2)}(x) = 2x$，$0 < x < 1$ の時． (128) $0 < x < 1$ について，$P\left[\frac{\min(U_1,U_2)}{\max(U_1,U_2)} \leqq x\right] = 2P[U_1 \leqq xU_2, U_1 \leqq U_2] = 2P[U_1 \leqq xU_2] = x$．故に $0 < x < 1$ の時，$f_{\frac{\min(U_1,U_2)}{\max(U_1,U_2)}}(x) = 1$． (129) $f_{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$，$x > 0$ の時. (130) $E[S^2(1-S)^2] = \frac{B(a+2,b+2)}{B(a,b)} = \frac{(a+1)a(b+1)b}{(a+b+3)(a+b+2)(a+b+1)(a+b)}$. (131) $E[(2\beta(a,a)-1)^{2m+1}] = \frac{1}{B(a,a)}\int_0^1 (2x-1)^{2m+1}x^{a-1}(1-x)^{a-1}\,dx$（ここで $x = \sin^2\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi/2)$ と変数変換すると）$= -\frac{1}{B(a,a)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2(a-1)}\int_0^{\pi/2}(\cos(2\theta))^{2m+1}(\sin(2\theta))^{2a-1}\,d\theta = 0$． (132) $E[\max(|X_1|,|X_2|)] = 8E[X_1 1_{(X_1 \geqq 0)}1_{(0 \leqq X_2 \leqq X_1)}] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$. (133) $E[\min(|X_1|,|X_2|)] = 2E[|X|] - E[\max(|X_1|,|X_2|)] = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}$. (134) $E\left[\frac{\min(|X_1|,|X_2|)}{\max(|X_1|,|X_2|)}\right] = 8E\left[\frac{X_2}{X_1}1_{(X_1 \geqq 0)}1_{(0 \leqq X_2 \leqq X_1)}\right] = 8\int_0^\infty \int_0^x \frac{y}{x} f_X(x)f_X(y)\,dx\,dy$（ここで極座標変換を施すと）$= \frac{4}{\pi}\int_0^\infty re^{-\frac{1}{2}r^2}\,dr \int_0^{\pi/4}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta = \frac{4}{\pi}\left[-\log(\cos\theta)\right]_{\theta=0}^{\pi/4} = \frac{2}{\pi}\log 2$. (135) $E\left[\frac{(\min(|X_1|,|X_2|))^2}{\max(|X_1|,|X_2|)}\right] = 8\int_0^\infty \int_0^x \frac{y^2}{x} f_X(x)f_X(y)\,dx\,dy = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty r^2e^{-\frac{1}{2}r^2}\,dr \int_0^{\pi/4}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\,d\theta = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)d\theta = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\log\left(\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\right) - \sin\theta\right]_{\theta=0}^{\pi/4} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\log(1+\sqrt{2})$．