付録C－固定変動率の対数正規モデルのモデル検証

株式収益率が「対数正規過程」（LN：Lognormal Model）に従うと仮定し、標準的な統計定義を用いると、

$$\log_e\left(\frac{S_T}{S_t}\right)\sim N\left(u(T-t),\sigma^2(T-t)\right) \qquad (1)$$

$T > t$

Yが 1 期間の株式収益率（$Y=S_{t+1}\div S_t$）である場合、

$$E[Y]=\exp\left(u+\frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

しかしながら、多数の財務テキストは異なる定義を用いており、株式収益率に以下の対数正規分布を仮定し、次のように表記する。

$$\log_e\left(\frac{S_T}{S_t}\right)\sim N\left(\left(u-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t),\sigma^2(T-t)\right) \qquad (2)$$

この場合、$E[Y] = \exp(u)$

明確に、モデルを正確に検証するために、これらの定義うちどちらを適用するか確認すべきである。本付録の**(2)**に記載する第 2 の定義を用いる。

以下の項目は、段落**2-(1)-②**「投資収益率モデルの検証」で議論した検証過程で用いた段階番号を用いる。

段階１．実績データへのモデルの当てはめ

最初に、下記（付録 B に記載する月末終値）を含む 1956 年 1 月～1999 年 12 月の「トロント証券取引所 300 種」（TSE300：Tronto Securities Exchange300）の月次収益率データから平均収益率μと標準偏差σを計算した。

これは月次データであるので、T－t ＝ 1 / 12 と定義する。

各月末の月次終値を用いて、$r_i=\log_e\left(\frac{S_{i+l}}{S_i}\right)$を計算する。$r_i$ は年率でなく、1 ヵ月の収益率である。

r_i の標本平均と標本標準偏差を計算する。

標本平均 $\hat{r}=0.81374\%$
標本標準偏差 $\hat{\sigma}_r=4.51133\%$

これらを年率の収益率μと変動率σに転換する。

$$\sigma=\hat{\sigma}_r\sqrt{12}=15.6277\%$$

$$\mu=\hat{r}(12)+\frac{1}{2}\sigma^2=10.9860\%$$

注）期間 1 年の「累積収益率係数」（Y）は、

E [Y] ＝ exp (μ) ＝ 1.116122

段階２と３．モデルが発生する累積収益率係数の検証

表**1**にあるパーセント点で表記される 9 つの検証項目があることに注意すること。これらの検証項目は、期間 1 年、期間 5 年、期間 10 年の確率分布のテイルの歪度または厚さの検証である。期間 1 年の「累積収益率係数」の期待値は、1.10～1.20 の範囲であるべきであり、期間 1 年の「累積収益率係数」の標準偏差は少なくとも 0.175 であるという規制もある。それで、モデルの検証に用いた制約条件は少なくとも 11 ある。

しかしながら、単純な「対数正規」（LN）モデルには、方向性と変動率を示す 2 つのパラメーターしかない。パーセント点の制約条件を充足するため、確率分布の変動性を調整する必要があるだろう。それで、9 つのパーセント点の制約条件中最も厳しい一つを見つけ、それを用いてモデルを検証し、他の制約条件も充足した。「対数正規」（LN）モデルと表 1 の検証項目について、期間 1 年の 2.5 パーセント点の条件が最も重用であると判明した。

Y_P が Δt 期間の「累積収益率係数」の期待 100 パーセント点であり、方程式（2）を用いる場合、

Y_P は $\Phi\left(\dfrac{\log_e\left(Y_p\right)-\left(\mu-\dfrac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)=p$ を充足しなければならない。　　（3）

ここで、$\Phi(\cdot)$ は、標準 N (0, 1) 累積分布関数（c.d.f.）である。

期間 1 年の 2.5 パーセント点の検証項目を検証するため、p＝0.025、Δt＝1 に設定し、Y_P に対して方程式（3）を解く。

これにより、$Y_p=\exp\left(\sigma\Phi^{-1}(p)+\left(\mu-\sigma^2/2\right)\right)=0.812$ が得られる。0.812 は必要数値である 0.76 よりも大きいので、（テイルに十分な厚さがないため）モデルはこの検証項目を充足していず、パラメーターを調整するか、別のモデルを選択することになる。

段階４．検証項目に当てはめるためのモデルの調整

方程式（3）を書き換えると、

$$\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}\Phi^{-1}(p)+\log_e\left(Y_p\right)-\mu\Delta t=0$$

期間 1 年の 2.5 パーセント点を用いると、Yp ＝76 であり、平均収益率μは変わらないと仮定すると、解く方程式は、次のようになる。

$$\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}\Phi^{-1}(p)+\log_e\left(Y_p\right)-\mu\Delta t=0 \quad => \sigma=18.7140\%$$

それで、平均収益率μ＝10.9860%、標準偏差σ＝18.714%は、期間 1 年の 2.5 パーセント点の検証項目に合致するだろう。

同じ期待収益率で変動性に対する低い数値を導出することを確認するため、その他の 9 つのパーセント点の各検証項目に対してこの計算を再度行う。これは、上記の項目で検証する「対数正規」（LN）モデルについて、期間 1 年の 2.5 パーセント点の条件が、最も重用な制約条件であり、用いるべき最後のパラメーターを導出する。

段階５．異なるデータを用いる場合の調整

「トロント証券取引所 300 種」（TES300）のデータを直接用いるため、これはここでは適用しない。しかしながら、「対数正規モデル」を検証するのに他のデータを用いる場合、段落 3 で計算した調整（3.0863＝18.714－15.6277）を参照し、新しいデータで計算する変動性を増加させるように同じ調整を用いるべきである。

段階６．各最大収益率の項目への合致

これは、段階 2 と段階 4 で実行され、議論した。

段階７．シミュレーション上の数値は、分析計算結果を再現すべきである。

上述の段落で、シミュレーションよりも分析によってモデルを検証してきた。この段落は、適用する乱数発生装置に問題がある場合とか、シミュレーションが十分機能しない場合、シミュレーションは検証項目に合致していないことを思い出させる。これは、いくつかのシミュレーションを作動したり、期待値の結果を比較することで検証できるだろう。

段階８．期間 1 年累積収益率係数の平均収益率を標準偏差の確認

上述のように、E [Y] ＝ exp (μ) ＝ 1.116122 は、求められた 1.10～1.20 の範囲である。

方程式に用いる Y の標準偏差を 21.1%として計算できる。

$$Var[Y] = \exp(2\mu)\left[\exp(\sigma^2) - 1\right]$$

これは、最低必要値の 17.5%よりも大きい。

平均収益率 μ ＝10.9860%、標準偏差 σ ＝18.714%の対数正規分布は、全検証項目を充足することが証明されたため、このモデルは責任準備金の計算に用いる「トロント証券取引所 300 種」（TSE300）の収益率の一連のシナリオを発生するのに用いることができる。

以　上