

# Least Squares Monte Carlo (LSMC) 生命保険および年金保険への応用

## 日本アクチュアリー会 第5回例会資料

2015年2月3日

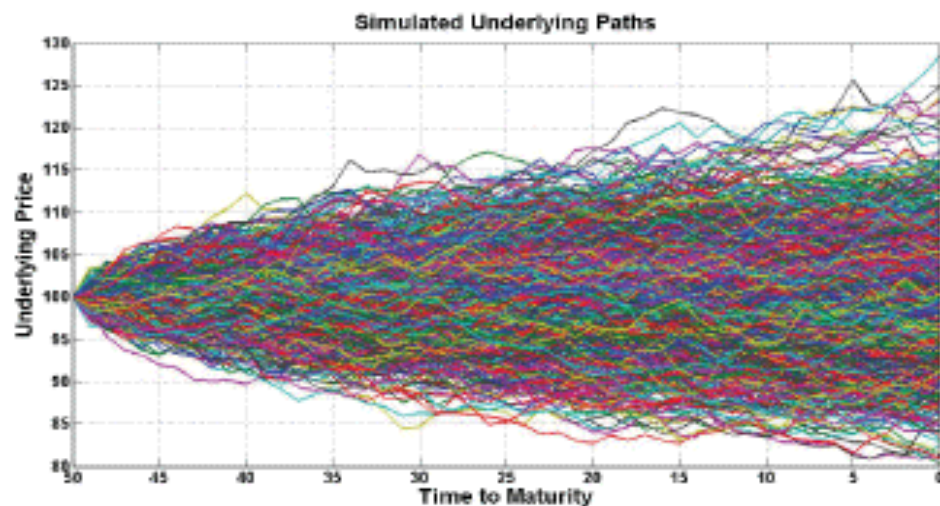


# 本日の予定

- LSMC理論の紹介
- LSMC応用の概要
- ケーススタディ
- 考察

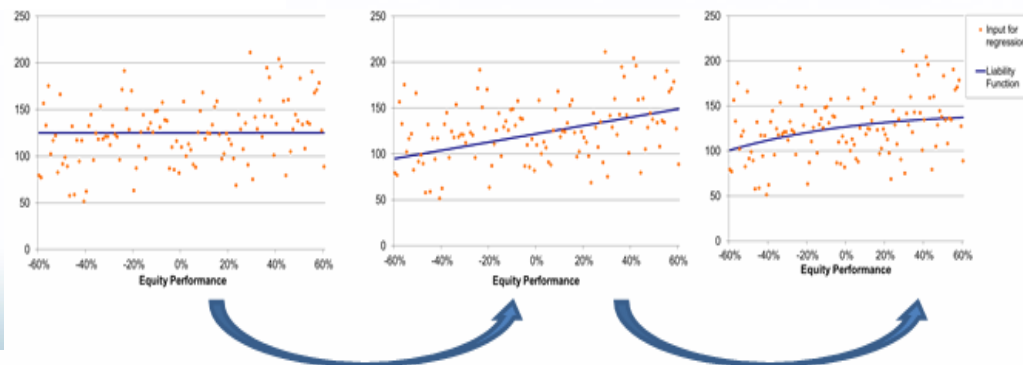
# LSMC理論

- 生命保険および年金保険への応用では、LSMCは、あらゆる確率論的計算に対してそのリスクドライバーの関数としてクローズドフォームの解を導出



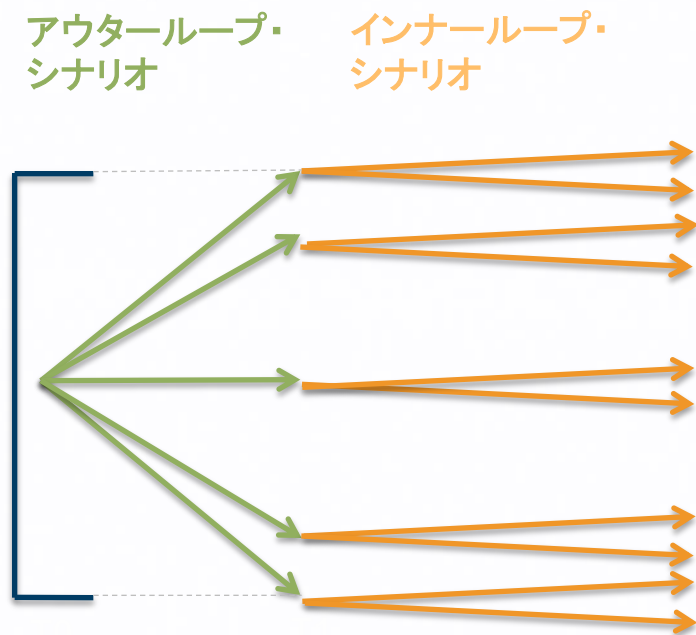
モンテカルロ・シミュレーション

最小二乗法



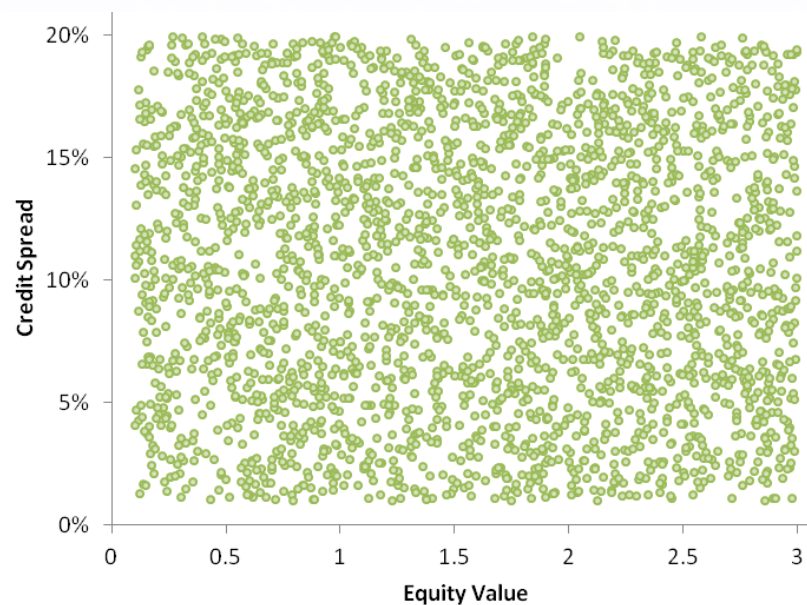
# LSMC理論

- 多数(例えば10,000)のアウトターシナリオに少数(例えば10)のインナーシナリオ
  - アウターシナリオは、現在の市場および非市場環境へのショック
  - インナーシナリオは、経済シナリオ
- 計算された負債価値は、インナーシナリオの数が少ないため、それだけでは信頼できない
- 大量の不正確な情報を収集