あるいは，$2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\,d\theta = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,d\theta$（ここで $z = \sin\theta\ \ (0 \leqq z \leqq \frac{1}{\sqrt{2}})$ と変数変換して）$= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1-z^2} - 1\right)dz = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}\right)dz = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\left[\log(1+z)\right]_{z=0}^{1/\sqrt{2}} + \left[-\log(1-z)\right]_{z=0}^{1/\sqrt{2}}\right)$ としてもよい． (136) $P[[M] = k] = P[k \leqq M < k+1] = (1-e^{\lambda})(e^{-\lambda})^k$ なので，$[M] \sim Ge(1-e^{-\lambda})$． (137) $x > 0$ について，$F_{\frac{X_1^2+X_2^2}{X_3^2}}(x) = E[P[X_1^2 + X_2^2 \leqq xX_3^2 \,|\, X_3]] = \int_{-\infty}^\infty P[X_3 \in dy_3]\iint_{y_1^2+y_2^2 \leqq xy_3^2} f_X(y_1)f_X(y_2)\ \ dy_1dy_2 = \int_{-\infty}^\infty P[X_3 \in dy_3]\int_0^{\sqrt{x}|y_3|}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}r^2}r\,dr\,d\theta = \cdots = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. (138) $f_{\frac{X_1^2+X_2^2}{X_3^2}}(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}$，$x > 0$ の時. (139) $P[M \leqq |X|] = E[P[M \leqq |X| \,|\, |X|]] = \cdots = 1 - 2e^{\frac{1}{2}\lambda^2}\Phi(-\lambda)$． (140) $P[M \geqq U_1 + U_2] = E[P[M \geqq U_1 + U_2 \,|\, U_1, U_2]] = \cdots = \frac{(1-e^{-\lambda})^2}{\lambda^2}$． (141) $P[M \leqq 2O] = E[P[M \leqq 2O \,|\, O]] = \cdots = 1 - \left(\frac{1}{1+2\lambda/a}\right)^p$． (142) $P[3C_1 = 2C_2] = \sum_{k=0}^\infty P[C_1 = \frac{2}{3}k]P[C_2 = k] = \sum_{l=0}^\infty P[C_1 = 2l]P[C_2 = 3l] = \cdots = \frac{p^2}{1-(1-p)^5}$． (143)

$P[3(C_1-2)=4C_2]=\sum_{k=0}^{\infty}P[C_2=3\frac{k-2}{4}]P[C_1=k]=\sum_{l=0}^{\infty}P[C_2=3l]P[C_1=2+4l]=\cdots=\frac{p^2(1-p)^2}{1-(1-p)^7}$.　(144) $P[3C_1-5C_2=1]=\sum_{k=0}^{\infty}P[C_1=\frac{1}{3}(1+5k)]P[C_2=k]=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{3}P[C_1=\frac{1}{3}(1+5(3m+l))]P[C_2=3m+l]=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{3}P[C_1=5m+\frac{1+5l}{3}]P[C_2=3m+l]=\sum_{m=0}^{\infty}P[C_1=5m+2]P[C_2=3m+1]=\cdots=\frac{p^2(1-p)^3}{1-(1-p)^8}$.　(145) $n\frac{m}{N}$.　(146) $\frac{N-n}{N-1}n\frac{m}{N}\frac{N-m}{N}$.　(147) $\frac{1}{3}$.　(148) $\frac{1}{3}$.　(149) $\frac{2}{3}$.　(150) (148) より $\frac{1}{3}=E[|U_1^2-U_2^2|]=2E[U_1|U_1-U_2|]$ となるので，$E[U_1|U_1-U_2|]=\frac{1}{6}$.　(151) $E[|U_1^m-U_2^m|]=2E[(U_1^m-U_2^m)1_{(U_1\geqq U_2)}]=\cdots=\frac{2m}{(m+1)(m+2)}$.　(152) $E[U\,|\,U>x]=\int_0^1 yP[U\in dy\,|\,U>x]=\int_0^1 y\frac{d}{dy}P[U\leqq y\,|\,U>x]\,dy=\int_x^1 y\frac{1}{1-x}\,dy=\frac{1+x}{2}$.　(153) $\frac{(x-1)^2}{12}$.　(154) $aX_1-bX_2+c\sim N(c,a^2+b^2)$.　(155) $E[\max(X_1^2,X_2^2)]=8\int_0^{\infty}\int_0^x x^2f_X(x)f_X(y)\,dx\,dy=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}r^3e^{-\frac{1}{2}r^2}\,dr\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/4}\frac{\cos(2\theta)+1}{2}\,d\theta=\cdots=1+\frac{2}{\pi}$.　(156) $1-\frac{2}{\pi}$.　(157) $E\big[\frac{\min(X_1^2,X_2^2)}{\max(X_1^2,X_2^2)}\big]=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}\,d\theta$（ここで $z=\sin^2\theta$ $(0\leqq z\leqq\frac{1}{2})$ と変数変換して）$=\frac{2}{\pi}\int_0^{1/2}\sqrt{z}(1-z)^{-3/2}\,dz$（ここで部分積分により）$=\frac{4}{\pi}-\frac{2}{\pi}\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{z(1-z)}}\,dz=\frac{4}{\pi}-\frac{1}{\pi}B(1/2,1/2)=\frac{4}{\pi}-1$.　(158) ∞.　(159) $E\big[\frac{|M_1-M_2|}{M_1+M_2}\big]=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{|x-y|}{x+y}\lambda^2e^{-\lambda(x+y)}\,dx\,dy$（ここで $u=x+y, v=x-y$ と変数変換すると）$=\int_0^{\infty}\int_{-u}^{u}\frac{|v|}{u}\lambda^2e^{-\lambda u}\frac{1}{2}\,du\,dv=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}u\lambda^2e^{-\lambda u}\,du=\frac{1}{2}$.　(160) $E\big[\frac{\min(M_1,M_2)}{M_1+M_2}\big]=E\big[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{|M_1-M_2|}{M_1+M_2}\big]=\frac{1}{4}$.　(161) $E\big[\frac{\max(M_1,M_2)}{M_1+M_2}\big]=1-E\big[\frac{\min(M_1,M_2)}{M_1+M_2}\big]=\frac{3}{4}$.　(162) $P[C\geqq M]=1-P[C\leqq M]=1-\sum_{k=0}^{\infty}P[M\geqq k]P[C=k]=\cdots=1-\frac{p}{1-(1-p)e^{-\lambda}}$.　(163) $\frac{1}{3}$.　(164) $V\big[\frac{M_1}{M_1+M_2+M_3}\big]=V[\beta(1,2)]=\frac{1}{18}$.　(165) $E\big[\big(\frac{M_1}{M_1+M_2+M_3}\big)^n\big]=E[\beta(1,2)^n]=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$.　(166) $Np-1+(1-p)^N$.　(167) $E[\max(D-1,0)]=E[D]-1+P[D=0]=N\frac{1-p}{p}-1+p^N$.　(168) $E[\max(D-2,0)]=E[\max(D-1,0)]-P[D\geqq 2]=N\frac{1-p}{p}-2+2p^N+Np^N(1-p)$.　(169) $0<x<1$ について，$P[\max(U_1,\cdots,U_n)\leqq x]=x^n$.　(170) $0<x<1$ について，$f_{\min(U_1,\cdots,U_n)}(x)=n(1-x)^{n-1}$.　(171) $\frac{n}{n+1}$.　(172) $\frac{1}{n+1}$.　(173) $\frac{n}{n+2}-\big(\frac{n}{n+1}\big)^2$.　(174) $\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$.　(175) $\lim_{n\to\infty}n(1-\max(U_1,\cdots,U_n))\sim Exp(1)$.　(176) $\lim_{n\to\infty}n\lambda\min(U_1,\cdots,U_n)\sim Exp(\frac{1}{\lambda})$.　(177) $f_{U_{(i)}}(x)=f_{\beta(i,n-i+1)}(x)$.　(178) $\frac{i}{n+1}$.　(179) $\frac{i(n-i+1)}{(n+1)^2(n+2)}$.　(180) $f_{U_{(i)},U_{(j)}}(x,y)=\frac{1}{B(i,j-i,n+1-j)}x^{i-1}(y-x)^{j-i-1}(1-y)^{n-j}$.　