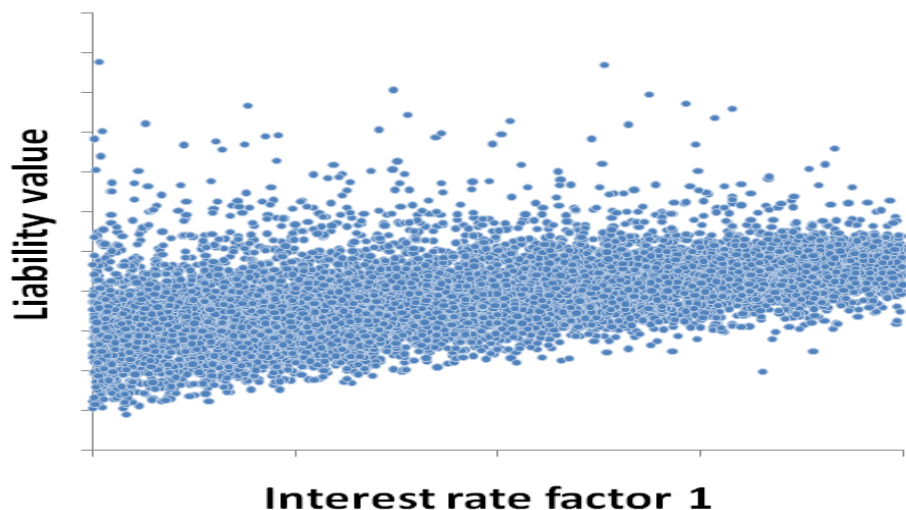
# LSMC理論

- アウターシナリオのショックは、リスクドライバーが取り得る値の空間に対して一様に分布
- リスクドライバーとその確率の組合せに対して経済的視点は不要
- リスクドライバーの空間に対して、情報が均等に分布
- 堅固な推計につながる



# LSMC理論

結果として、多くの不正確な負債の値を得る



- サンプルエラーを排除して、関係性を明らかにする必要がある
- アイデアは、不正確なフィッティング値の「スムージング」
  - 最小二乗法を使用
  - 負債の関数は、交差項を含む多項式

# LSMC理論

最小二乗法により、*自動的なモデル選択*が可能になる：

- 自明な多項式から開始
- 続いていくつかの項を多項式に追加
- このプロセスをどこで止めるか、どの項を選択するかは、  
純粋に統計的基準で判定



一つの負債価値に含まれるランダムエラーは、(平均では)相殺され、  
リスクドライバーと負債価値の真の関係が明らかになる。

# LSMC理論 処理過程の概要



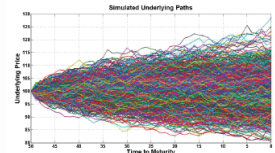
リスクドライバー  
の特定



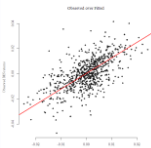
ショックの範囲を  
評価



シナリオを生成



Monte Carlo  
数値計算



LSMC



結果の検証

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

報告



# LSMC理論

三段階の検証:

1. 関数値を全シナリオの結果 (Brute-Force values) と比較
  - ベンチマークが困難、計算量が多い
2. カーブの全体的形状を判断
  - 全体の水準、単調性、傾斜、曲率、相互関係
3. 関数値の信頼区間を導出
  - どの程度のランダム性が残っているか？
  - ミスフィット、異常値、データ処理エラー等を検出

# LSMC応用の概要

生命保険および年金保険への応用では、LSMCは、あらゆる確率論的計算に対してそのリスクドライバーの関数としてクローズドフォームの解を導出

- 効率的モデリング
- 頻繁な大規模計算を回避
- ストキャスティック・オン・ストキャスティックのプロジェクトが可能

# LSMC応用の概要

- リアルタイムのモニタリング（日次、またはwhat nowシナリオ）
  - 日次ソルベンシー・モニタリング
  - 収益性のトラッキング
  - 資本ポジション
  - ALMデュレーションのミスマッチ
  - ヘッジのターゲット
  - 要因の報告



- 予測（将来または感応度）
  - プライシング
  - 事業予測
  - ORSAプロジェクション



# ケーススタディ

事例1: ドイツの有配当終身生命保険 – SII

事例2: 米国の変額年金 – 資本モニタリング

事例3: 米国の定額年金 – ALM

事例4: 米国の変額年金 – ストキャスティック・オン・ストキャスティック

# 事例1:ドイツの有配当終身生命保険 - SII

## 目的

SIIにおけるソルベンシーの日次モニター

## LSMCの理由

全契約ブロックのエコノミック・キャピタルの日次ランは不可能

## 計算の種類

リスクニュートラル(の平均値)に基づくエコノミック・キャピタル  
市場リスクおよび非市場リスク両方を反映

# 事例1:ドイツの有配当終身生命保険 - SII

リスクドライバーの  
特定



- 市場リスク:
  - 金利(水準+ボラティリティ)
  - 株価(水準+ボラティリティ)
  - 信用スプレッド

- 非市場リスク:
  - 解約失効
  - 長寿
  - 死亡率

ショックの範囲を  
評価



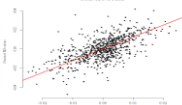
各リスクドライバーは、特定のリアルワールドの視点における99.99966%信頼水準の上限と下限の範囲でストレスを受ける

シナリオを生成



50,000 (= 5,000 x 10)のフィッティング・シナリオ

LSMC



自動キャリブレーションプロセスの結果:94項の多項式

# 事例1:ドイツの有配当終身生命保険 - SII

結果の検証



## 1. 関数値を全シナリオの結果と比較

→ リスクドライバーの空間の50の異なるポイントに実施

→ 平均偏差 <2%

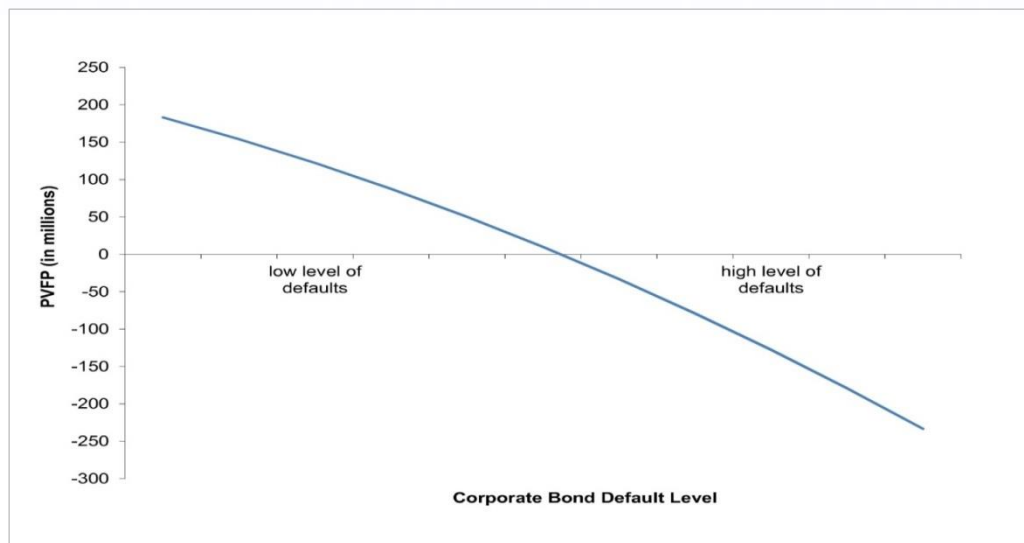
# 事例1:ドイツの有配当終身生命保険 - SII

結果の検証



## 2. カーブの全体的形状を判断

→ 全体の水準、傾斜、曲率、相互関係



株主利益の現在価値は、  
社債のデフォルト水準に依存:

✓デフォルトが多いほど損失も増加



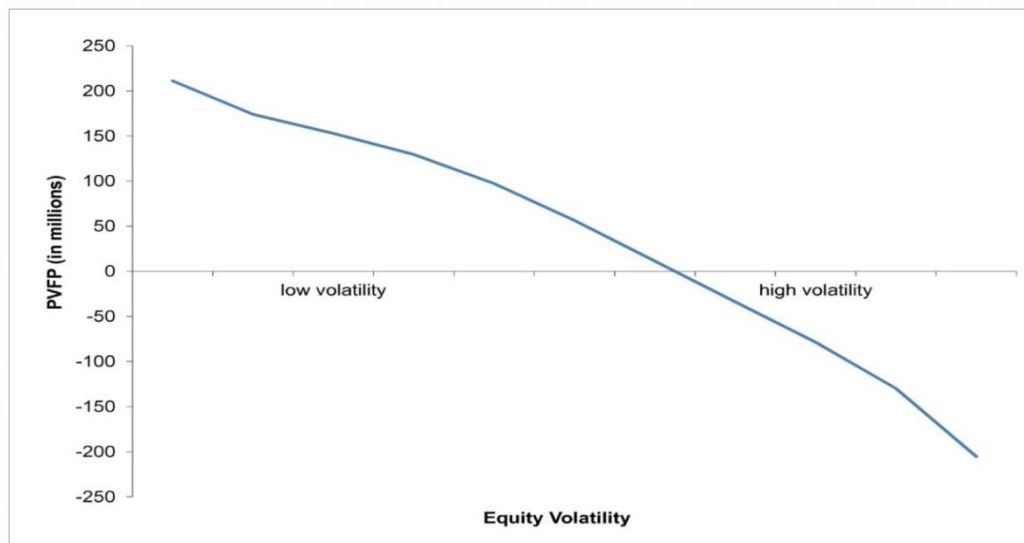
# 事例1:ドイツの有配当終身生命保険 - SII

結果の検証



## 2. カーブの全体的形状を判断

→ 全体の水準、傾斜、曲率、相互関係



株主利益の現在価値は、  
株式のボラティリティに依存:

✓ボラティリティが高いほど損失も増加

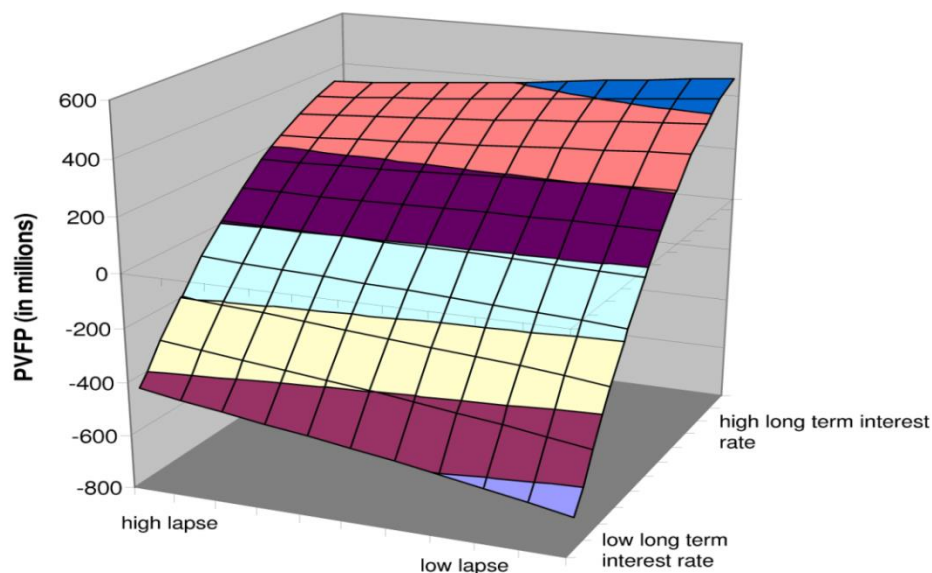
# 事例1:ドイツの有配当終身生命保険 - SII

結果の検証



## 2. カーブの全体的形状を判断

→ 全体の水準、傾斜、曲率、相互関係



株主利益の現在価値は、解約失効および金利の水準に依存

→ 金利水準と解約の相互関係:

- ✓ 低い金利水準: 解約失効率の上昇は、株主の保証を一部開放
- ✓ 高い金利水準: 解約失効率の上昇は、株主からキャピタルゲインを一部奪う

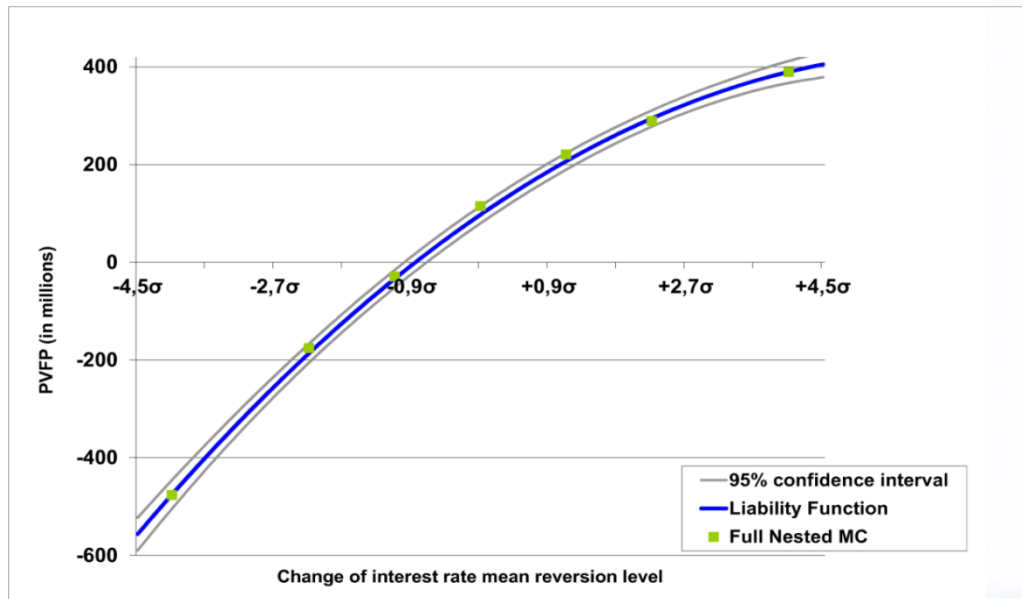
# 事例1:ドイツの有配当終身生命保険 - SII

結果の検証



## 3. 関数値の信頼区間を導出

-どの程度のランダム性が残っているか？



- ✓ 全体的形状はとてもよく捉えられている
- ✓ 真の値とLSMC推計の乖離は小さい
- ✓ タイトな信頼区間  
→ランダム性がほとんど残らない

# 事例1:ドイツの有配当終身生命保険 - SII

- LSMCはSII環境で機能する、ソルベンシーの日次計測に用いられる
- LSMCは、直観的な理解を助ける
  - 各リスクドライバーへの感応度
  - リスクドライバー間の相互関係
- LSMCは、変動要因の説明に役立つ