(181) $Cov(U_{(i)},U_{(j)})=\int_0^1\int_x^1 xy\frac{1}{B(i,j-i,n+1-j)}x^{i-1}(y-x)^{j-i-1}(1-y)^{n-j}\,dx\,dy-\frac{ij}{(n+1)^2}$（ここで y に関する積分について $z=y-x\,(0\leqq z\leqq 1-x)$ と変換すると多次元ベータ関数が現れて，これについて整理すると）$=\frac{i(j+1)}{(n+1)(n+2)}-\frac{ij}{(n+1)^2}$.　(182) $0<z<1$ について $P[U_{(n)}-U_{(1)}\leqq z]=\iint_{0\leqq x\leqq y\leqq 1,\,y-x\leqq z}\frac{1}{B(1,n-1,1)}(y-x)^{n-2}\,dx\,dy=\cdots=nz^{n-1}-(n-1)z^n$．よって $0<x<1$ について，$f_{U_{(n)}-U_{(1)}}(x)=n(n-1)x^{n-2}(1-x)$.　(183) $\frac{n-1}{n+1}$.　(184) $\frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}-\big(\frac{n-1}{n+1}\big)^2$.　(185) $\frac{n(n-1)}{(m+n-1)(m+n)}$.　(186) （$n=3$ と考える時，）$\max(\min(U_1,U_2),\min(U_2,U_3),\min(U_3,U_1))=U_{(2)}\sim\beta(2,2)$ なので，

$0<x<1$ について，$f_{\max(\min(U_1,U_2),\min(U_2,U_3),\min(U_3,U_1))}(x)=6x(1-x)$.　(187) $\frac{1}{n+2}$.　(188) $0<x<1$ について，$f_{\min(\max(U_1,U_2),\max(U_2,U_3),\max(U_3,U_1))}(x)=6x(1-x)$.　(189) $x=\frac{\mu}{\sigma+1}$.　(190) $0<x(<b)$ について，$P[b\beta(a,b)\leqq x]=\int_0^{x/b}f_{\beta(a,b)}(y)\,dy$（ここで $y=\frac{z}{b}$ $(0\leqq z\leqq x)$ と変数変換すると）$=\int_0^x\frac{1}{\Gamma(a)}z^{a-1}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b)}\big(\frac{1}{b}\big)^a\big(1-\frac{z}{b}\big)^{b-1}\,dz$．ここで $b\to\infty$ とすると $\big(1-\frac{z}{b}\big)^{b-1}$ は e^{-z} に収束し，$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b)}\big(\frac{1}{b}\big)^a$ はスターリングの公式より 1 に収束する．よって，$\lim_{b\to\infty}P[b\beta(a,b)\leqq x]=\int_0^x\frac{1}{\Gamma(a)}z^{a-1}e^{-z}\,dz$ となるので，$\lim_{b\to\infty}b\beta(a,b)\sim\Gamma(a,1)$.　(191) 任意の実数 x,y について，$\max(x,y)\min(x,y)=xy$ が成り立つので，$Cov(\max(C_1,C_2),\min(C_1,C_2))=E[C_1]E[C_2]-E[\max(C_1,C_2)]E[\min(C_1,C_2)]=\big(\frac{1-p}{p}\big)^2\big(1-\frac{(1-p)(3-p)}{(2-p)^2}\big)$.　(192) $\frac{\binom{N-1+k}{k}\binom{2N-1-k}{N-k}}{\binom{3N-1}{N}}$.　(193) $E[U_1^lU_2^m(1-U_1-U_2)^n1_{(U_1+U_2\leqq 1)}]=B(l+1,m+1,n+1)$.　(194) $f_{(2X_1+X_2,X_1+X_2)}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\big\{-\frac{1}{2}(x,y)\big(\begin{smallmatrix}2&-3\\-3&5\end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\big)\big\}$.　(195) $f_{(2X_1+X_2+3,X_1+X_2-1)}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\big\{-\frac{1}{2}(x-3,y+1)\big(\begin{smallmatrix}2&-3\\-3&5\end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix}x-3\\y+1\end{smallmatrix}\big)\big\}$.　(196) $\frac{B_1+B_2+B_3-3Np}{\sqrt{3Np(1-p)}}$.

(197) $\dfrac{D_1+D_2-2N\frac{1-p}{p}}{\sqrt{2N\frac{1-p}{p^2}}}$． (198) $\frac{K-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$． (199) $-1<x<1$ について，$f_{\cos(\pi U)}(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$． (200) $0<x<1$ について，$f_{\sin(\frac{\pi}{2}U)}(x)=\frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$． (201) $0<x<1$ について，$P[\sin(\pi U)\leqq x]=P[\pi U\leqq\arcsin x]+P[\pi U\geqq\pi-\arcsin x]=\frac{2}{\pi}\arcsin x$．よって $0<x<1$ について，$f_{\sin(\pi U)}(x)=\frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$． (202) $x>0$ について，$f_{\tan(\frac{\pi}{2}U)}(x)=\frac{2}{\pi(1+x^2)}$． (203) $x\in\mathbb{R}$ について，$f_{\tan(2\pi U)}(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$． (204) $\frac{9}{5}$． (205) $a>0$ について，$P[\sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2}\leqq a]=E[P[X_2^2+X_3^2\leqq a^2-X_1^2\,|\,X_1]]=\int_{|x|\leqq a}P[X_1\in dx]\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}r^2}r\,dr\,d\theta=\cdots=2\Phi(a)-1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}2ae^{-\frac{1}{2}a^2}$．故に, $x>0$ について $f_{\sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}$． (206) $\frac{25}{\lambda^2}$． (207) t． (208) $(\cosh\alpha)^t$． (209) 0． (210) $3t^2-2t$． (211) s． (212) $3s+t$． (213) Z_3． (214) Z_3． (215) $\xi_2+\xi_4$． (216) Z_s^2+t-s． (217) $t+(2p-1)^2(t^2-t)$． (218) $(e^{\alpha}p+e^{-\alpha}(1-p))^t$． (219) $(2p-1)^3t(t-1)(t-2)+3t(t-1)(2p-1)+(2p-1)t$． (220) $3t^2-2t+4(2p-1)^2t(t-1)+6(2p-1)^2t(t-1)(t-2)+(2p-1)^4t(t-1)(t-2)(t-3)$． (221) $s4p(1-p)$． (222) $4p(1-p)(t+3s)$． (223) $2(2p-1)+Z_3^{(p)}$． (224) $2(2p-1)+Z_3^{(p)}$． (225) $\xi_2^{(p)}+\xi_4^{(p)}+3(2p-1)$． (226) $t-s+(2p-1)^2(t-s)(t-s-1)+2(2p-1)(t-s)Z_s^{(p)}+(Z_s^{(p)})^2$． (227) λt． (228) λt． (229) $\lambda t+\lambda^2t^2$． (230) λ^3t^3． (231) $\exp\{\lambda t(e^{\alpha}-1)\}$． (232) $\lambda s(\lambda t+1)$． (233) $\exp\{\lambda se^{\beta}(e^{\alpha}-1)+\lambda t(e^{\beta}-1)\}$． (234) λs． (235) $\frac{(\lambda(t-s))^{k-l}}{(k-l)!}e^{-\lambda(t-s)}$． (236) $\lambda(t-s)+N_s$． (237) $0\leqq k\leqq l$ について，$P[N_s=k\,|\,N_t=l]=(\lambda t)^{-l}\binom{l}{k}(\lambda s)^k(\lambda(t-s))^{l-k}$． (238) $E[N_s\,|\,N_t]=E[N_s\,|\,N_t=l]|_{l=N_t}=\cdots=\frac{s}{t}N_t$． (239) $\lambda(t-s)$． (240) $\frac{s}{t}\big(1-\frac{s}{t}\big)N_t$． (241) 0． (242) t． (243) t． (244) 0． (245) $3t^2$． (246) $e^{\frac{1}{2}\alpha^2t}$． (247) $E[e^{\alpha W_t^2}]=\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha t}}$，但し $\alpha<\frac{1}{2t}$． (248) s． (249) $\exp\big\{\frac{1}{2}((\alpha+\beta)^2s+\beta^2(t-s))\big\}$． (250) s． (251) $\alpha W_s+\beta W_t\sim