# 事例2: 米国の変額年金 – 資本モニタリング

## 目的

資本は四半期ごとに報告されるが、月次でのモニターが望ましい、  
市場が大きく変動した場合の資本変動を理解したい

## LSMCの理由

月次もしくはそれ以上に頻繁な報告に対して、  
リソース(スタッフやコンピュータ)が不要

## 計算の種類

リアルワールドの(CTE)エコノミック・キャピタル  
市場リスクのみを反映

# 事例2: 米国の変額年金 – 資本モニタリング

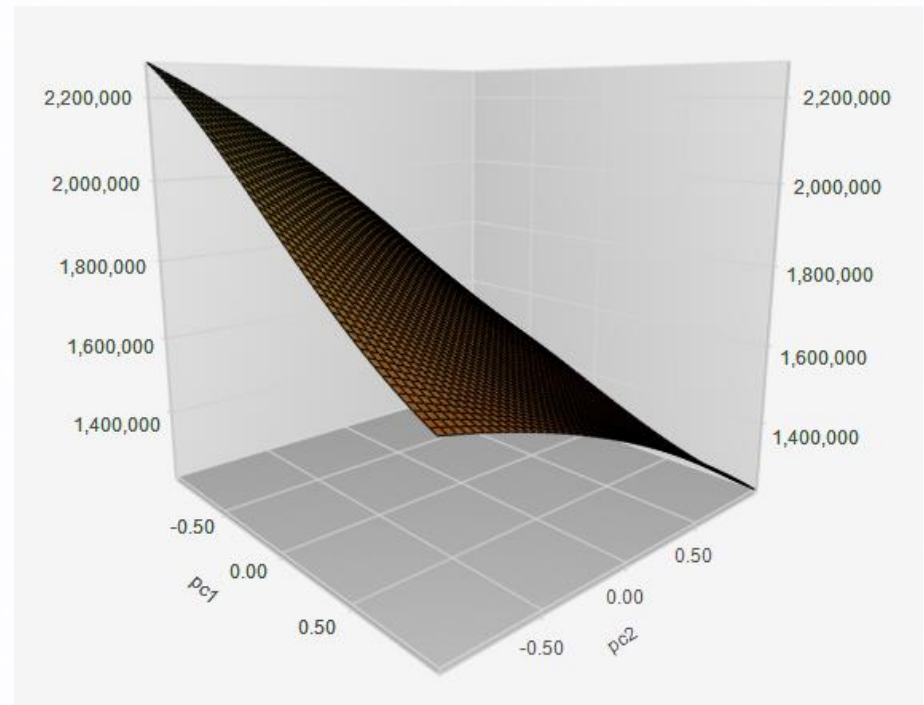
- 設定:
  - VAで、ディープITMのGLWB(最低保証額10百万、アカウントバリュー4百万)
- リスクドライバー
  - 国内株式
  - 国際株式
  - 債券指数
  - 金利(最初の二つの主成分)
- テスト期間
  - 2012年3月31日 – 2012年9月30日
  - 2008年8月31日 – 2009年2月28日
- 目的
  - 各四半期始にキャリブレーションを行い、LSMCがその四半期の 実際の月次 CTEとどの程度マッチするかをテスト

## 事例2: 米国の変額年金 – 資本モニタリング

イールドカーブの水準 (PC1) および  
イールドカーブの傾斜 (PC2) が増加する  
のに伴い、CTE(90)は減少。

グラフ上のリスク空間領域:

- PC1 +/- 200 bps
- PC2は、逆イールドから倍の傾斜まで幅がある

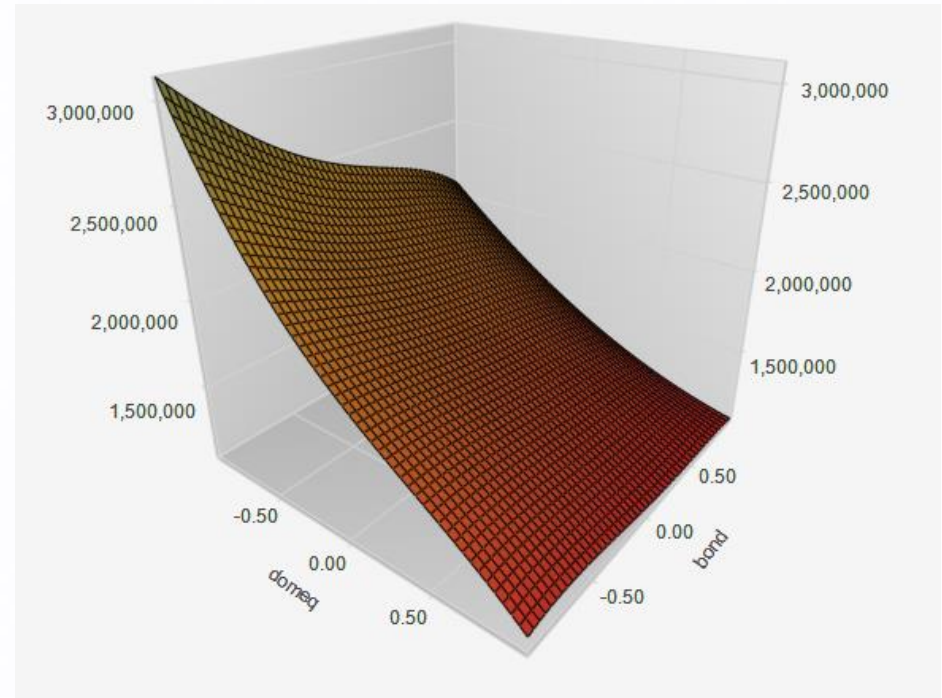


## 事例2: 米国の変額年金 – 資本モニタリング

株式および債券指数が増加するのに伴い、  
CTE(90)は減少。

グラフ上のリスク空間領域:

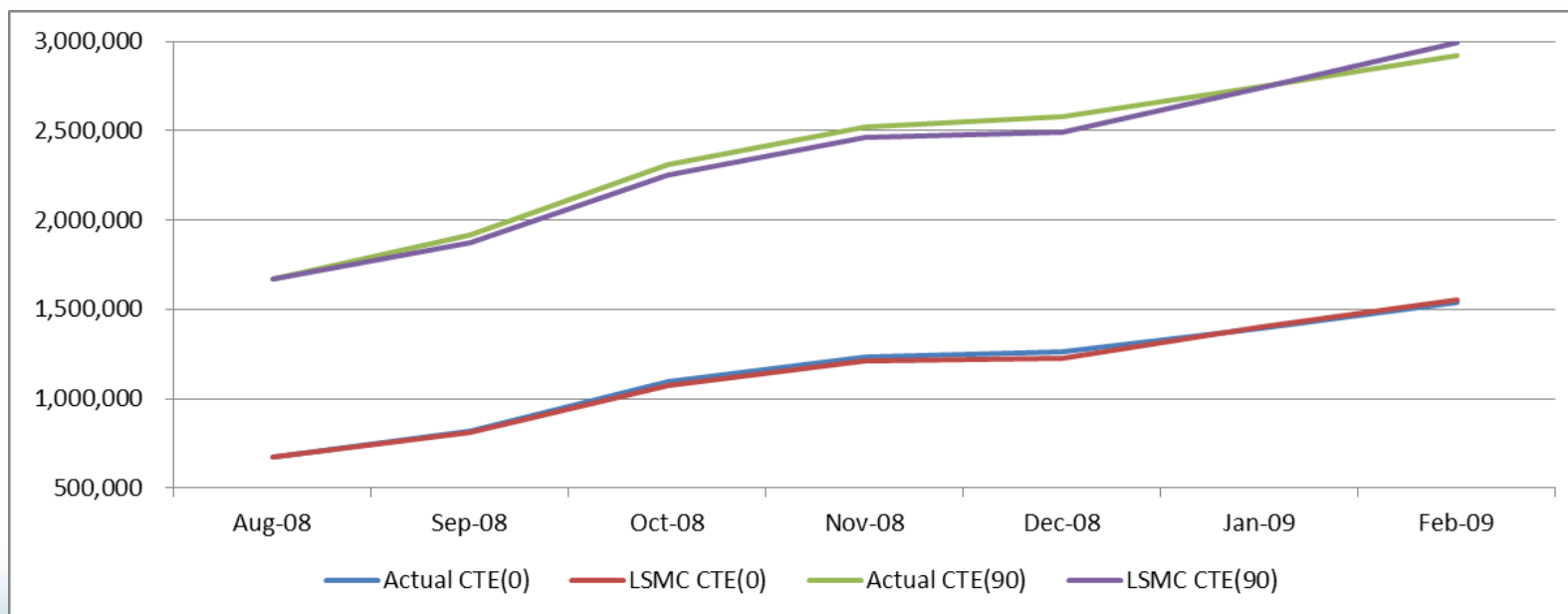
- 国内株式のリターン:  
(-60%, +60%)
- 債券ファンドリターン:  
(-60%, +60%)