N(0,(\alpha+\beta)^2s+\beta^2(t-s))$． (252) $f_{W_t|W_s}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\big\{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\big\}$． (253) W_s． (254) $f_{W_s|W_t}(x|y)=\dfrac{f_{(W_s,W_t)}(x,y)}{f_{W_t}(y)}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)\frac{s}{t}}}\exp\Big\{-\dfrac{(x-\frac{s}{t}y)^2}{2(t-s)\frac{s}{t}}\Big\}$． (255) $E[W_s\,|\,W_t]=E[W_s\,|\,W_t=y]|_{y=W_t}=\frac{s}{t}Wt$． (256) $t-s$． (257) $V[W_s\,|\,W_t]=V[W_s\,|\,W_t=y]|_{y=W_t}=(t-s)\frac{s}{t}$． (258) $P[W_s>0,W_t>0]=P[W_s>0,W_t-W_s>0]+P[W_s>0,W_t-W_s<0,W_t>0]=\frac{1}{4}+P[\sqrt{s}X_1>0,\sqrt{t-s}X_2<0,\sqrt{s}X_1+\sqrt{t-s}X_2>0]=\frac{1}{4}+P[X_1>0,X_2<0,X_2>-\sqrt{\frac{s}{t-s}}X_1]=\frac{1}{4}+\iint_{x>0,y>0,y<\sqrt{s/(t-s)}x}f_X(x)f_X(y)\,dx\,dy=\frac{1}{4}+\int_0^{\infty}\int_0^{\arctan\sqrt{s/(t-s)}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}r^2}r\,dr\,d\theta=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\arctan\sqrt{\frac{s}{t-s}}$． (259) $E[W_t\,|\,W_s>0]=\int_0^{\infty}E[W_t\,|W_s=x]\frac{P[W_s\in dx]}{P[W_s>0]}=\sqrt{\frac{2s}{\pi}}$． (260) $E[W_s\,|W_t>0]=\int_0^{\infty}E[W_s\,|\,W_t=y]\frac{P[W_t\in dy]}{P[W_t>0]}=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}s$． (261) $\rho=\frac{Cov(W_s,2W_s+W_t)}{\sqrt{V[W_s]V[2W_s+W_t]}}=\frac{3s}{\sqrt{s(8s+t)}}$ と置く時，$(W_s,2W_s+W_t)\sim(\sqrt{s}(\rho X_1+\sqrt{1-\rho^2}X_2),\sqrt{8s+t}X_1)$ となるので，$E[W_s\,|\,2W_s+W_t=x]=E[\sqrt{s}(\rho X_1+\sqrt{1-\rho^2}X_2)\,|\,\sqrt{8s+t}X_1=x]=E\big[\rho\sqrt{s}\frac{x}{\sqrt{8s+t}}+\sqrt{s(1-\rho^2)}X_2\big]=\frac{3s}{8s+t}x$． (262) $\frac{s(t-s)}{8s+t}$．（(261) と同様に計算せよ．） (263) $\rho=\frac{Cov(W_s+3W_t,2W_s+W_t)}{\sqrt{V[W_s+3W_t]V[2W_s+W_t]}}=\frac{9s+3t}{\sqrt{(9t+7s)(8s+t)}}$ と置く時，$(W_s+3W_t,2W_s+W_t)\sim(\sqrt{9t+7s}(\rho X_1+\sqrt{1-\rho^2}X_2),\sqrt{8s+t}X_1)$ となるので，$E[W_s+3W_t\,|\,2W_s+W_t=x]=E[\sqrt{9t+7s}(\rho X_1+\sqrt{1-\rho^2}X_2)\,|\,\sqrt{8s+t}X_1=x]=E[\sqrt{9t+7s}\rho\frac{x}{\sqrt{8s+t}}+\sqrt{(9t+7s)(1-\rho^2)}X_2]=\frac{9s+3t}{8s+t}x$． (264) $\frac{25s(t-s)}{8s+t}$．（(263) と同様に計算せよ．） (265) $x>0$ について，$f_{e^{W_t}}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\big\{-\frac{(\log x)^2}{2t}\big\}\frac{1}{x}$． (266) $x\in\mathbb{R}$ について，$f_{W_t^3}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\big\{-\frac{x^{2/3}}{2t}\big\}\frac{1}{3}x^{-2/3}$． (267) $x>0$ について，$f_{W_t^2}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi tx}}\exp\big\{-\frac{x}{2t}\big\}$． (268) $f_{(W_s,W_t-W_s)}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}}\exp\big\{-\frac{1}{2}\big(\frac{x^2}{s}+\frac{y^2}{t-s}\big)\big\}$． (269) $f_{(W_s,W_t)}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}}\exp\big\{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}-\frac{x^2}{2s}\big\}$． (270) $f_{(W_s,2W_s+W_t)}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}}\exp\big\{-\frac{1}{2s(t-s)}((8s+t)x^2-6sxy+sy^2)\big\}$． (271) $f_{(W_s+3W_t,2W_s+W_t)}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{25s(t-s)}}\exp\big\{-\frac{1}{50s(t-s)}((8s+t)x^2-2(9s+3t)xy+(9t+7s)y^2)\big\}$． (272) $\exp\big\{\frac{1}{2}(3\alpha+$