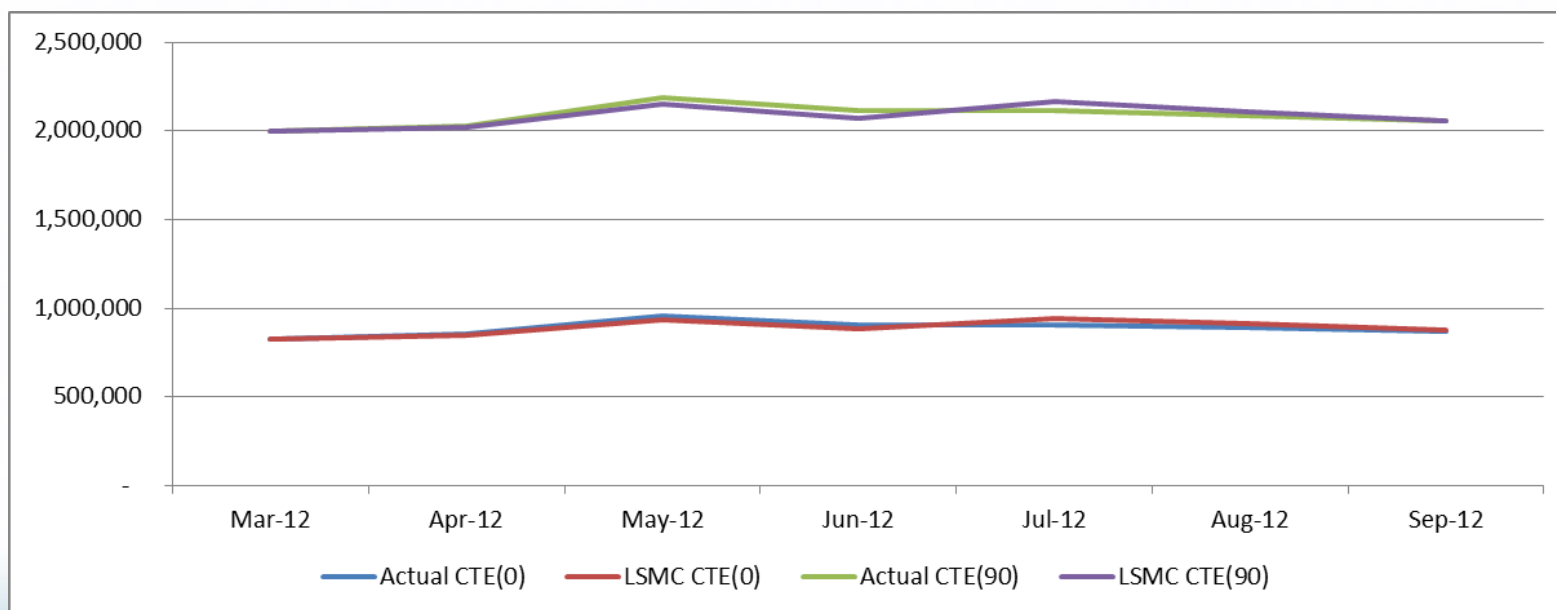
## 事例2: 米国の変額年金 – 資本モニタリング

Date	8/31/2008	9/30/2008	10/31/2008	11/30/2008	12/31/2008	1/31/2009	2/28/2009
Short Rate	2.17%	1.78%	1.34%	0.90%	0.37%	0.51%	0.72%
Medium Rate	3.45%	3.38%	3.29%	2.35%	1.87%	2.27%	2.69%
Long Rate	4.43%	4.31%	4.35%	3.45%	2.69%	3.58%	3.71%
Domestic	1,282.83	1,166.36	968.75	896.24	903.25	825.88	735.09
International	55.46	49.12	38.88	36.41	39.63	34.19	30.64
Bond	85.72	84.21	82.29	84.78	90.42	88.63	87.69
Actual CTE(0)	673,037	819,965	1,093,087	1,234,886	1,260,257	1,393,905	1,535,085
LSMC CTE(0)	673,037	809,070	1,070,644	1,213,740	1,225,947	1,398,308	1,555,282
Actual CTE(90)	1,669,260	1,915,224	2,311,306	2,521,270	2,579,166	2,746,363	2,919,130
LSMC CTE(90)	1,669,260	1,876,659	2,249,762	2,459,573	2,493,020	2,740,183	2,994,518



## 事例2: 米国の変額年金 – 資本モニタリング

Date	3/31/2012	4/30/2012	5/31/2012	6/30/2012	7/31/2012	8/31/2012	9/30/2012
Short Rate	0.19%	0.20%	0.18%	0.21%	0.16%	0.16%	0.17%
Medium Rate	1.61%	1.33%	1.03%	1.11%	0.98%	1.01%	1.04%
Long Rate	3.35%	3.12%	2.67%	2.76%	2.56%	2.68%	2.82%
Domestic	1,408.47	1,397.91	1,310.33	1,362.16	1,379.32	1,406.58	1,440.67
International	53.06	51.96	46.17	49.42	49.46	51.04	52.43
Bond	81.60	82.50	83.27	83.32	84.35	84.49	84.64
Actual CTE(0)	824,492	852,740	954,786	907,467	908,110	892,440	870,279
LSMC CTE(0)	824,492	844,369	934,602	883,107	938,851	911,201	880,183
Actual CTE(90)	1,999,785	2,030,838	2,188,788	2,117,304	2,116,912	2,084,463	2,056,270
LSMC CTE(90)	1,999,785	2,019,488	2,154,741	2,073,519	2,164,805	2,110,317	2,060,292



## 事例2: 米国の変額年金 – 資本モニタリング

- LSMC は、リアルワールドのCTEでも機能
  - より多くのインナーループが必要
- LSMCは、直観的な理解を助ける
  - 各リスクドライバーへの感応度
  - リスクドライバー間の相互関係
- LSMCは、変動要因の説明に役立つ