$\beta)^2 t + \frac{1}{2}(7\alpha + 4\beta)(\alpha + 2\beta)\big\}$.　(273) $9s + 3t$.　(274) $18(3s+t)^2$ ($W_s = X, W_t - W_s = Y$ とおき、$V(Y^2), V(XY), V(X^2)$ の計算).　(275) $0 < x < 1, y > 0$ について，$f_{(\frac{M_1}{M_1+M_2}, M_1+M_2)}(x,y) = \lambda^2 y e^{-\lambda y}$.　(276) $0 < x < 1, y > 0$ について，$f_{(\frac{O_1}{O_1+O_2}, O_1+O_2)}(x,y) = \big(\frac{a^p}{\Gamma(p)}\big)^2 e^{-ay} y^{2p-1}(x(1-x))^{p-1}$.　(277) $x > 0, y > 0$ について，$f_{(\frac{|X_2|}{|X_1|}, |X_1|)}(x,y) = \frac{2y}{\pi}\exp\big\{-\frac{1}{2}y^2(1+x^2)\big\}$.　(278) $x > 0, 0 < y < \frac{\pi}{2}$ について，$f_{(\sqrt{X_1^2+X_2^2}, \tan^{-1}\frac{|X_2|}{|X_1|})}(x,y) = \frac{2}{\pi} x e^{-\frac{1}{2}x^2}$.　(279) $P[U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 < 1] = \frac{1}{16} B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{16}\frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^4}{\Gamma(3)} = \frac{\pi^2}{32}$.　(280) $P[U_1 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 < 1] = E[P[U_1 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 < 1 \,|\, U_1]] = \cdots = \frac{\pi}{15}$ または多次元ベータ関数.　(281) $P[U_1 + U_2 + U_3^2 + U_4^2 < 1] = E[P[U_1 + U_2 + U_3^2 + U_4^2 < 1 \,|\, U_1, U_2]] = \cdots = \frac{\pi}{24}$ または　多次元ベータ関数.　(282) $P[U_1 + U_2 + U_3 + U_4^2 < 1] = E[P[U_1 + U_2 + U_3 + U_4^2 < 1 \,|\, U_4]] = \cdots = \frac{8}{105}$ または　多次元ベータ関数.　(283) $\frac{1}{24}$.　(284) $P[U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + U_5^2 < 1] = \frac{1}{32}\frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^5}{\Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{\pi^2}{60}$ または　多次元ベータ関数.　(285) $L \sim B(N, p_1)$.　(286) $L + L' \sim B(N, p_1 + p_2)$.　(287) $N(N-1)p_1 p_2$.　(288) $-Np_1 p_2$.　(289) 条件 $L' = k$ のもとで $L \sim B(N-k, \frac{p_1}{1-p_2})$.　(290) $(N-k)\frac{p_1}{1-p_2}$.　(291) $(N-k)\frac{p_1}{1-p_2}\big(1 - \frac{p_1}{1-p_2}\big)$.　(292) $R \sim \beta(a, b+c)$.　(293) $R + R' \sim \beta(a+b, c)$.　(294) $\frac{-ab}{(a+b+c)^2(a+b+c+1)}$.　(295) $R' = u(\in (0,1))$ のもとで $R \sim (1-u)\beta(a,c)$.　(296) $(1-u)\frac{a}{a+c}$.　(297) $(1-u)^2\frac{ac}{(a+c)^2(a+c+1)}$.　(298) $0 < v < u$ について，$f_{R|R+R'}(v|u) = \frac{f_{(R,R+R')(v,u)}}{f_{R+R'}(u)} = \frac{1}{B(a,b)}\big(\frac{v}{u}\big)^{a-1}\big(1 - \frac{v}{u}\big)^{b-1}\frac{1}{u}$. 故に $0 < x < u$ について，$P[R \leqq x \,|\, R + R' = u] = P[u\beta(a,b) \leqq x]$. よって $R + R' = u(\in (0,1))$ のもとで $R \sim u\beta(a,b)$.　(299) $0 < y < x$ について，$P[\max(M_1, M_2) \leqq x, \min(M_1, M_2) \leqq y] = P[\max(M_1, M_2) \leqq x] - P[\max(M_1, M_2) \leq x, \min(M_1, M_2) > y] = (P[M \leq x])^2 - (P[y < M \leq x])^2$ となるのでこれを x と y で微分すると，$0 < y < x$ について，$f_{(\max(M_1,M_2), \min(M_1,M_2))}(x,y) = 2\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$.　(300) $Cov(\max(M_1, M_2), \min(M_1, M_2)) = E[M_1]E[M_2] - E[\max(M_1, M_2)]E[\min(M_1.M_2)] = \frac{1}{4\lambda^2}$.