リアルタイムでの資本管理が、現実に可能になってきている

# 事例3: 米国の定額年金 – ALM

## 目的

資産・負債のデュレーション・ミスマッチ・ポジションに関する  
日次情報をALMマネージャーに提供

## LSMCの理由

負債の日次計算に、リソース(スタッフやコンピュータ)が不要

## 計算の種類

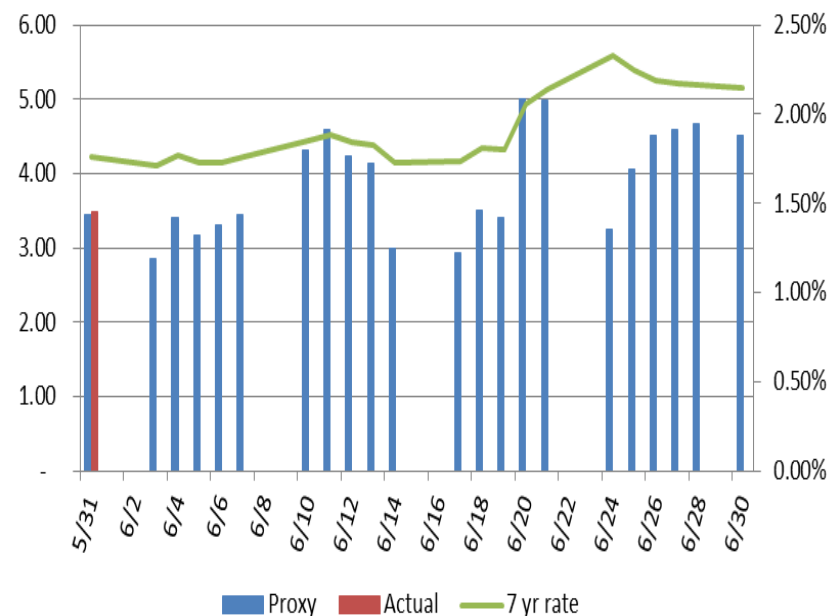
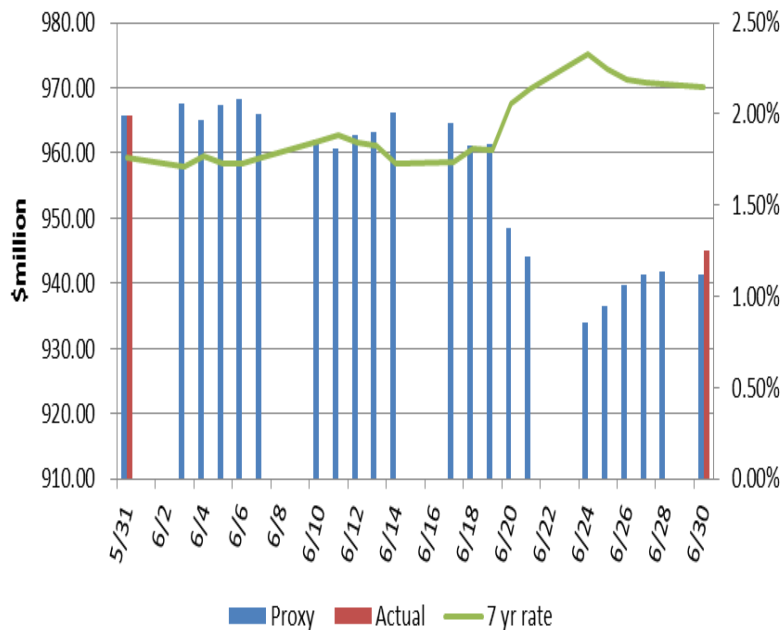
負債デュレーション  
金利リスクのみを反映

# 事例3: 米国の定額年金 – ALM

- 設定:
  - 10億ドルの定額年金
- リスクドライバー
  - 主要金利(1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 30年)
- テスト期間
  - 2013年5月31日 – 2013年6月30日
- 目的
  - 各月始にキャリブレーションを行い、変額年金以外のデュレーション・ミスマッチ・ポジションのモニターにLSMCがどの程度使えるかをテスト  
(VAヘッジのモニタリングにも同じ概念が利用可能)

# 事例3: 米国の定額年金 – ALM

## ■ PVFBおよびデュレーションの検証



# 事例3: 米国の定額年金 – ALM

## ■ DV01のトラッキング

\$thousand	DV01								Duration
	1 yr	2 yr	3 yr	4 yr	5 yr	7 yr	10 yr	30 yr	
5/31/2013	(24)	137	(0)	368	332	(806)	(332)	-	3.45
6/3/2013	(22)	139	1	376	404	(833)	(335)	-	2.86
6/4/2013	(24)	134	0	372	340	(814)	(331)	-	3.41
6/5/2013	(24)	139	1	377	363	(819)	(335)	-	3.16
6/6/2013	(26)	140	0	376	345	(810)	(338)	-	3.31
6/7/2013	(25)	137	(0)	371	331	(806)	(333)	-	3.45
6/10/2013	(26)	127	(6)	355	236	(772)	(322)	-	4.32
6/11/2013	(27)	124	(10)	359	200	(763)	(317)	-	4.59
6/12/2013	(27)	128	(6)	361	245	(777)	(326)	-	4.24
6/13/2013	(27)	130	(5)	364	256	(781)	(327)	-	4.13
6/14/2013	(23)	138	1	381	376	(824)	(333)	-	3.00
6/17/2013	(21)	136	1	380	382	(827)	(329)	-	2.93
6/18/2013	(23)	130	1	382	303	(806)	(319)	-	3.51
6/19/2013	(23)	131	2	385	312	(809)	(320)	-	3.41
6/20/2013	(21)	94	(23)	364	75	(704)	(268)	-	5.00
6/21/2013	(17)	78	(33)	368	28	(672)	(241)	-	4.99
6/24/2013	2	34	(47)	411	(12)	(587)	(155)	-	3.24
6/25/2013	(4)	54	(36)	387	16	(641)	(191)	-	4.07
6/26/2013	(10)	68	(32)	383	27	(669)	(214)	-	4.52
6/27/2013	(11)	72	(29)	366	48	(671)	(226)	-	4.58
6/28/2013	(13)	74	(29)	372	34	(669)	(229)	-	4.67
6/30/2013	(11)	76	(24)	379	70	(700)	(231)	-	4.51

# 事例3: 米国の定額年金 – ALM

## ALMのトラッキング

Date	Change in:		Difference
	Assets	Liabilities	
6/3/2013	1.98	1.70	(0.28)
6/4/2013	(2.77)	(2.50)	0.28
6/5/2013	2.36	2.26	(0.09)
6/6/2013	1.03	1.08	0.05
6/7/2013	(2.39)	(2.34)	0.04
6/10/2013	(3.86)	(4.01)	(0.16)
6/11/2013	(1.24)	(1.44)	(0.20)
6/12/2013	1.91	2.15	0.25
6/13/2013	0.33	0.38	0.05
6/14/2013	3.11	3.00	(0.11)
6/17/2013	(1.61)	(1.63)	(0.02)
6/18/2013	(3.62)	(3.37)	0.25
6/19/2013	0.31	0.29	(0.02)
6/20/2013	(11.87)	(13.19)	(1.32)
6/21/2013	(3.84)	(4.55)	(0.71)
6/24/2013	(10.37)	(10.35)	0.02
6/25/2013	2.16	2.76	0.60
6/26/2013	3.13	3.07	(0.06)
6/27/2013	1.50	1.67	0.17
6/28/2013	0.67	0.50	(0.17)
6/30/2013	(1.12)	(0.45)	0.67
<b>Total</b>	<b>(24.19)</b>	<b>(24.96)</b>	<b>(0.77)</b>



## 事例3: 米国の定額年金 – ALM

- LSMCは、異なる商品ラインにも機能
- LSMCは、日次ベースのALMやヘッジの代替を提供

# 事例4: 米国の変額年金 – ストキャスティック・オン・ストキャスティック

## 目的

責任準備金および必要資本を、確率論的計算で予測  
例えば、プライシング、事業予測、資本予測(ORSA)など

## LSMCの理由

ストキャスティック・オン・ストキャスティックは、計算負荷が非常に大きい

## 計算の種類

ストキャスティック・オン・ストキャスティック  
市場リスクおよびポートフォリオの経過を反映

# 事例4: 米国の変額年金 – ストキャスティック・オン・ストキャスティック

- 終身引出給付金の保証（GLWB）がついた変額年金（VA）
- キャリブレーションで捉えたリスクドライバー：
  - 国内株式インデックス
  - 国際株式インデックス
  - 債券指数
  - 1年スワップレート
  - 10年スワップレート
  - 契約以降の失効アカウントバリュー（AV）
  - 保有AV合計
  - 契約以降の失効数
  - 保有件数合計
  - ネット・アマウント・アット・リスク合計（NAR）
  - ネット・アマウント・アウトオブ・リスク（NAOR）

$NAR = \text{Max}[PV(\text{GLWB}) - AV, 0]$ ;  $NAOR = \text{Max}[AV - PV(\text{GLWB}), 0]$ ;

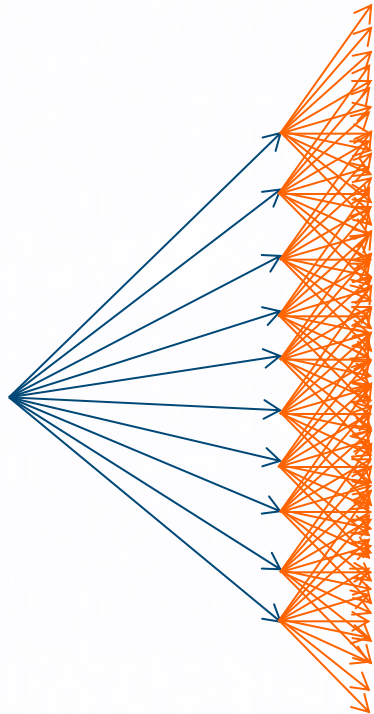
$PV(\text{GLWB}) =$  モデルした死亡率での将来の引出を10年スワップレートで割り引いた現在価値

# 事例4: 米国の変額年金 – ストキャスティック・オン・ストキャスティック

- シナリオセット：
  - 200,000のリスクニュートラルな金利および株式のシナリオ
  - プロジェクション期間は、30年
  - キャリブレーションは、2013年12月31日現在
- シナリオは、アウトーループとしても、インナーループとしても機能。  
各シナリオの各時点で、過去はアウトーループ、将来はインナーループ。  
ある時点の責任準備金は、将来のネットキャッシュフローの現在価値

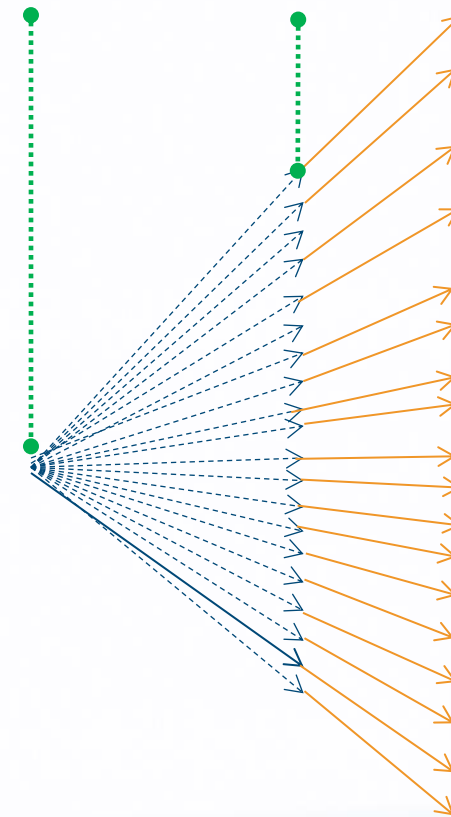
# 事例4: 米国の変額年金 – ストキャスティック・オン・ ストキャスティック