確率分布	定義	期待値 $E(X)$	分散 $V(X)$	確率母関数 $E(t^X)$ 離散 積率母関数 $M_X(t)$ 連続
ベルヌーイ分布 $Be(p)$	$P(Be(p)=1)=p, \quad P(Be(p)=0)=1-p$	p	$p(1-p)$	$1-p+pt$
二項分布 $B(n,p)$	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad (k=0,1,2,\cdots,n)$	np	$np(1-p)$	$(1-p+pt)^n$
離散一様分布 $DU\{1,2,\cdots,n\}$	$P(X=k)=\frac{1}{n} \quad (k=1,2,\cdots,n)$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{(n+1)(n-1)}{12}$	$\frac{1}{n}\cdot\frac{t-t^{n+1}}{1-t}$
離散一様分布 $DU\{0,1,2,\cdots,n\}$	$P(X=k)=\frac{1}{n+1} \quad (k=0,1,2,\cdots,n)$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n(n+2)}{12}$	$\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1-t^{n+1}}{1-t}$
幾何分布 $Ge(p)$	$P(X=k)=p(1-p)^k \quad (k=0,1,2,\cdots)$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{p}{1-(1-p)t}$
ファーストサクセス分布 $F_s(p)$	$P(X'=k)=p(1-p)^{k-1} \quad (k=1,2,\cdots)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pt}{1-(1-p)t}$
負の二項分布 $NB(\alpha,p)$	$P(X=k)=\binom{\alpha+k-1}{k}p^\alpha(1-p)^k \ (k=0,1,2,\cdots)$	$\frac{\alpha(1-p)}{p}$	$\alpha\frac{1-p}{p^2}$	$\left(\frac{p}{1-(1-p)t}\right)^\alpha$
ポアソン分布 $P_o(\lambda)$	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k=0,1,2,\cdots)$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$
超幾何分布 $HG(N,m,n)$	$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} \ (k=0,1,\cdots,\min(m,n))$	$n\frac{m}{N}$	$\frac{N-n}{N-1}\cdot n\cdot\frac{m}{N}\frac{N-m}{N}$	
一様分布 $U(a,b)$	$f_{X'}(x)=\frac{1}{b-a} \quad (a\leq x\leq b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$
指数分布 $Exp(\lambda)$	$f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x} \quad (x>0)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t} \ (t<\lambda)$
ガンマ分布 $\Gamma(p,a)$	$f_X(x)=\frac{a^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-ax} \quad (x>0)$	$\frac{p}{a}$	$\frac{p}{a^2}$	$\left(\frac{a}{a-t}\right)^p$
標準正規分布 $N(0,1)$	$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (-\infty<x<\infty)$	0	1	$e^{\frac{t^2}{2}}$
正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f_Y(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	$e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$
ベータ分布 $\beta(a,b)$	$f_X(x)=\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1} \quad (0<x<1)$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	