伝統的なネステッド・  
ストキャスティック



今回のケーススタディ

$t=0$   $t=1$   $t=2, \dots, 30$



最小二乗法

# 事例4: 米国の変額年金 – ストキャスティック・オン・ストキャスティック

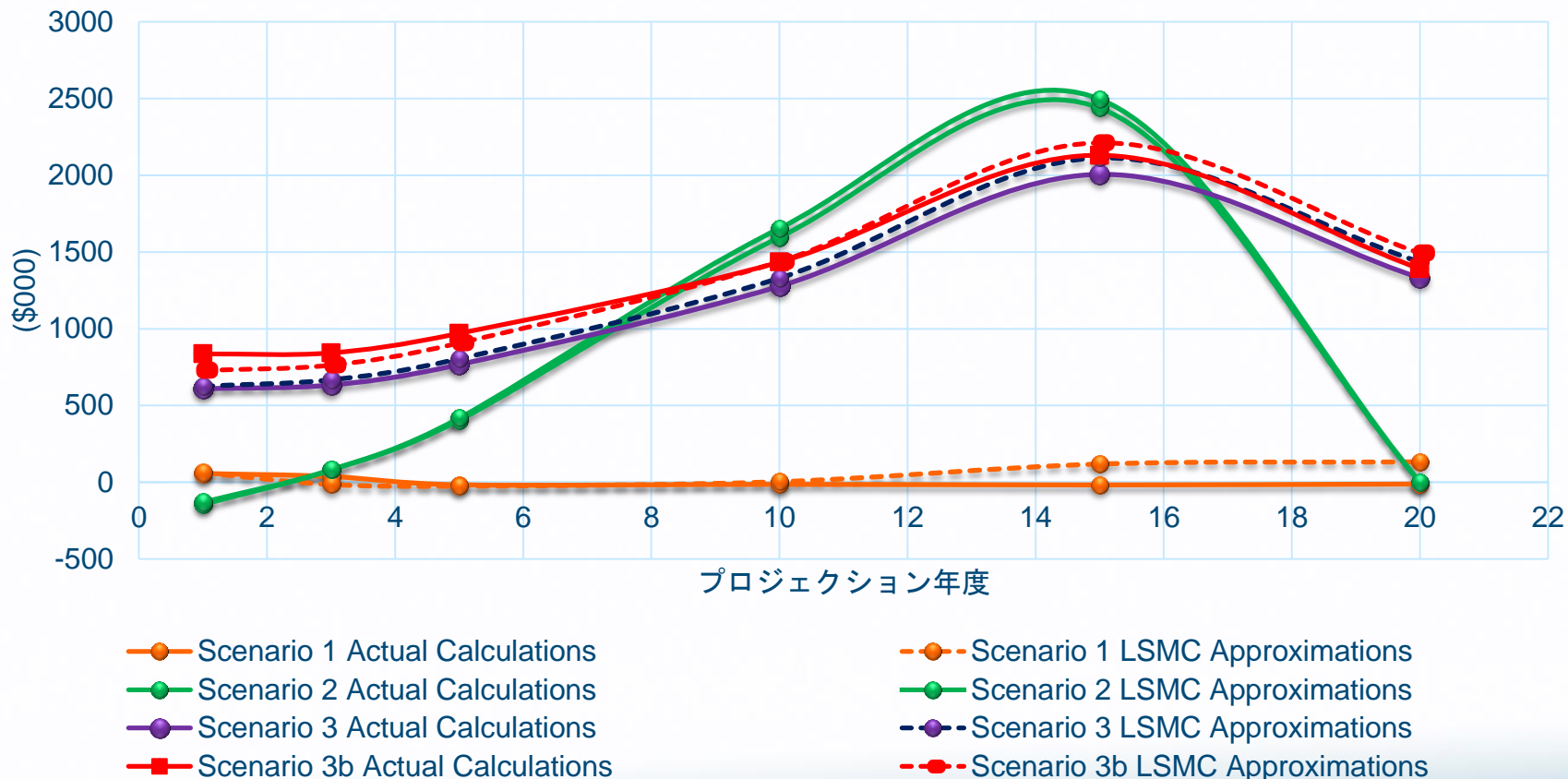
表1: 実際の計算とLSMC推計の違いを、当初保険料に対する%で表示

	プロジェクション年度					
	1	3	5	10	15	20
シナリオ1	-0.1%	0.5%	0.1%	-0.2%	-1.4%	-1.4%
シナリオ2	-0.1%	0.0%	-0.1%	-0.6%	-0.6%	N/a
シナリオ3	-0.1%	-0.3%	-0.4%	-0.5%	-1.1%	-1.0%
シナリオ3b	1.1%	0.8%	0.6%	0.0%	-0.8%	-1.0%
シナリオ4	-0.1%	-0.2%	-0.2%	-0.6%	-0.4%	N/a
シナリオ4b	-1.9%	-1.7%	-1.7%	-1.7%	-0.9%	N/a
シナリオ5	-0.1%	-0.2%	-0.1%	-0.2%	N/a	N/a

- N/aは、保有契約がない期間
- シナリオ1: 株式リターンは8%、債券リターンは5%で横ばい
- シナリオ2: 株式リターンは、初年度に30%、その後の株式リターンは年間-5%で、債券リターンは1%で横ばい
- シナリオ3: 株式リターンは、初年度に-30%、その後の株式リターンは年間+5%で、債券リターンは1%で横ばい
- シナリオ3b: シナリオ3で金利が50 bps下落
- シナリオ4: 株式および債券のリターンが0%
- シナリオ4b: シナリオ4で金利が100 bps上昇
- シナリオ5: 株式リターンは-5%で、債券リターンは-1%で横ばい

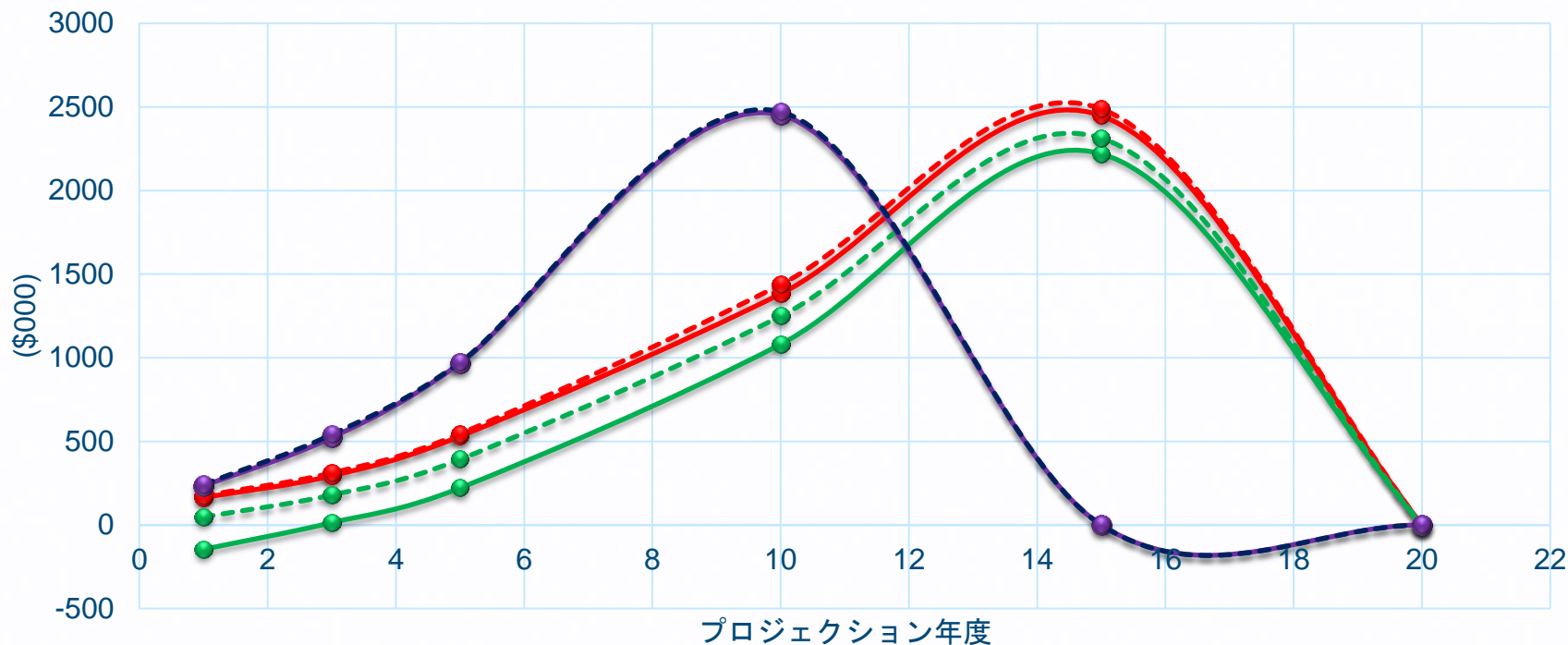
# 事例4: 米国の変額年金 – ストキャスティック・オン・ストキャスティック

## GLWBのリスクニュートラル価値



# 事例4: 米国の変額年金 – ストキャスティック・オン・ストキャスティック

## GLWBのリスクニュートラル価値



—●— Scenario 4 Actual Calculations

- -●- - Scenario 4 LSMC Approximations

—●— Scenario 4b Actual Calculations

- -●- - Scenario 4b LSMC Approximations

—●— Scenario 5 Actual Calculations

- -●- - Scenario 5 LSMC Approximations



# 考察

- 良質のベースライン・モデルを構築する！
- 統計的にだけでなく、結果の意味を理解する！
- 検証する：
  - 直観：大まかなチェック
  - キャリブレーション時点の感応度
  - 要因分析

# ありがとうございました



David Wang, FIA, FSA, MAAA  
Milliman Inc.  
1301 Fifth Avenue, Suite 3800  
Seattle, WA 98101  
[david.wang@milliman.com](mailto:david.wang@milliman.com)  
1-206-504-5524